วิธีเชิงปริมาณ สำหรับ ฝ่ายจัดการ

ริชาร์ด ไอ เลวิน และ ซี เอ เคิร์กพาตริค เขียน

เอกชัย ชัยประเสริฐสิทธิ แปล

มูลนิธิโครงการตำรา
สังคมศาสตร์และมนุษยศาสตร์

ราคา ๔๕.๐๐ บาท

ปก นันทะ เจริญพันธุ์

วิธีเชิงปริมาณสำหรับฝ่ายจัดการ

พิมพ์ครั้งที่หนึ่ง พ.ศ. ๒๕๑๖

บริษัทสำนักพิมพ์ **ไทยวัฒนาพานิช** จำกัด
๕๙๙ ถนนไมตรีจิต กรุงเทพมหานคร โทร. ๒๑๐๑๑๑ – ๒ – ๓ – ๔ – ๕
เป็นผู้แทนจำหน่าย

วิธีเชิงปริมาณสำหรับฝ่ายจัดการ

Richard I. Levin
C.A. Kirkpatrick แต่ง

เอกชัย ชัยประเสริฐสิทธิ แปล

โครงการตำรา
สังคมศาสตร์และมนุษยศาสตร์
สมาคมสังคมศาสตร์แห่งประเทศไทย
กรุงเทพมหานคร ๒๕๑๖

รายนามคณะกรรมการบริหารโครงการตำรา
สังคมศาสตร์และมนุษยศาสตร์ สมาคมสังคมศาสตร์แห่งประเทศไทย

นายป๋วย อึ๊งภากรณ์	ประธาน
นางสาวกุสุมา สนิทวงศ์	กรรมการ
นายจิรายุ อิศรางกูร ณ อยุธยา	กรรมการ
นายเจตนา นาควัชระ	กรรมการ
นายนิพนธ์ คันธเสวี	กรรมการ
นายพัทยา สายหู	กรรมการ
นายพันธุม ดิษยมณฑล	กรรมการ
นายวีรพงศ์ รามางกูร	กรรมการ
นายวีรยุทธ วิเชียรโชติ	กรรมการ
นายสมบัติ จันทรวงศ์	กรรมการ
นางสาวสวาท เสนาณรงค์	กรรมการ
นายสายหยุด จำปาทอง	กรรมการ
นายเสน่ห์ จามริก	กรรมการ
นายสังเวียน อินทรวิชัย	กรรมการและเหรัญญิก
นายสุลักษณ์ ศิวรักษ์	กรรมการและเลขานุการ

อนุกรรมการสาขาวิชาเศรษฐศาสตร์

นายพันธุม ดิษยมณฑล	ประธาน
นายมนตรี บริสุทธิ์	รองประธาน
นายศรีปริญญา รามโกมุท	กรรมการ
นายประชุม โฉมฉาย	กรรมการ
นายวารินทร์ วงศ์หาญเชาว์	กรรมการ
นายยืน ฮุนตระกูล	กรรมการ
นายสุพันธุ์ โตสุนทร	กรรมการ
นายวีรพงษ์ รามางกูร	กรรมการ
นายโกวิทย์ โปษยานนท์	กรรมการ
นายอุดม เกิดพิบูลย์	กรรมการ
นายจิรายุ อิศรางกูร ณ อยุธยา	กรรมการ
นายรังสรรค์ ธนะพรพันธุ์	กรรมการ
นางสาวจินตนา เชิญศิริ	กรรมการและเลขานุการ

บรรณาธิการหนังสือเล่มนี้ : นายมงคล สีห์โสภณ

คำแถลงของโครงการตำราฯ

โครงการตำรา ฯ นี้ ก่อตั้งขึ้นด้วยความร่วมมือกันเองเป็นส่วนบุคคล ในหมู่ผู้มีอาชีพสอนและผู้รักงานศึกษาจากสถาบันต่าง ๆ จุดมุ่งหมายเบื้องแรกก็เพื่อส่งเสริมให้มีหนังสือตำราดี ๆ มากขึ้นในภาษาไทย โดยเฉพาะในทางวิชาสังคมศาสตร์และมนุษยศาสตร์ ทั้งนี้เพราะต่างก็เห็นพ้องต้องกันว่า หนังสือตำราภาษาไทยในระดับคุณภาพยังมีไม่เพียงพอ ถ้าส่งเสริมให้มีหนังสือเช่นนี้เพิ่มขึ้น ย่อมเป็นการปรับปรุงมาตรฐานการศึกษาในขั้นมหาวิทยาลัยไปด้วยโดยปริยาย ทั้งการส่งเสริมด้านนี้ย่อมจะมีคุณค่าทางสร้างสรรค์ปัญญา ความคิดริเริ่ม ในเรื่องราวเกี่ยวกับสังคม วัฒนธรรม เศรษฐกิจ และการเมืองอีกด้วย

พร้อมกันนี้ โครงการตำราสังคมศาสตร์และมนุษยศาสตร์ ก็มีเจตนารมณ์ที่จะทำหน้าที่เป็นแหล่งชุมนุมงานเขียนของนักวิชาการจากสถาบันต่าง ๆ ด้วย ทั้งนี้เพื่อผลงานทางวิชาการได้เป็นที่รู้จักและเผยแพร่ออกไปโดยทั่วถึง ทั้งในด้านผู้สอนและผู้เรียน การดำเนินงานของโครงการตำรา ฯ มุ่งขยายความเข้าใจและความร่วมมือของบรรดานักวิชาการออกไปในวงกว้างยิ่ง ๆ ขึ้น ทั้งในด้านการกำหนดนโยบายสร้างตำรา การเขียน และการใช้ตำรานั้น ๆ เป็นที่หวังไว้ว่ากิจกรรมร่วมกันด้านนี้ อันเป็นภาระหน้าที่โดยตรงของนักวิชาการ จะเป็นเครื่องส่งเสริมและกระชับความสัมพันธ์อันพึงปรารถนาภายในวงวิชาชีพที่เกี่ยวข้องสืบไป วัตถุประสงค์และหลักการดังกล่าวมานี้ เป็นหลักยึดถือในการก่อตั้ง การวางแบบแผนและระเบียบดำเนินงาน ตลอดจนแนวทางแก้ไขปรับปรุงต่อไปในอนาคต

โครงการตำรา ฯ นี้ มีฐานะเป็นโครงการหนึ่งของสมาคมสังคมศาสตร์แห่งประเทศไทยตั้งขึ้นเพื่อดำเนินงานจัดพิมพ์หนังสือตำราในนามของสมาคมฯ ทั้งนี้โดยมีคณะกรรมการบริหารทำหน้าที่เป็นเอกเทศ ในชั้นนี้ โครงการ ฯ ได้จัดรูปงานแบ่งออกเป็นสาขาวิชา รวม ๘ สาขา คือ ๑. สาขาวิชาภูมิศาสตร์ ๒. สาขาวิชาประวัติศาสตร์ ๓. สาขาวิชาเศรษฐศาสตร์ ๔. สาขาวิชารัฐศาสตร์ ๕. สาขาวิชาสังคมวิทยาและมานุษยวิทยา ๖. สาขาวิชาปรัชญา ๗. สาขาวิชาจิตวิทยา ๘. สาขาวิชาวรรณคดี แต่ละสาขาวิชามีอนุกรรมการทำหน้าที่พิจารณาวางแนวนโยบายการสร้างตำราในสาขาของตน กำหนดชื่อและเรื่องหนังสือ ตลอดจนจัดหาและกำหนดตัวบุคคลผู้เขียนเพื่อนำเสนอต่อคณะกรรมการบริหาร อนุกรรมการสาขาวิชานี้ประกอบด้วยนักวิชาการในสาขาที่เกี่ยวข้องจากมหาวิทยาลัยและสถาบันต่าง ๆ นอกเหนือไปจากดำเนินงานจัดทำตำราแล้ว อนุกรรมการสาขาวิชาเหล่านี้ ยังทำหน้าที่ส่งเสริมให้นักวิชาการได้เข้ามามีส่วนร่วมในโครงการให้มากขึ้น เท่าที่จะพึงกระทำได้

โครงการตำรา ฯ มีนโยบายส่งเสริม การแปล เรียบเรียง และวิจัย จุดประสงค์สำคัญก็เพื่อเร่งรัดให้ได้มีหนังสือตำราจากงานทุกประเภท อย่างไรก็ดี ในขั้นแรกย่อมจะต้องเน้น

หนักไปในด้านแปลเป็นส่วนใหญ่ เพื่อเผยแพร่หลักวิชาความรู้ ทั้งในขั้นพื้นฐานและขั้นสูงใหม่ ๆ ให้ถึงมือนักศึกษาและผู้สนใจทั่ว ๆ ไป เป็นที่เชื่อแน่ว่าการส่งเสริมงานแปลจะเป็นทางหนึ่ง ซึ่งจะช่วยปูพื้นฐานสำหรับการริเริ่ม คิดค้น ขีดเขียน ทางด้านวิชาสังคมศาสตร์และมนุษยศาสตร์ ในวงกว้างต่อไป

ทางด้านทุนทรัพย์สำหรับจับจ่ายในขั้นดำเนินงานนั้น โครงการ ฯ นี้ได้รับความช่วยเหลือในระยะต้นจากมูลนิธิร็อคกี้เฟลเลอร์ ในระยะต่อไป โครงการตำรา ฯ มุ่งอาศัยกำลังทุนจากผลประโยชน์อันพึงได้จากการจำหน่ายหนังสือที่โครงการนี้ตีพิมพ์มาใช้เป็นทุนหมุนเวียนต่อไป แต่ในขณะเดียวกัน โครงการตำราสังคมศาสตร์และมนุษยศาสตร์ก็มิใช่เป็นกิจการแสวงหาผลกำไร หากมีความมุ่งประสงค์ให้นักศึกษาได้มีโอกาสซื้อหาหนังสือตำราได้ในราคาย่อมเยาพอสมควร เพราะฉะนั้น รายได้จักหาพอเพียงกับรายจ่ายไม่ จึงต้องหวังพึ่งแหล่งการสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ต่อไปอีก สิ่งที่คณะกรรมการโครงการตำรา ฯ หวังก็คือ ในขั้นต่อไป แหล่งดังกล่าวนั้นจักมาจากภายในประเทศของเราเอง หากนักวิชาการได้รับความสนับสนุนให้ได้มีผลงานทางวิชาการปรากฏออกมาเช่นนี้ ย่อมจะเป็นแบบอย่างอันดีงามสำหรับอนาคตของการศึกษาของประเทศชาติสืบไป

ประธานกรรมการ
โครงการตำราสังคมศาสตร์และมนุษยศาสตร์

คำนำของผู้เขียน

หนังสือเล่มนี้ ตามชื่อก็ได้บ่งไว้อย่างชัดเจนว่าเป็นหนังสือเกี่ยวกับเทคนิคทางเชิงปริมาณเบื้องต้นบางอย่าง ในปัจจุบันเทคนิคเหล่านี้กำลังมีบทบาทต่อการตัดสินใจของฝ่ายจัดการเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

หนังสือเล่มนี้ได้เขียนขึ้น เพื่อสนองตอบต่อความต้องการที่จะได้วิธีการศึกษาวิธีเชิงปริมาณเหล่านี้ที่แจ่มแจ้งและเข้าใจง่าย แต่ในขณะเดียวกันก็เป็นวิธีที่มีเหตุมีผลน่าเชื่อถือได้ โดยเหตุที่หนังสือเล่มนี้อาศัยพื้นความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่มากนัก จึงอาจไม่เป็นที่น่าสนใจนักสำหรับนักคณิตศาสตร์โดยแท้ ในขณะเดียวกันก็มิได้เขียนขึ้นสำหรับนักวิทยาศาสตร์ผู้ซึ่งมีความสนใจในการศึกษาค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติม แต่ได้เขียนขึ้นมาสำหรับผู้ที่อยู่ในวิทยาลัยและวงธุรกิจที่ประสงค์จะทำความเข้าใจ (หรือทำความเข้าใจดียิ่งขึ้น) ในวิธีเชิงปริมาณบางอย่างที่ฝ่ายจัดการอาจนำไปใช้ประโยชน์ได้

ถ้าพิจารณาหนังสือเล่มอื่น ๆ ในเรื่องเดียวกันนี้ เรามักจะเกิดความฉงนและผิดหวังเสมอ ในคำนำผู้เขียนมักจะระบุว่า “ต้องอาศัยความรู้ทางพีชคณิตระดับวิทยาลัยเท่านั้น” แต่พออ่านไปได้ไม่ถึงสิบหน้าก็จะพบแต่เครื่องหมายหรือสัญลักษณ์ที่สับสนมาก ความจริงเรามิได้รังเกียจการใช้เครื่องหมายหรือสัญลักษณ์ และยอมรับว่านั่นเป็นภาษาที่ยอมรับกันในหมู่นักคณิตศาสตร์ แต่ตามความเห็นของเรา สาเหตุที่ทำให้นักศึกษาเกิดความท้อถอย ไม่พยายามที่จะทำความเข้าใจในความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการวิจัยการปฏิบัติการ ก็คือ ความสับสนยุ่งยากที่เกิดจากการใช้เครื่องหมายหรือสัญลักษณ์ มิใช่ความสับสนยุ่งยากที่เกิดจากลักษณะวิชานี้

ในหนังสือเล่มนี้ เรามิได้ใช้เครื่องหมายหรือสัญลักษณ์ที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเรียนเกี่ยวกับวิชาการวิจัยการปฏิบัติการโดยทั่วไป ในขณะเดียวกันเราก็ไม่พยายามที่จะให้มีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ การพิสูจน์ที่เราได้พัฒนาและนำมาใช้นั้น เป็นเพียงการดำเนินการเป็นขั้น ๆ เป็นการขยับขยายจากสิ่งซึ่งเป็นสามัญสำนึกที่ผู้อ่านรู้อยู่แล้ว โดยอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ได้พัฒนาขึ้นในลักษณะดังกล่าว ไม่เพียงแต่จะช่วยให้ผู้อ่านสามารถใช้เทคนิคทางเชิงปริมาณใหม่ ๆ เท่านั้น ยังช่วยให้มีความเข้าใจในเหตุผลและวิธีการของเทคนิคเหล่านี้ด้วย

บทที่ 1 ตามธรรมเนียมก็เป็นบทโหมโรง ตามด้วยการแนะนำแนวความคิดทางเชิงปริมาณสองบท บทที่ 2 อธิบายเกี่ยวกับการวิเคราะห์การคุ้มทุนซึ่งเป็นเทคนิคเชิงปริมาณในยุคเดิมอย่างหนึ่ง ถึงแม้จะเป็นเทคนิคที่เก่า แต่ก็ยังคงใช้ประโยชน์ได้มาก การศึกษาในเรื่องต้นทุนและพฤติกรรมของต้นทุนอาจกล่าวได้ว่าเป็นจุดเริ่มที่เหมาะสำหรับหนังสือที่เกี่ยวกับการทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุด หรือการทำให้กำไรอยู่ในระดับสูงสุด บทที่ 3 พูดถึงเรื่องความน่าจะเป็น ซึ่งเป็นเครื่องมือที่ใช้ประกอบการพิจารณาที่ใช้ได้ผลที่สุดในกรณีที่ฝ่ายจัดการต้องเผชิญกับสถานการณ์ที่ไม่แน่นอน ลักษณะที่ค่อนข้างพิเศษของบทนี้ก็คือ อธิบายให้เข้าใจในทฤษฎีของเบยส์อย่างชัดเจน

บทที่ 4 และ 5 เป็นบทที่เกี่ยวกับการนำเทคนิคต่างๆ ไปใช้ประโยชน์ บทที่ 4 พยายามเชื่อมโยงทฤษฎีความน่าจะเป็นให้เข้ากับการใช้งานในทางปฏิบัติ ในเมื่อมีปัญหาความไม่แน่นอนในอุปสงค์สินค้า ส่วนบทที่ 5 อธิบายแนวความคิดดั้งเดิมเกี่ยวกับปริมาณการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุด โดยไม่ใช้แคลคูลัสเลย ทั้งนี้ ได้รวมปัญหาส่วนลดปริมาณและการกำหนดจุดสั่งซื้อใหม่โดยวิธีการทางสถิติเข้าไปด้วย

บทที่ 6 และ 7 เป็นเรื่องเกี่ยวกับคณิตศาสตร์โดยตรง เช่น ดีเตอร์มินันต์ เวคเตอร์ และพีชคณิตเมตริกซ์ พร้อมกับอธิบายให้เห็นว่าเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เหล่านี้อาจนำไปใช้เป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหาธุรกิจได้อย่างไร

บทที่ 8 และ 9 เป็นเรื่องเกี่ยวกับการโปรแกรมแบบเส้นตรง บทที่ 8 ได้แสดงให้เห็นว่าเราอาจนำการโปรแกรมแบบเส้นตรงไปใช้ให้เป็นประโยชน์ในเรื่องใดได้บ้าง โดยใช้กราฟสองมิติและพีชคณิตในระดับมัธยมเป็นเครื่องช่วยในการอธิบาย บทที่ 9 นอกจากจะได้อธิบายการใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในการแก้ปัญหาการทำให้กำไรอยู่ในระดับสูงสุดแล้ว ยังได้เข้าลึกไปถึงการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการทำให้ขาดทุนอยู่ในระดับต่ำสุดอีกด้วย ลักษณะเด่นของบทนี้ก็คือ การใช้วิธีซิมเพล็กซ์ในการแก้ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด

บทที่ 10 อธิบายวิธีการแก้ปัญหาเกมระหว่างบุคคลสองคนที่มีผลรวมเท่ากับศูนย์ สี่วิธี คือวิธีพีชคณิต เลขคณิต พีชคณิตเมตริกซ์ และกราฟ นอกจากนี้ยังได้แสดงให้เห็นถึงการแก้ปัญหาเกมที่มีกลยุทธ์หลายอย่างโดยใช้การโปรแกรมแบบเส้นตรงอีกด้วย

บทที่ 11 เป็นเรื่องการจัดการด้านการตลาด โดยมุ่งความสนใจหนักไปในเรื่องความนิยมในตราสินค้า

บทสุดท้าย คือบทที่ 12 เป็นการพิจารณาถึงพฤติกรรมของแถวรอคอย โดยไม่พยายามใช้หรืออ้างอิงถึงการแจกแจงทางสถิติที่ยุ่งยากเลย แต่เน้นหนักไปทางด้านการตัดสินใจของฝ่ายจัดการเกี่ยวกับการจัดหาอุปกรณ์บริการ

ในการเขียนหนังสือเล่มนี้ นักศึกษาในระดับบัณฑิตศึกษาได้ให้ความช่วยเหลือเรามาก ความคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่ได้ โดยเฉพาะจาก รูดี้ แลมมอน จอห์น บีเวอร์ลี่ จิม เจนทรี่ จีออฟ เชอร์ชิล และ แอล นิวแมน นับได้ว่าเป็นสิ่งที่มีคุณค่าอย่างยิ่ง

เราขอขอบคุณผู้ที่ได้กรุณาช่วยอ่านต้นฉบับหนังสือเล่มนี้ ท่านศาสตราจารย์ เอ็ดวิน บี คอกซ์ แห่งมหาวิทยาลัยบอสตัน ศาสตราจารย์ โอลิเวอร์ แกลแบรธที่ 3 แห่งซานดิเอโกสเตทคอลเลจ และท่านคณบดี ฮาโรลด์เฟล็ดแมน แห่งมหาวิทยาลัยแฟร์ เล ดิกกินสัน ซึ่งท่านทั้งสามนี้ได้ให้คำแนะนำที่ดีแก่เราตลอดมา

ริชาร์ด ไอ เลวิน – ซี เอ เคิร์กพาตริค

คำนำของผู้แปล

ในช่วงระยะเวลาสิบถึงยี่สิบปีที่ผ่านไปนี้ ความเจริญด้านวิชาการบริหารศาสตร์ (Management Science) ประกอบกับพัฒนาการด้านเทคโนโลยีทางเครื่องจักรสมองกล (Computer Technology) มีส่วนทำให้การวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ทางธุรกิจเชิงปริมาณ (Quantitative Analysis of Business Problems) ได้มีบทบาทและความสำคัญมากขึ้นในกระบวนการตัดสินใจของฝ่ายจัดการ การแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจะต้องอาศัยวิธีการที่มีหลักมีเกณฑ์ การนิยามปัญหาและการแสวงหาข้อเฉลยจะต้องดำเนินไปโดยมีระเบียบแบบแผน มีระบบที่ค่อนข้างแน่นอน การใช้เพียงสามัญสำนึกหรือเพียงประสบการณ์แต่เพียงอย่างเดียวมิอาจเป็นไปได้อีกแล้ว ในเมื่อขนาดของการดำเนินงานของธุรกิจได้ขยายตัวออกไป และปัญหาที่จะต้องแก้มีความสลับซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ด้วยเหตุดังกล่าว สถาบันการศึกษาในอารยประเทศจึงได้บรรจุวิชาต่าง ๆ เกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงปริมาณไว้ในหลักสูตรการศึกษาของสาขาวิชาทางบริหารธุรกิจมากขึ้น แนวโน้มในการปรับปรุงหลักสูตรการศึกษาในระดับอุดมศึกษาสำหรับสาขาวิชาเดียวกันในประเทศไทย ก็อยู่ในลักษณะดังกล่าวข้างต้น

ผู้แปลได้พิจารณาแล้ว เห็นว่าหนังสือ "Quantitative Approaches to Management" ของ Professors Levin กับ Kirkpatrick เป็นหนังสือที่อธิบายเกี่ยวกับเทคนิคและวิธีการบางอย่างทางด้านการวิจัยการปฏิบัติการ (Operations Research) มีแนวการเขียนง่าย ๆ และพยายามหลีกเลี่ยงสัญลักษณ์หรือเครื่องหมายต่าง ๆ การพิสูจน์สูตร ซึ่งเป็นอุปสรรคต่อการศึกษาหรือทำความเข้าใจวิชาการทางด้านนี้ โดยเฉพาะบุคคลที่ไม่ถนัดหรือไม่ชอบ ประกอบกับเห็นว่าหนังสือในแขนงนี้ที่เป็นภาษาไทยมีน้อยมาก หากได้แปลเป็นตำราภาษาไทยเพื่อใช้ประกอบการศึกษาหรืออ่านเพื่อเพิ่มพูนความรู้สำหรับผู้ที่สนใจก็อาจเป็นประโยชน์ไม่น้อย จึงได้เสนอโครงการแปลต่อสมาคมสังคมศาสตร์แห่งประเทศไทย โดยความเห็นชอบและสนับสนุนของสมาคม ฯ หนังสือแปลเล่มนี้จึงได้ปรากฏเป็นรูปเล่มดังที่ท่านเห็นอยู่ในขณะนี้ ดังนั้น ผู้แปลจึงใคร่ขอขอบพระคุณสมาคม ฯ ไว้ ณ โอกาสนี้

การแปลหนังสือเล่มนี้จะสำเร็จลุล่วงไปด้วยดีมิได้ หากมิได้ท่านอาจารย์สังเวียน อินทรวิชัย เลขาธิการมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ท่านศาสตราจารย์พยอม สิงห์เสน่ห์ คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี คอยให้กำลังใจสนับสนุนและส่งเสริมเพื่อให้มีตำราประกอบการศึกษาให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ ผู้แปลขอขอบพระคุณทั้งสองท่านที่ได้กล่าวนามมานี้ไว้ ณ โอกาสนี้เช่นกัน

เพื่อนร่วมงานหลายคนมีส่วนอย่างมากในการผลิตตำราแปลเล่มนี้ ซึ่งผู้แปลละเว้นที่จะกล่าวถึงมิได้ อาจารย์กิตติ บุญโพธิ์อภิชาติ อาจารย์ฉันทลักษณ์ ครุธแก้ว อาจารย์ชนะ

คณารัตนดิลก อาจารย์คัชรินทร์ เจริญวัลย์ ต่างมีส่วนในการอ่านต้นร่าง ให้ข้อคิดเห็นที่มีคุณค่า คุณสมบูรณ์ สายจิตบริสุทธิ์ ได้ช่วยพิมพ์ต้นฉบับด้วยความพิถีพิถันและอดทน ผู้แปลขอแสดงความขอบคุณทุกคนด้วยใจจริง

ขอขอบคุณบริษัทสำนักพิมพ์ ไทยวัฒนาพานิช จำกัด คุณสงวน ลิ้มมงคล จากบริษัทดังกล่าวที่ได้กรุณาประสานงานเพื่อให้งานชิ้นนี้พิมพ์สำเร็จออกมาเป็นรูปเล่ม อาจารย์ อวบ สาณะเสน และ คุณนันทะ เจริญพันธุ์ ที่ได้กรุณาออกแบบปกให้

หากมีข้อผิดพลาดหรือบกพร่องในการแปลหนังสือเล่มนี้ ผู้แปลขอน้อมรับไว้แต่เพียงผู้เดียว และหวังว่าท่านผู้รู้คงจะกรุณาให้ข้อคิดเห็นและคำติชม ผู้แปลพร้อมที่จะน้อมรับเสมอ หากหนังสือแปลเล่มนี้มีส่วนดีอยู่บ้าง ขอมอบแด่บูรพาจารย์ทุกท่านที่ได้เคยพร่ำสอนประสิทธิ์ประสาทวิชาแก่ผู้แปล

เอกชัย ชัยประเสริฐสิทธิ

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

28 มกราคม 2516

สารบาญ

หน้า

หน้า

หน้า

หน้า

บทที่ 1

บทนำ
(INTRODUCTION)

เนื่องจากวิธีเชิงปริมาณ (quantitative methods) ที่เราจะศึกษาต่อไปนั้นต้องอาศัยระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์ (scientific methodology) ดังนั้นในขั้นแรกนี้เราควรจะทำความเข้าใจลักษณะระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์เสียก่อน ระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์เป็นเรื่องที่เกี่ยวกับการดำเนินงานขั้นต่าง ๆ 5 ขั้น ดังต่อไปนี้

ระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์ (The Scientific Method)

1. **การสังเกตการณ์ (Observation)**

ระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์เริ่มต้นด้วยการสังเกตการณ์อย่างหนึ่ง เหตุการณ์ในที่นี้อาจจะเป็นสิ่งของวัตถุ สถานการณ์ ขบวนการ หรือข้อเท็จจริงก็ได้ ตามประวัติศาสตร์ ไอแซค นิวตัน (Isaac Newton) กำลัง "สังเกตการณ์" อยู่ภายใต้ต้นไม้ต้นหนึ่ง ในขณะนั้นผลแอปเปิลลูกหนึ่งหล่นลงมาถูกศีรษะของเขา การสังเกตการณ์อาจเป็นเพียงการกวาดสายตาไปอย่างผิวเผินหรืออาจเป็นการวิเคราะห์อย่างจดจ่อละเอียด และใช้เวลานานก็ได้ สำหรับนักวิทยาศาสตร์ที่ทำงานรับผิดชอบด้านการวิจัย การสังเกตการณ์ก็คือการยอมรับว่ายังมีบางสิ่งบางอย่างที่ตัวเองยังไม่เข้าใจโดยถ่องแท้

การสังเกตการณ์อย่างหนึ่งอย่างใดก็เพื่อชี้บ่งให้เห็นถึงปัญหาที่เกิดขึ้น ความรับผิดชอบประการสำคัญของฝ่ายจัดการประการหนึ่งคือการทำการตัดสินใจ และการตัดสินใจก็เป็นเรื่องเกี่ยวพันไปถึงปัญหา และแน่ละเราไม่อาจจะแก้ปัญหาใด ๆ ได้จนกว่าจะทราบว่าเกิดปัญหาจริง ดังนั้นฝ่ายจัดการที่เฉลียวฉลาดจึงควรพัฒนาทัศนะทางด้าน "การสังเกต" ให้ดี และพยายามเตรียมพร้อมและไหวทันต่อปัญหาที่อาจเกิดขึ้นเสมอ

การค้นหาปัญหาอาจเป็นงานที่ลำบากและไม่แน่นอน กว่าเราจะสงสัยว่ามีปัญหาเกิดขึ้นเวลาอาจล่วงเลยไปช้านานแล้วก็ได้ แม้กระนั้นก็ตามสิ่งที่ฝ่ายจัดการสังเกตได้นั้นอาจเป็นเพียงอาการของปัญหามูลฐาน มิใช่ตัวปัญหาที่แท้จริง

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างสมมติที่จะใช้ในการอธิบายการดำเนินงาน 5 ขั้น ตามระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์ สมมติว่าผู้ผลิตถ่านไฟฉายคนหนึ่งได้ไปเยี่ยมร้านค้าปลีกที่ขายเครื่องใช้ที่ทำด้วย

โลหะ 100 แห่ง ปรากฏว่าร้านค้าปลีกเพียง 4 แห่งเท่านั้นที่มีถ่านไฟฉายวางขายอยู่ในร้านของตน นี่เป็นการสังเกตสถานการณ์อย่างหนึ่งที่ทำให้ผู้ผลิตถ่านไฟฉายทราบว่ามีปัญหาเกิดขึ้นแล้ว

2. การกำหนดขอบเขตของปัญหา (Definition of the problem)

ในการดำเนินงานขั้นที่สอง ฝ่ายจัดการจะต้องทำให้ปัญหากระจ่างขึ้นและให้ทราบโดยแน่ชัดว่าปัญหาที่แท้จริงคืออะไร ฝ่ายจัดการจะกำหนดขอบเขตของปัญหาในลักษณะละเอียดและเฉพาะเจาะจง ฝ่ายจัดการจะต้องมองปัญหาอย่างชัดแจ้งว่าประเด็นสำคัญหรือประเด็นหลักนั้นมีอะไรบ้าง ถ้าดำเนินการตามที่ฝ่ายจัดการกำหนดก็ไม่ต้องเสียเวลา เงินทองและความพยายามในการที่จะแก้ปัญหาที่ผิด ๆ บางอย่าง

การกำหนดปัญหาให้เฉพาะเจาะจงอาจต้องดำเนินการหลายขั้น สมมติว่าฝ่ายจัดการสังเกตจากงบกำไรและขาดทุนว่ากำไรของปีที่ผ่านไปน้อยกว่าของปีก่อน ในขั้นแรกฝ่ายจัดการจะเสาะหาสาเหตุว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น และพบว่าเกิดจากปริมาณการขายที่ลดลงมิใช่เกิดจากต้นทุนที่เพิ่มขึ้น ในขั้นที่สองฝ่ายจัดการจะตั้งคำถามอีกครั้งหนึ่งว่า "ทำไม" ปรากฏว่ามิใช่เกิดจากผลิตภัณฑ์ของตน มิใช่เกิดจากราคาขาย แต่อาจเกิดจากการส่งเสริมการขายมากกว่า ในขั้นที่สามเขาสรุปได้ความว่าไม่ใช่ความผิดของแผนกและเจ้าหน้าที่ฝ่ายขาย แต่เป็นเพราะการโฆษณา สมมติว่าเป็นไปตามกรณีดังกล่าวในขั้นที่สี่ ฝ่ายจัดการจะต้องพิจารณาตัวแปรผันต่างๆ ทางด้านการโฆษณา (เป็นต้นว่า จำนวนเงินที่จ่ายเพื่อการโฆษณา สื่อกลางที่ใช้ แนวการโฆษณา จังหวะและกำหนดการ ฯลฯ) เพื่อค้นหาปัจจัยที่ก่อให้เกิดความผิดพลาดดังกล่าว

ไอแซค นิวตัน อาจจะถามว่า "ทำไมผลแอปเปิลลูกนั้นจึงหล่นมาแทนที่จะหลุดลอยขึ้นไป" เขาอาจพิจารณาถึงน้ำหนัก ความละเอียดของผิวและรูปร่างของผลแอปเปิล พิจารณาถึงความหนาแน่น อุณหภูมิ ความชื้นและความเหนียวของอากาศ พิจารณาถึงมวลรูปร่างและแกนของโลก นับว่าเป็นโชคของนักเรียนฟิสิกส์ที่นิวตันได้จัดการรวมหรือตัดตัวแปรผันเหล่านี้เสียส่วนใหญ่แล้ว ปัญหาของฝ่ายจัดการมีตัวแปรผันที่เกี่ยวข้องเข้ามาพัวพันอยู่เป็นจำนวนมาก แต่ก็เช่นเดียวกัน กรณีผลแอปเปิลของนิวตันเราอาจรวมหรือตัดตัวแปรผันเหล่านี้เสียส่วนมากจนเหลือตัวแปรผันที่สำคัญ ๆ ไม่กี่ตัว

ผู้ผลิตถ่านไฟฉายตามตัวอย่างข้างต้นคงไม่มีความยุ่งยากมากในการกำหนดขอบเขตของปัญหาของตน ปัญหาของผู้ผลิตที่อาจเขียนออกมาในทำนองว่า "ทำอย่างไรจึงจะสามารถทำให้ร้านค้าปลีกของใช้ที่ทำด้วยโลหะนำถ่านไฟฉายมาวางขายในร้านให้มากกว่านี้"

3. การตั้งสมมติฐาน (Formulation of a hypothesis)

เมื่อกำหนดขอบเขตของปัญหาแล้ว ฝ่ายจัดการก็จะพิจารณาอีกครั้งหนึ่งว่าเมื่อเผชิญ

กับสถานการณ์ที่คล้ายคลึงกันหรือที่เกี่ยวพันกันในอดีต ตัวเขาเองหรือบุคคลอื่นได้ดำเนินการไปอย่างไรบ้าง ฝ่ายจัดการอาจจะต้องปรึกษาหารือกับเพื่อนร่วมงานและบางทีก็ปรึกษาหารือกับบุคคลอื่น ๆ เขาอาจจะต้องทำการตรวจสอบ ค้นหาข้อเท็จจริงและดำเนินการวิเคราะห์ เขาอาจจะต้องรวบรวมพลังสร้างสรรค์ และจินตนาการทุกอย่างเพื่อให้ได้มาซึ่งวิธีการแก้ปัญหาวิธีใหม่ เขาอาจจะต้องศึกษาข้อดีและจุดอ่อนของวิถีของการกระทำทุกอย่างที่สมควรจะได้รับการพิจารณา

สิ่งที่ผู้จัดการกำลังดำเนินการอยู่ในขณะนี้ก็คือ การตั้งสมมติฐาน สมมติฐานคืออะไร สมมติฐานก็คือทางแก้ปัญหา เป็นทางแก้ปัญหาที่ดีที่สุดที่ผู้จัดการต้องการ สมมติฐานมักจะเป็นไปในรูปของตัวแบบ (model) ตัวแบบคืออะไร ตัวแบบคือสิ่งที่ใช้แทนหรือสิ่งที่ถอดมาจากสิ่งของหรือสถานการณ์ที่แท้จริง ตัวแบบเป็นสิ่งแสดงความสัมพันธ์และความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันของกริยาและปฏิกิริยาของเหตุและผลในสถานการณ์ที่มีการปฏิบัติงานจริง เราใช้ตัวแบบในการพยากรณ์ ในกรณีที่ฝ่ายจัดการต้องการที่จะคาดคะเนล่วงหน้าว่าถ้าทำการตัดสินใจและกระทำการอย่างใดอย่างหนึ่งไปแล้วอะไรจะเกิดขึ้น ก็อาจนำเอาตัวแบบเข้ามาใช้ได้

ตัวแบบรูปปั้น (Iconic models) เป็นสิ่งที่ใช้แทนวัตถุที่มีอยู่จริงที่มีรูปร่าง (เช่น ตัวแบบของช่างภาพ หรือ ตัวแบบของเครื่องบิน) ซึ่งอาจจะเป็นไปในรูปความนึกคิด (เช่น ตัวแบบของช่างภาพ) หรือใช้มาตราส่วนที่แตกต่างกัน (เช่น ตัวแบบของเครื่องบิน)

แต่ตัวแบบที่เรียกว่าตัวแบบสัญลักษณ์ (symbolic model) เป็นสิ่งที่น่าสนใจกว่าตัวแบบรูปปั้น ตัวแบบรูปปั้นนั้นเป็นรูปธรรม (concrete) แต่ตัวแบบสัญลักษณ์เป็นนามธรรม (abstract) เช่น เส้นอุปสงค์ง่าย ๆ ในวิชาเศรษฐศาสตร์ เป็นตัวแบบสัญลักษณ์ที่ใช้ในการคาดคะเนล่วงหน้าถึงพฤติกรรมของผู้ซื้อในระดับราคาต่าง ๆ สมการเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยการปฏิบัติการ เป็นต้น ตัวแบบอีกอันหนึ่งที่ใช้กันโดยทั่วไปและที่เป็นทางธุรกิจได้แก่ งบกำไรและขาดทุน ผลการปฏิบัติงานของบริษัททั้งปีได้ถูกสรุปไว้บนกระดาษเพียงแผ่นเดียวนี้เพื่อวัดความสำเร็จของการปฏิบัติงาน งบนี้มิได้แสดงให้เห็นการกระทำทุกอย่างที่เกิดขึ้นในระหว่างปีซ้ำอีกครั้งหนึ่ง แต่แสดงผลสุทธิที่เกิดจากกิจกรรมทั้งหมด ทั้งงบกำไรและขาดทุนของปีที่ผ่านไปและงบประมาณสำหรับปีหน้า ต่างก็เป็นตัวแบบทั้งนั้น

แผนภูมิรูปวงกลม (pie chart) ที่แสดงว่าบริษัทได้ใช้จ่ายเงินรายรับจากการขาย 1 บาทอย่างไร ก็เป็นตัวแบบอีกอย่างหนึ่ง แต่เป็นตัวแบบในรูปกราฟ (graphic model) รูปเขียนที่แสดงให้เห็นว่าอะไรจะเกิดขึ้น ถ้ารถยนต์ของท่านเกิดชนกันและท่านไม่ได้รัดเข็มขัดที่นั่งของท่านเป็นตัวแบบรูปภาพ (pictorial model) แผนภูมิการจัดองค์การของธุรกิจแห่งหนึ่งที่แสดงให้เห็นว่ารองประธานฝ่ายผลิตจะต้องรายงานไปยังรองประธานฝ่ายบริหาร และผู้จัดการฝ่ายขายจะต้องรายงานไปยังรองประธานฝ่ายการตลาด ก็เป็นตัวแบบอีกชนิดหนึ่ง

ตัวแบบสัญลักษณ์ที่น่าสนใจโดยปกติมักจะเป็นไปในรูปตัวเลข สัญลักษณ์ หรือคณิตศาสตร์ ตัวแบบทางคณิตศาสตร์มีคุณลักษณะที่ดีหลายประการ ตัวแบบเหล่านี้มีลักษณะรวบรัดและแน่นอน ไม่ทำให้ผู้อ่านแปลความผิดได้ง่าย เราอาจดัดแปลงสัญลักษณ์ของตัวแบบเหล่านี้ได้ง่ายกว่าตัวอักษรและอ่านเข้าใจได้ง่ายกว่า เช่น เรามองและเข้าใจ 273/146 ได้เร็วกว่า "สองร้อยเจ็ดสิบสามหารด้วยหนึ่งร้อยสี่สิบหก"

ผู้ผลิตถ่านไฟฉายตามตัวอย่างข้างต้นได้กำหนดหลักการเบื้องต้นสมมติฐานไว้ดังนี้ : ถ้าเขาสามารถออกแบบภาชนะบรรจุถ่านไฟฉายเพื่อตั้งแสดงในร้านค้าปลีกที่ดี กล่าวคือ เป็นภาชนะซึ่งเป็นที่ยอมรับของพ่อค้าปลีกส่วนใหญ่ที่ขายของใช้ที่ทำด้วยโลหะแล้ว ก็จะมีถ่านไฟฉายวางอยู่ตามร้านค้าปลีกต่าง ๆ มากขึ้นเพื่อขายให้กับผู้บริโภคโดยทั่วไป

4. การทดลอง (Experimentation)

ผู้จัดการจะต้องทดสอบสมมติฐานที่ได้ตั้งไว้ เขาอาจจะยืนยันตามสมมติฐานนั้น หรืออาจจะพบว่าสมมติฐานนั้นใช้ไม่ได้เลยก็ได้ ถ้ามีทางแก้ปัญหาที่อาจจะนำมาใช้ได้ถึงสองทาง เขาก็จะต้องทำการเปรียบเทียบทางแก้ปัญหาทั้งสองนั้น

ผู้ผลิตถ่านไฟฉายตามตัวอย่างของเราได้ดำเนินการทดลอง 2 ทาง กล่าวคือ เขาได้ออกแบบภาชนะบรรจุถ่านไฟฉายตั้งโต๊ะ 2 แบบ คือแบบ A และแบบ B และแจกจ่ายให้แก่ผู้ค้าปลีกต่าง ๆ อย่างละ 250 อัน แบบ A เป็นถาดแบน ๆ สำหรับวางไว้บนโต๊ะ มีสีสันสวยงามและน่ารักมาก แต่ผู้ค้าปลีกที่ได้รับแบบ A ทั้ง 250 คนไม่ค่อยชอบแบบนี้นัก เพราะปรากฏว่าแบบนี้กว้างเกินไป สิ้นเปลืองเนื้อที่มาก ต่อมาได้กลายเป็นที่วางผลิตภัณฑ์ชนิดอื่น ๆ อีกหลายอย่าง แบบ B เป็นหีบห่อที่เอียงลาด ซึ่งอาจดัดแปลงจากกล่องส่งของได้โดยง่าย กล่องส่งของนี้บรรจุถุงพลาสติกโปลีทีลีนเล็ก ๆ 24 ถุง ซึ่งแต่ละถุงห่อถ่านไฟฉายไว้ 2 ก้อน แบบ B นี้แคบกว่าแบบ A และเหมาะที่จะติดเข้าไปกับเครื่องตกแต่งของร้านค้าโดยทั่วๆ ไป และความเอียงลาดทำให้เห็นสิ่งที่บรรจุอยู่ได้ดีกว่า แบบ B จึงเป็นที่ยอมรับและใช้กันโดยทั่วไป

5. การพิสูจน์ (Verification)

สำหรับงานขั้นสุดท้ายของระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์ ผู้จัดการจะต้องพิสูจน์ (หรือไม่สามารถที่จะพิสูจน์) ข้อสรุปที่ได้จากการทดลอง การทดลองมักจะทำไปภายในขอบเขตจำกัดโดยใช้ตัวอย่างเพียงจำนวนหนึ่งเท่านั้น ดังเช่นในกรณีภาชนะบรรจุถ่านไฟฉายที่นำไปแสดงไว้ตามร้านค้าปลีกต่าง ๆ ในสภาพการณ์เช่นนั้น การพิสูจน์อาจจะเป็นเรื่องที่เกี่ยวพันไปถึงกลุ่มทั้งกลุ่ม หรือถ้าจะพูดอย่างนักสถิติก็คือประชากรทั้งหมดนั่นเอง

บุคคลส่วนมากมักจะเข้าใจว่าการวิจัยของสาขาวิชาวิทยาศาสตร์กายภาพต่าง ๆ เช่น พีสิกส์ ธรณีวิทยา และเคมี เป็นการวิจัยซึ่งเป็นไปตามหลักวิทยาศาสตร์ ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น

ทั้งนี้เพราะว่าเราสามารถควบคุมสภาวการณ์ต่าง ๆ ภายในห้องทดลอง การทดลองที่ได้กระทำไปภายในห้องทดลองแห่งหนึ่งอาจทำซ้ำอีกครั้งหนึ่งในห้องทดลองอีกแห่งหนึ่งได้ เพราะเราสามารถที่จะควบคุมตัวแปรผันต่าง ๆ ได้ แต่การทดลองทางธุรกิจไม่เหมือนกับการทดลองทางด้านวิทยาศาสตร์ ผู้จัดการต้องติดต่อเกี่ยวข้องกับบุคคลต่าง ๆ หลายฝ่าย และบุคคลเหล่านี้ก็มิได้มีมาตรฐานหรืออยู่ในลักษณะเดียวกัน ดังเช่นกรณีเหล็กกล้า 1 ตัน ผู้จัดการไม่อาจคาดคะเนล่วงหน้าหรือควบคุมตัวแปรผันต่าง ๆ อาทิ เช่น การกระทำของรัฐบาล ปฏิกิริยาจากคู่แข่งขันและพฤติกรรมการซื้อของผู้บริโภค ฯลฯ ได้อย่างถูกต้องและมีประสิทธิผลดังเช่นตัวแปรผันทางกายภาพในห้องทดลอง

ผู้ผลิตถ่านไฟฉายตามตัวอย่างของเราจึงได้เสนอแบบให้แก่ผู้ค้าปลีกทั้งหมด ปรากฏว่าเป็นที่ยอมรับและนำไปใช้กันโดยทั่วไป

สรุป

เราได้พิจารณางานทั้ง 5 ขั้นที่ประกอบขึ้นเป็นระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์แล้ว ในขั้นแรก ผู้จัดการจะต้องสังเกตสิ่งใดสิ่งหนึ่ง หรือสถานการณ์อย่างใดอย่างหนึ่ง เพื่อค้นปัญหาที่อาจกระทบกระเทือนในทางไม่ดีต่อการดำเนินงาน ขั้นที่สอง ถ้าค้นพบปัญหาจะต้องทำการพิสูจน์เพื่อไม่ให้มีข้อสงสัยและกำหนดปัญหาให้เฉพาะเจาะจงลงไป ขั้นที่สาม คิดหาทางแก้ปัญหา ทางแก้ปัญหาเหล่านี้รวมเรียกว่าสมมติฐานหรือหลักการเบื้องต้น ขั้นที่สี่ ผู้จัดการจะทำการทดลองตัดวิถีการกระทำที่ใช้ไม่ได้ออกทันที และทำการเปรียบเทียบวิถีทางการกระทำที่เหลืออยู่ ขั้นที่ห้าซึ่งเป็นงานขั้นสุดท้าย ผู้จัดการจะต้องดำเนินการพิสูจน์การเลือกทางแก้ปัญหาที่ตนได้ทำไปแล้ว

งานในระยะเริ่มแรกทางด้านการจัดการ

ความเจริญก้าวหน้าของมนุษย์ในระยะสองสามศตวรรษที่ผ่านไปนี้อาจกล่าวได้ว่า สืบเนื่องมาจากการนำเอาระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์เข้ามาแก้ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งแต่เดิมเคยถูกครอบคลุมโดยขนบธรรมเนียม ความเฉื่อยและประเพณีที่ถือปฏิบัติสืบต่อกันมา ในปัจจุบันนี้ได้มีการนำระเบียบวิธีการทางวิทยาศาสตร์ซึ่งเดิมเป็นเรื่องเกี่ยวกับธรรมชาติวิทยามากกว่าปฏิบัติงาน มาใช้ประโยชน์ทางด้านการจัดการมากขึ้น ๆ ตามลำดับ เช่น การวางแผน การจัดองค์การ และการควบคุมการปฏิบัติงาน

วิศวกรรมอุตสาหกรรม เริ่มมีขึ้นเมื่อมีการนำระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์เข้ามาใช้กับปัญหาเกี่ยวกับการจัดการ แต่จะเริ่มเมื่อใดนั้นยังไม่ทราบแน่ หลักฐานต่าง ๆ ที่แสดงให้เห็นว่าได้มีการนำหลักการสำคัญของระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์ไปใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาการจัด

การ ปรากฏอยู่ตามบทความและหนังสือต่าง ๆ ที่เขียนขึ้นเมื่อหลายพันปีก่อน เจโธร (Jethro) ซึ่งเป็นพ่อตาของ โมเซส (Moses) ได้เขียนเกี่ยวกับหลักการจัดองค์การไว้ในบทที่ 18 ของหนังสือ "Book of Exodus" ต่อมา (ค.ศ. 1832) ชาร์ลส์ แบบบาจ (Charles Babbage) ได้เขียน On the Economy of Machinery and Manufactures แสดงว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องวิศวกรรมอุตสาหกรรมเป็นอย่างดี

ในตอนปลายศตวรรษที่ 19 เฟรดเดอริค ดับบลิว เทย์เลอร์ (Frederick W. Taylor) ได้เปลี่ยนวิศวกรรมอุตสาหกรรมให้กลายมาเป็นวิชาชีพอย่างหนึ่ง และอาจจะเรียกได้ว่าเป็นบิดาแห่งการจัดการตามหลักวิทยาศาสตร์ การศึกษาการใช้พลั่วที่ลือชื่อของ เทย์เลอร์ เป็นตัวอย่างที่ดีตัวอย่างหนึ่งในการนำระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์เข้ามาใช้กับปัญหาของฝ่ายจัดการเกี่ยวกับประสิทธิภาพในการทำงานของคนตักสินแร่ ฝ่ายจัดการมักจะตั้งข้อสมมติไว้ว่าพลั่วใหญ่ที่สุดที่คนงานสามารถจะตักและถือได้เป็นขนาดของพลั่วที่จะทำให้ได้ผลงานมากที่สุด แม้ว่าข้อสมมตินี้ดูคล้ายจะเป็นข้อสมมติที่สมเหตุสมผล เทย์เลอร์ ก็ยังสงสัยอยู่ จึงได้ออกแบบการทดลองที่ต่อเนื่องกันหลายครั้งเพื่อพิสูจน์ว่าข้อสมมตินี้ถูกต้องหรือไม่ หลังจากที่ได้ทดสอบตัวแปรผันต่าง ๆ ทั้งหมดที่เห็นว่ามีส่วนเกี่ยวข้องแล้ว เทย์เลอร์ได้ลงความเห็นว่า ตัวแปรผันที่มีความสำคัญมีอยู่เพียงตัวเดียว กล่าวคือน้ำหนักรวมของพลั่วและสิ่งที่บรรจุอยู่ในพลั่วนั้น ๆ ถ้าน้ำหนักบนพลั่วมีมากเกินไป คนงานจะเหนื่อยเร็วและเคลื่อนไหวช้าลง ถ้าน้อยเกินไปคนงานจะต้องเดินไปกลับหลายครั้ง สำหรับ "คนงานชั้นหนึ่ง" น้ำหนักบรรทุกที่เหมาะสมควรจะเท่ากับปริมาณ 20 ปอนด์ เนื่องจากว่าสินแร่มีความหนาแน่นแตกต่างกันมาก จึงต้องออกแบบพลั่วต่าง ๆ สำหรับสินแร่แต่ละชนิด เพื่อว่าเมื่อใช้พลั่วนั้นในการตักสินแร่เต็มพอดีจะได้น้ำหนักตามที่ต้องการ เมื่อได้มีการเปลี่ยนแปลงแล้วปรากฏว่า ประสิทธิภาพในการทำงานของคนงานเพิ่มสูงขึ้นมาก

บุคคลอีกคนหนึ่งในยุคการจัดการตามหลักวิทยาศาสตร์ระยะเริ่มแรก ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีจากผลงานของเขาทางด้านการวางหมายกำหนดการผลิต ได้แก่ เฮนรี่ แอล แกนต์ (Henry L. Gantt) วิธีวางหมายกำหนดการทำงานก่อนหน้า แกนต์ ได้ทำไปแบบตามบุญตามกรรม ตัวอย่างเช่น งานอย่างหนึ่งซึ่งจะต้องทำโดยเครื่องจักร อาจผ่านขั้นการผลิตขั้นหนึ่งไปโดยไม่มีความยุ่งยากแต่อย่างใด แต่ต้องรอคอยอีกเป็นเวลาหลายวันกว่าจะถูกส่งเข้าไปในศูนย์เครื่องจักรศูนย์ถัดไป แกนต์ได้วาดผังแสดงการเคลื่อนที่ของงานจากเครื่องจักรเครื่องหนึ่งไปสู่เครื่องจักรอีกเครื่องหนึ่ง โดยพยายามให้มีการหยุดชะงักน้อยที่สุด เราอาจจะวางแผนงานต่าง ๆ ที่จะป้อนเข้าสู่เครื่องจักรเป็นการล่วงหน้าหลาย ๆ เดือนได้โดยอาศัยวิธีการของแกนต์ และสามารถกำหนดวันที่ที่จะส่งมอบได้อย่างถูกต้องใกล้เคียงมาก เทย์เลอร์ สนใจเกี่ยวกับ "วิธีที่ดีที่สุดวิธีเดียว" ในการทำงานอย่างใดอย่างหนึ่งให้สำเร็จ แต่ แกนต์ มองปัญหาจากทัศนะที่กว้างกว่า

กล่าวคือ เขาได้พิจารณาด้านต่าง ๆ หรือขั้นต่าง ๆ ในการปฏิบัติงานตั้งแต่เริ่มแรกจนเสร็จสิ้นงานนั้น ๆ

การหันความสนใจจากเรื่องปลีกย่อยของฝ่ายจัดการ ไปสู่การพิจารณาที่กว้างขวางกว่านี้ ความจริงก็คือการโยกย้ายการเน้นหนักทางด้านวิศวกรรมอุตสาหกรรม มาสู่การวิจัยการปฏิบัติการ (Operations research) เราอาจกล่าวได้ว่าการวิจัยการปฏิบัติการได้เป็นวิชาการที่แยกต่างหากอีกแขนงหนึ่งเมื่อ (1) วิศวกรอุตสาหกรรมมีความสนใจในการปฏิบัติงานโดยทั่วไปของธุรกิจ และ (2) นักวิทยาศาสตร์ด้านธรรมชาติวิทยาและสังคมศาสตร์มีความสนใจในปัญหาของฝ่ายจัดการ

การวิจัยการปฏิบัติการในระยะเริ่มแรก

ในระหว่างสงครามโลกครั้งที่ 1 โทมัส เอดิสัน (Thomas Edison) ได้ทำงานบางอย่างซึ่งอาจเรียกได้ในปัจจุบันนี้ว่าเป็นการวิจัยการปฏิบัติการ เขาได้รับมอบหมายจากกองทัพเรือให้ช่วยแก้ปัญหาว่า ถ้าจะทำให้ความเสียหายทางด้านการขนส่งที่เกิดจากเรือดำน้ำของฝ่ายข้าศึกอยู่ในระดับต่ำที่สุด ควรจะให้เรือสินค้าเดินไปตามเส้นทางใดจึงจะได้ผลที่สุด ในการทำงานชิ้นนี้ เขาได้ใช้ “ผังเกมยุทธวิธี” (Tactical game board) ไม่ใช่นำเรือไปเสี่ยงต่อการทดลองจริง ๆ

งานในระยะเริ่มแรกอีกอย่างหนึ่ง ซึ่งอาจถือได้ว่าเป็นการวิจัยการปฏิบัติการ ได้นำไปสู่ทางแก้ปัญหาด้านโทรศัพท์ในปี 1917 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวเดนมาร์ก ชื่อ เอ เค เออร์ลาง (A.K. Erlang) สูตรของเขาในปัจจุบันนี้ยังคงใช้กันโดยทั่วไปในการวางแผนอุปกรณ์วงจรไฟฟ้า และความเคลื่อนไหวเข้าออกตามชุมสายโทรศัพท์ ผลงานเริ่มแรกของเออร์ลาง เป็นรากฐานของเทคนิคทางคณิตศาสตร์หลายอย่างที่ใช้อยู่ในขณะนี้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการวางแผนอุปกรณ์ต่าง ๆ

ก่อนสงครามโลกครั้งที่ 2 แฮแรซ ซี เลวินสัน (Harace C. Levinson) นักวิทยาศาสตร์ทางด้านธรรมชาติวิทยา ได้นำความสามารถในการวิเคราะห์ของเขาเข้าไปใช้กับปัญหาของฝ่ายจัดการ เดิม เลวินสัน เป็นนักดาราศาสตร์ และได้ไปทำงานกับบริษัทแอล แบมเบอร์เกอร์ (L. Bamberger & Co.) ในช่วงปี 1930–1939 เขาได้ทำการทดลองเกี่ยวกับปฏิกิริยาของลูกค้าหลายครั้ง และได้นำเอาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งเข้ามาใช้ในกรณีที่มีข้อมูลจำนวนมาก ซึ่งถ้ามิฉะนั้นแล้วก็มิอาจจัดการอย่างใดอย่างหนึ่งกับข้อมูลที่มีอยู่ได้

การศึกษาของ เลวินสัน ที่เป็นที่รู้จักกันมากเป็นเรื่องเกี่ยวกับลูกค้าที่ปฏิเสธไม่ยอมรับห่อ พ.ก.ง. ที่สั่งซื้อจากบริษัทขายสินค้าทางไปรษณีย์ (mail-order house) ขนาดเล็กแห่งหนึ่ง การปฏิเสธไม่ยอมรับสินค้าที่สั่งซื้อ โดยถัวเฉลี่ยมีมากกว่าร้อยละ 30 ของยอดขายขั้นต้นและ

มีผลกระทบกระเทือนต่อกำไรที่ได้รับ ทั้งนี้เกิดจากเหตุผลที่ชัดแจ้งบ้างและที่ไม่ค่อยชัดแจ้งบ้าง จากผลของการศึกษาปรากฏว่าตัวแปรผันที่สำคัญมีอยู่ 2 อย่าง ประการแรกและเป็นสิ่งที่ทุกคนทราบดีอยู่แล้วว่าคำสั่งซื้อที่มีจำนวนเงินสั่งซื้อยิ่งสูงเพียงใด โอกาสที่จะถูกปฏิเสธก็ยิ่งมีมากเพียงนั้น ปัจจัยประการที่สองเป็นเรื่องที่อาจดำเนินการแก้ไขได้ง่ายกว่า จากการวิเคราะห์ตัวอย่างคำสั่งซื้อจำนวนมาก ปรากฏว่าช่วงระยะเวลาระหว่างการรับคำสั่งซื้อและการส่งสินค้าไปให้แก่ผู้สั่งซื้อเป็นปัจจัยที่มีความสำคัญมาก การส่งสินค้าหลังจากที่ได้รับคำสั่งซื้อแล้ว 5 วันมักจะไม่ค่อยได้ผล โดยถัวเฉลี่ยคำสั่งซื้อที่มีอายุเกิน 5 วันไม่คุ้มทุน จากข้อเท็จจริงนี้จึงควรมีการเปรียบเทียบต้นทุนที่เกิดจากการปฏิเสธสินค้าที่ส่งไปให้กับต้นทุนที่เกิดจากการส่งสินค้าให้เร็วขึ้น และกำหนดเวลาการส่งสินค้าที่ดีที่สุด

หลังสงครามโลกครั้งที่ 2 ได้มีการก่อตั้งกลุ่มนักวิจัยหลายกลุ่ม เพื่อทำงานต่าง ๆ ที่เรียกในปัจจุบันนี้ว่าการวิจัยการปฏิบัติงาน ในตอนปลายของช่วงปี 1930—1939 นักวิทยาศาสตร์จำนวนหนึ่งทำงาน (1) เกี่ยวกับเรื่องเรดาร์และการประสานงานร่วมกับผู้สังเกตการณ์ที่ปฏิบัติงานอยู่บนพื้นดิน (2) ให้แก่กองทัพอากาศของประเทศอังกฤษ (3) โดยทำงานแยกต่างหากจากกันหรือร่วมกัน ในปี 1939 ผู้อำนวยการของศูนย์การวิจัยด้านโทรคมนาคม (Telecommunication Research Establishment) ได้รวบรวมนักวิทยาศาสตร์จำนวนหนึ่งมาทำงานร่วมกันในส่วนวิจัย และถือว่านี่เป็นจุดเริ่มของการรวมกลุ่มการวิจัยการปฏิบัติการกลุ่มแรก

หลังจากนั้นไม่นาน ได้มีการจัดตั้งกลุ่มวิจัยของหน่วยต่อต้านอากาศยาน (Anti-Aircraft Command Research Group) เพื่อศึกษาปัญหาการต่อต้านการโจมตีทางอากาศ กลุ่มวิจัยการปฏิบัติการกลุ่มนี้ประกอบด้วยนักวิทยาศาสตร์ 11 คน ซึ่งมาจากสาขาวิชาต่าง ๆ และในไม่ช้าก็เป็นที่รู้จักกันในชื่อว่า "Blackett's Circus" กลุ่มนักวิทยาศาสตร์กลุ่มนี้ได้ช่วยแก้ปัญหาทางทหารหลายอย่างและได้ขยายตัวแยกเป็นกลุ่มทหารเรือและทหารบก ดังนั้น ในระยะแรกของสงครามโลกครั้งที่ 2 ทหารทั้งสามเหล่าของอังกฤษต่างก็มีกลุ่มวิจัยการปฏิบัติการซึ่งรับผิดชอบเกี่ยวกับการวิจัยทางทหารอย่างจริงจัง ประเทศสัมพันธมิตรอื่น ๆ รวมทั้งสหรัฐอเมริกาเห็นว่ากลุ่มต่าง ๆ ดังกล่าวทำงานได้ผลดี จึงได้ยืมเอาความคิดนี้มาใช้ การนำการวิจัยการปฏิบัติการไปใช้ในประโยชน์ระหว่างสงครามที่น่าสนใจอีกอย่างหนึ่งคือ การแปรขบวนเรือรบที่คุ้มกันขบวนเรือสินค้าเป็นแถวหน้ากระดาน เพื่อทำให้ความเสียหายที่เกิดจากเรือดำน้ำของข้าศึกอยู่ในระดับต่ำที่สุด

เมื่อสงครามยุติลงแล้ว การวิจัยการปฏิบัติการฝ่ายพลเรือนในอังกฤษได้รุดหน้าไปเร็วกว่าในสหรัฐฯ เศรษฐกิจของอังกฤษอยู่ในสภาพที่โทรมมาก เครื่องมืออุปกรณ์ถูกใช้งานอย่างหนัก โรงงานต่าง ๆ ถูกระเบิดและดุลการชำระเงินอยู่ในสภาพล่อแหลมมาก การให้คำปรึกษาทางด้านการจัดการยังไม่เคยเป็นที่รู้จักกันในอังกฤษ เมื่อเป็นเช่นนี้ผู้จัดการในอังกฤษจึงเต็มใจ

ที่จะยอมทดลองสิ่งใหม่ ๆ เพื่อเพิ่มพูนประสิทธิภาพในการผลิตและกำไร ผู้จัดการเหล่านี้ได้หันมาใช้วิธีการที่ใหม่ที่สุดในประเทศของตน นั่นก็คือการวิจัยการปฏิบัติการ

ในสหรัฐอเมริกา ปฏิกิริยาที่มีต่อการวิจัยการปฏิบัติการแตกต่างไปจากที่เป็นอยู่ในอังกฤษมาก การให้คำปรึกษาทางด้านการจัดการในสหรัฐ ฯ ได้เริ่มอย่างน้อยที่สุดตั้งแต่สมัยเทย์เลอร์ และผู้จัดการได้มีโอกาสเห็นสิ่งใหม่ ๆ แปลก ๆ ที่เป็นที่นิยมกันอยู่ชั่วขณะหนึ่ง แล้วก็เสื่อมความนิยมไป การติดต่อสื่อสารระหว่างผู้จัดการกับนักวิทยาศาสตร์เป็นเรื่องยุ่งยากมาก (ซึ่งตรงกันข้ามกับการติดต่อสื่อสารระหว่างผู้จัดการกับที่ปรึกษา) เพราะว่าต่างฝ่ายต่างก็พูดภาษาของตน ข้อความเล็ก ๆ น้อย ๆ ที่นักวิทยาศาสตร์พอจะทำให้ผู้จัดการเข้าใจได้บ้างก็ดูคล้ายกับว่า ไม่ใช่สิ่งที่ได้มีการคิดค้นขึ้นมาใหม่เลย และผู้จัดการมีความโน้มเอียงที่จะหันไปพึ่งสำนักงานให้คำปรึกษาที่มีอยู่ ให้ทำการวิจัยตามที่นักวิทยาศาสตร์แนะนำ นอกจากนี้ในสายตาของผู้จัดการบางคนยังมีความรู้สึกว่า นักวิทยาศาสตร์ไม่น่าเชื่อถือได้โดยสิ้นเชิงหรือไม่น่านับถือ

หลังจากที่บริษัทบางแห่งที่มีความกล้าพอได้ลองนำเอาการวิจัยการปฏิบัติการเข้ามาใช้โดยได้รับความสำเร็จพอสมควร และเริ่มมีคนทราบถึงความสำเร็จของการวิจัยการปฏิบัติการในระหว่างสงครามโลกครั้งที่ 2 การวิจัยการปฏิบัติการทางฝ่ายพลเรือนจึงเริ่มรุดหน้าไปอย่างจริงจังในสหรัฐอเมริกา นักวิทยาศาสตร์และผู้จัดการเริ่มเรียนรู้วิธีที่จะทำให้การติดต่อสื่อสารระหว่างบุคคลทั้ง 2 ฝ่ายเข้าใจกันดียิ่งขึ้น

การวิจัยการปฏิบัติการในปัจจุบัน

คำว่าการวิจัยการปฏิบัติการ (operations research) ในปัจจุบันนี้หมายถึงระเบียบวิธีการทางวิทยาศาสตร์ การหาทางแก้ปัญหาเกี่ยวกับการปฏิบัติหน้าที่ หรือการปฏิบัติงานของหน่วยงานบางอย่าง อาทิเช่น หน่วยงานทางธุรกิจ รัฐบาลหรือสถาบัน โดยอาศัยฝ่ายจัดการจะมอบหมายให้ผู้ทำหน้าที่ในการวิจัยการปฏิบัติงาน จัดหาหลักเกณฑ์เชิงปริมาณเพื่อใช้ประกอบการตัดสินใจ หลักเกณฑ์เหล่านี้ช่วยให้ฝ่ายจัดการสามารถทำการตัดสินใจดีที่สุด และกำหนดทางแก้ปัญหาที่ดีที่สุดให้กับปัญหาทางด้านปฏิบัติงาน กล่าวอย่างสั้น ๆ ผู้จัดการประสงค์ที่จะให้นักวิจัยการปฏิบัติการทำการวิเคราะห์ปัญหาของฝ่ายจัดการที่เกี่ยวกับการปฏิบัติงานของระบบต่าง ๆ รวบรวมข้อมูลที่สำคัญ ตีความข้อมูลเหล่านั้น สร้างตัวแบบหนึ่งหรือหลายแบบ ทำการคำนวณและทดลองตัวแบบเหล่านั้น และประการสุดท้ายคาดคะเนล่วงหน้าและทำข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการปฏิบัติงานในอนาคต

ผู้ชำนัญพิเศษด้านวิจัยการปฏิบัติการไม่ได้เข้ามาแทนที่ผู้จัดการ หรือรับช่วงความรับผิดชอบในการตัดสินใจไปจากผู้จัดการ บทบาทที่ถูกต้องของผู้ชำนัญพิเศษ และผู้จัดการทำงานร่วมกันอย่างมีประสิทธิผลที่สุดแล้ว ผู้จัดการจำเป็นต้องเข้าใจเครื่องมือเชิงปริมาณบางอย่างที่ผู้ชำนัญพิเศษนำมาใช้ ผู้จัดการจะต้องมีความเข้าใจอย่างพอเพียง สามารถที่จะอธิบายปัญหาที่เกิดขึ้น และจัดหาข้อเลขที่จำเป็นต่อการหาทางแก้ปัญหานั้น แต่ไม่จำเป็นจะต้องคุ้นกับความสลับซับซ้อนทางด้านการคำนวณ ซึ่งเป็นเรื่องของนักวิจัยการปฏิบัติการ

ลักษณะสำคัญของการวิจัยการปฏิบัติการที่ควรจะนำมากล่าวอย่างสั้นๆ มีอยู่ 2 ประการ คือวิธีการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม (Team approach) และความกว้างขวางของขอบเขตการทำงาน (Breadth of scope)

1. **วิธีการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม** ในการวิจัยการปฏิบัติการ การหาทางแก้ปัญหาดำเนินไปโดยกลุ่มบุคคลกลุ่มหนึ่งที่มีคุณสมบัติต่าง ๆ กัน แทนที่จะกระทำโดยนักวิจัยคนใดคนหนึ่ง หรือโดยกลุ่มนักวิจัยกลุ่มหนึ่งที่มีคุณสมบัติเหมือนกัน กลุ่มวิจัยการปฏิบัติการกลุ่มหนึ่งอาจจะประกอบด้วย นักสถิติคนหนึ่ง นักคณิตศาสตร์คนหนึ่ง นักจิตวิทยาคนหนึ่ง นักบัญชีคนหนึ่ง และวิศวกรอีกคนหนึ่ง ส่วนประกอบของกลุ่มจะเปลี่ยนแปลงไปตามลักษณะของปัญหาที่มีอยู่ในขณะนั้นและวัตถุประสงค์ของการวิจัย โดยอาศัยนักวิจัยที่มาจากสาขาวิชาต่าง ๆ ฝ่ายจัดการก็จะมีเทคนิคการวิเคราะห์ที่อาจนำมาใช้กับปัญหา และจากข้อเท็จจริงปรากฏว่าตัวแบบจากแขนงวิชาอื่น ๆ อาจนำมาปรับใช้กับการจัดการทางธุรกิจได้ เนื่องจากบุคคลที่มาจากสาขาวิชาที่แตกต่างกัน อาจแลกเปลี่ยนและปรุงแต่งความคิดของอีกฝ่ายหนึ่งให้เฟื่องยิ่งขึ้น เพราะฉะนั้นบุคคลเหล่านี้จึงสามารถพัฒนาเทคนิคการวิเคราะห์ และนำเทคนิคที่ดีที่สุดมาปรับใช้กับปัญหาแต่ละปัญหา นักวิจัยจะต้องคอยค้นหาตัวแบบที่ดีกว่าอยู่เสมอ

ผู้จัดการบางคนยังมีความสงสัยในกลุ่มวิจัยการปฏิบัติการอันเนื่องมาจากเหตุผล 2 อย่าง (1) บางคนตั้งข้อสมมติว่ากลุ่มเหล่านี้ทำหน้าที่เหมือนคณะกรรมการ เมื่อเป็นเช่นนี้จึงมีข้อบกพร่องและจุดอ่อนเช่นเดียวกับคณะกรรมการ (2) บางคนเกรงว่ากลุ่มเหล่านี้จะเข้ามาทำการตัดสินใจแทนฝ่ายจัดการ อันอาจจะเป็นอันตรายต่อสถานะของผู้จัดการและแย่งเอางานของผู้จัดการไป ข้อสงสัยทั้งสองยังไม่เป็นที่รับรองกัน

ผู้จัดการบางคนก็มีความสงสัยในนักวิทยาศาสตร์การวิจัยการปฏิบัติการ เกรงว่าบุคคลเหล่านี้เป็นแต่เพียงนักทฤษฎีและไม่แยแสกับเรื่องปริมาณการขายต้นทุนและกำไรเลย ความจริงกลับตรงกันข้าม นักวิจัยเหล่านี้มีความสนใจในเรื่องการปฏิบัติงาน การปฏิบัติหน้าที่และเป็นบุคคลที่เอาจริงเอาจัง การวิจัยการปฏิบัติการเป็นวิทยาศาสตร์ประยุกต์ที่อาจนำมาปรับกับปัญหาการปฏิบัติงานได้

2. **ความกว้างขวางของขอบเขตการทำงาน** ในกรณีที่เป็นไปได้ การวิจัยการปฏิบัติการพิจารณาปัญหาต่าง ๆ จากทัศนะของธุรกิจหรือบริษัทนั้น ๆ โดยส่วนรวม ไม่พิจารณาปัญหาจากทัศนะของแผนกหรือส่วนงาน การวิจัยการปฏิบัติการให้ความสนใจ และมองหน่วยงานที่เกิดปัญหาในฐานะที่เป็นระบบ ๆ หนึ่งที่มีจุดมุ่งหมายร่วมกัน ไม่ใช่ในฐานะที่เป็นแผนกหลายแผนก หรือส่วนงานหลายส่วนที่ทำงานร่วมกันในลักษณะที่มีการร่วมมือกันบ้าง กล่าวอีกนัยหนึ่ง การวิจัยการปฏิบัติการสนใจในเรื่องที่ว่าทำอย่างไรบริษัทจึงจะได้รับประโยชน์สูงสุด ไม่ใช่แผนกขายหรือแผนกผลิตได้รับประโยชน์สูงสุด

วิศวกรอุตสาหกรรมอาจจะมีวิธีการแก้ปัญหาการผลิตในลักษณะที่คล้ายกับสิ่งที่เราจะกล่าวต่อไปนี้

> ลูกค้าของเราได้สั่งซื้อผลิตภัณฑ์ Y เป็นจำนวน X วิธีการที่เร็วที่สุด ถูกที่สุดและดีที่สุดในการผลิตผลิตภัณฑ์จำนวนดังกล่าวจะทำได้อย่างไร ?

การวิจัยการปฏิบัติการอาจจะมีวิธีการแก้ปัญหาในลักษณะดังนี้

> เราสามารถผลิตผลิตภัณฑ์ชนิด A B และ C ผลิตภัณฑ์แต่ละหน่วยต้องใช้ส่วนหนึ่งของกำลังผลิต และปัจจัยแปรผันต่าง ๆ ที่ทราบล่วงหน้า และขายได้ในราคาหนึ่งที่กำหนดไว้ เราควรจะทำการผลิตและขายผลิตภัณฑ์ A B และ C อย่างละเท่าไรจึงจะได้กำไรสูงสุด ?

ปัญหาสมมติเกี่ยวกับการผลิตเพลาข้อเหวี่ยง

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่าง ๆ หนึ่งเกี่ยวกับปัญหาชนิดหนึ่งที่มักจะเกิดขึ้นกับผู้จัดการ สมมติว่าเราเป็นผู้จัดการของโรงกลึงแห่งหนึ่ง และมีผู้ผลิตเครื่องจักรขนาดเล็กคนหนึ่งสนใจที่จะซื้อเพลาข้อเหวี่ยงจากเรา ผู้ผลิตคนนี้ต้องการซื้อไว้เป็นของคงคลังและยอมรับซื้อเพลาข้อเหวี่ยงสำหรับเครื่องตัดหญ้าไม่เกิน 175 ชิ้น เพลาข้อเหวี่ยงสำหรับรถจักรยานยนต์ไม่เกิน 65 ชิ้น และเพลาข้อเหวี่ยงสำหรับรถกอล์ฟไม่เกิน 160 ชิ้น ผู้ผลิตเสนอซื้อเพลาข้อเหวี่ยงเครื่องตัดหญ้าในราคาชิ้นละ 15.75 บาท เพลาข้อเหวี่ยงรถจักรยานยนต์ชิ้นละ 24.50 บาท และเพลาข้อเหวี่ยงรถกอล์ฟชิ้นละ 20 บาท

ต้นทุนวัตถุดิบกะประมาณสำหรับเพลาข้อเหวี่ยงทั้ง 3 ชนิดเท่ากับ 1 บาท 6 บาทและ 5.50 บาทตามลำดับ เพลาข้อเหวี่ยงเหล่านี้จะต้องผ่านศูนย์เครื่องจักร 3 ศูนย์ซึ่งเราคาดว่าในอนาคตอันใกล้นี้คงไม่มีคำสั่งซื้ออื่น ศูนย์เครื่องจักรแรกคือ แผนกหลอม ซึ่งมีจำนวนชั่วโมงอยู่ 360 ชั่วโมง ต้นทุนแรงงานทางตรงของแผนกนี้เท่ากับ 2.25 บาทต่อชั่วโมง ศูนย์ถัดไป

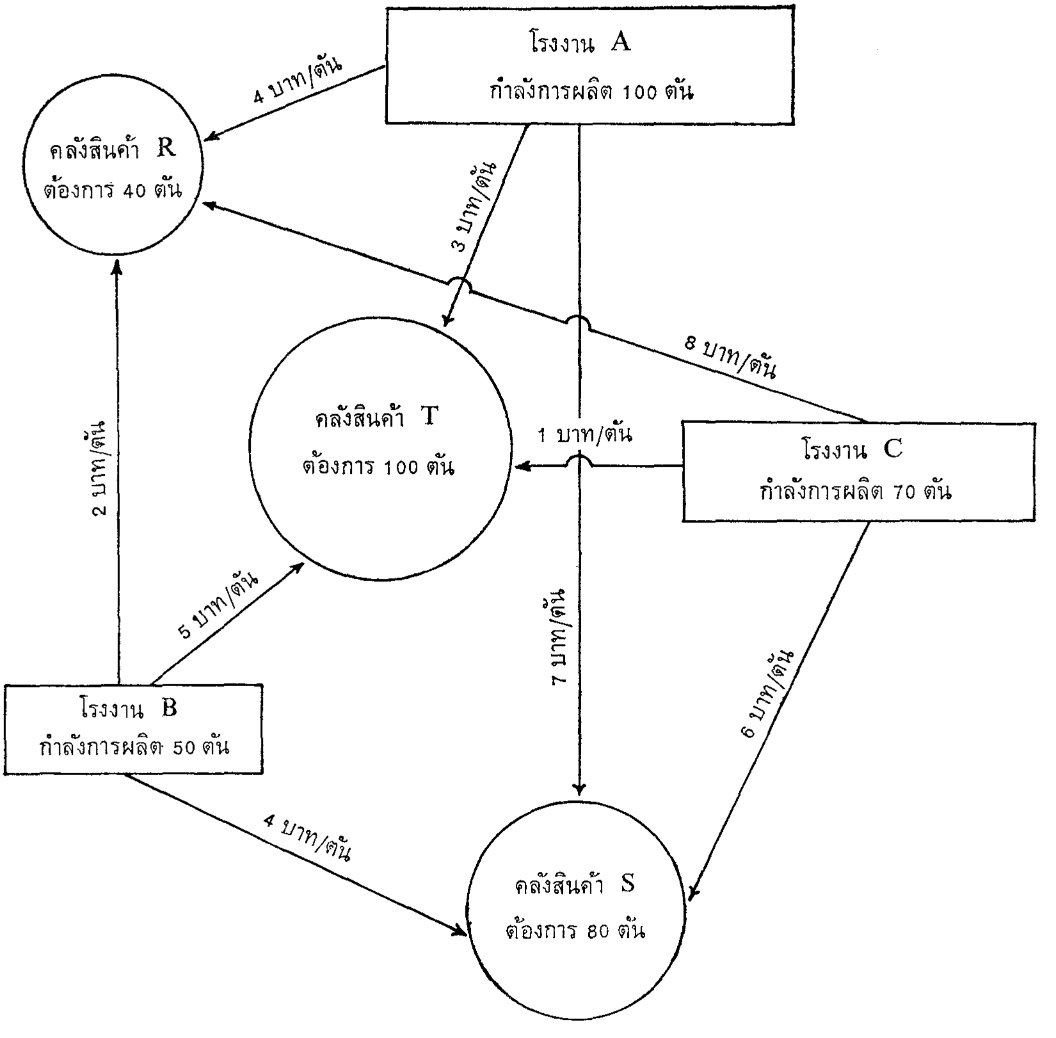
คือ แผนกกลึง ซึ่งมีชั่วโมงเครื่องจักรอยู่ 240 ชั่วโมง ต้นทุนแรงงานทางตรงของแผนกนี้เท่ากับ 2.50 บาทต่อชั่วโมง ศูนย์สุดท้ายคือแผนกขัด ต้นทุนแรงงานทางตรงสำหรับแผนกนี้เท่ากับ 1.50 บาทต่อชั่วโมง ชั่วโมงเครื่องจักรที่มีอยู่ 480 ชั่วโมง

จากประสบการณ์เกี่ยวกับการผลิตเพลาข้อเหวี่ยงในอดีต เราทราบจำนวนชั่วโมงเครื่องจักรที่ต้องใช้ในการผลิตเพลาข้อเหวี่ยงแต่ละชนิด เพลาข้อเหวี่ยงเครื่องตัดหญ้าแต่ละชิ้นต้องใช้ 3 ชั่วโมงในแผนกหลอม 2 ชั่วโมงในแผนกกลึงและ 1 ชั่วโมงในแผนกขัด เพลาข้อเหวี่ยงรถจักรยานยนต์แต่ละชิ้นต้องใช้ 4 ชั่วโมงในแผนกหลอม 2 ชั่วโมงในแผนกกลึง และ 3 ชั่วโมงในแผนกขัด เพลาข้อเหวี่ยงรถกอล์ฟแต่ละชิ้นต้องใช้ 2 ชั่วโมงในแต่ละแผนก ปัญหาที่เกิดขึ้นคือ เราควรจะผลิตเพลาข้อเหวี่ยงทั้ง 3 ชนิดดังกล่าวชนิดละเท่าไร จึงจะได้กำไรสูงสุด ?

ถ้าอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์และสถิติดั้งเดิมในการหาทางแก้ปัญหาเพลาข้อเหวี่ยงนี้จะสิ้นเปลืองเวลามาก เพราะจำนวนตัวแปรผันที่เกี่ยวข้องมีมาก และเราอาจจะผลิตเพลาข้อเหวี่ยงทั้ง 3 ชนิดในจำนวนที่แตกต่างกันได้มากมาย ลูกค้าของเราจะไม่ซื้อเพลาข้อเหวี่ยงแต่ละชนิดเกินกว่าจำนวนที่ได้ระบุไว้ กำไรที่ได้รับจากเพลาข้อเหวี่ยงแต่ละชนิดก็แตกต่างกัน จำนวนชั่วโมงของแต่ละแผนกก็มีอยู่เป็นจำนวนจำกัด และเพลาข้อเหวี่ยงแต่ละชนิดยังต้องใช้เวลาในจำนวนที่แตกต่างกันในแต่ละแผนก นอกจากนี้ ผลิตภัณฑ์ที่ต้องผลิตมีอยู่ถึง 3 ชนิดแทนที่จะเป็นชนิดเดียว เราจะหาทางแก้ปัญหานี้อย่างไร ? คำตอบก็คือ ต้องอาศัยวิธีการโปรแกรมแบบเส้นตรง (Linear programming) ที่จะอธิบายในบทที่ 8 และบทที่ 9

ปัญหาสมมติเกี่ยวกับการขนส่ง

การวิจัยการปฏิบัติการเพื่อการตัดสินใจได้ถูกนำไปใช้อย่างได้ผลในเรื่องต้นทุนการขนส่ง ปัญหาในเรื่องนี้เกิดขึ้นจากข้อเท็จจริงว่า บริษัทแห่งหนึ่งอาจทำการผลิตสินค้าตามโรงงานต่างๆ หลายแห่ง และถัดจากนั้นจึงทำการขนส่งไปยังคลังสินค้าต่างๆ หลายแห่ง ต้นทุนในการขนส่งสินค้าจากโรงงานแต่ละแห่งไปยังคลังสินค้าแต่ละแห่งแตกต่างกัน ดังนั้นปัญหาที่เกิดขึ้นก็คือ จะทำให้ต้นทุนการขนส่งทั้งสิ้นอยู่ในระดับต่ำสุดได้อย่างไร เมื่อพิจารณาจากกำลังการผลิตทั้งสิ้นของโรงงาน และความต้องการทั้งสิ้นของคลังสินค้า รูป 1—1 เป็นสถาน-การณ์ที่เป็นแบบฉบับของปัญหาชนิดนี้ เราได้กำหนดกำลังการผลิตของโรงงานแต่ละแห่งสำหรับสัปดาห์ถัดไป และความต้องการรายสัปดาห์ของคลังสินค้าแต่ละแห่ง ผู้จัดการฝ่ายขนส่งของบริษัทจึงต้องตัดสินใจว่า ถ้าจะทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำที่สุดควรจะส่งจากโรงงานใดไปสู่คลังสินค้าใดบ้างและเป็นจำนวนเท่าไร ?



รูป 1–1 ส่วนผสมการขนส่งที่อาจเป็นไปได้

ตาราง 1—1
ส่วนผสมการขนส่งที่อาจเป็นไปได้

โรงงาน	กำลังการผลิต	ต้นทุนในการขนส่งไปยังคลังสินค้า R	S	T
A	100 ตัน	4 บาท/ตัน	7 บาท/ตัน	3 บาท/ตัน
B	50 ตัน	2 บาท/ตัน	4 บาท/ตัน	5 บาท/ตัน
C	70 ตัน	8 บาท/ตัน	6 บาท/ตัน	1 บาท/ตัน
ความต้องการในสัปดาห์นี้		40 ตัน	80 ตัน	100 ตัน

ตาราง 1—1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังการผลิต ความต้องการและต้นทุนการขนส่ง จะสังเกตได้ว่าการส่งสินค้าจากโรงงานต่าง ๆ ไปยังคลังสินค้าต่าง ๆ อาจเป็นไปได้ในลักษณะและจำนวนที่แตกต่างกันได้มากมาย ส่วนผสมการขนส่งที่แตกต่างกันจะก่อให้เกิดต้นทุนทั้งสิ้นในการขนส่งที่แตกต่างกันสำหรับสัปดาห์ถัดไป ลองพิจารณาทางแก้ปัญหาที่ผู้จัดการฝ่ายขนส่งกำลังเผชิญอยู่ในขณะนี้ สัก 2 ข้อ จากทางแก้ปัญหาที่มีอยู่เป็นจำนวนมากมายดังนี้

1. เขาอาจจะให้โรงงาน A ส่งไปให้คลังสินค้า T ตามจำนวนที่ต้องการ แล้วให้โรงงาน B ส่งไปยังคลังสินค้า R 40 ตัน และคลังสินค้า S 10 ตัน ถ้าเช่นนั้นโรงงาน C จะต้องส่งสินค้าที่ผลิตได้ทั้งหมดไปให้คลังสินค้า S

ต้นทุนทั้งสิ้นในการขนส่งจากการตัดสินใจนี้เท่ากับ

$$\begin{aligned}
100 \times 3 \text{ บาท} &= 300 \text{ บาท} \\
40 \times 2 \text{ บาท} &= 80 \text{ บาท} \\
10 \times 4 \text{ บาท} &= 40 \text{ บาท} \\
70 \times 6 \text{ บาท} &= \underline{420} \text{ บาท} \\
& \underline{\underline{840}} \text{ บาท}
\end{aligned}$$

2. เขาอาจจะให้โรงงาน C ส่งไปให้คลังสินค้า T 70 ตัน โรงงาน B อาจจะส่งไปให้คลังสินค้า T 30 ตัน และคลังสินค้า S 20 ตัน โรงงาน A ก็จะส่งไปให้คลังสินค้า S 60 ตัน และคลังสินค้า R 40 ตัน

ต้นทุนทั้งสิ้นในการขนส่งจากการตัดสินใจนี้เท่ากับ

$$\begin{aligned}
70 \times 1 \text{ บาท} &= 70 \text{ บาท} \\
30 \times 5 \text{ บาท} &= 150 \text{ บาท} \\
20 \times 4 \text{ บาท} &= 80 \text{ บาท} \\
60 \times 7 \text{ บาท} &= 420 \text{ บาท} \\
40 \times 4 \text{ บาท} &= \underline{160} \text{ บาท} \\
& \underline{\underline{880}} \text{ บาท}
\end{aligned}$$

แน่ละ เราอาจจะจัดส่งสินค้าตามปัญหานี้ในลักษณะและจำนวนที่แตกต่างกันได้อีกมากมาย ซึ่งทางแก้ปัญหาแต่ละอันต่างก็มีต้นทุนทั้งสิ้นในการขนส่งที่แตกต่างกัน ปัญหาของผู้จัดการฝ่ายขนส่งคือจะต้องหาส่วนผสมที่ดีที่สุด ซึ่งในกรณีนี้คือส่วนผสมในการขนส่งที่จะทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นในการขนส่งอยู่ในระดับต่ำที่สุด ถ้าจะคำนวณส่วนผสมที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดโดยอาศัยมือจะต้องทำการคำนวณเป็นเวลาหลายวัน แต่วิธีเชิงปริมาณที่จะช่วยให้ได้มาซึ่งคำเฉลยที่ดีที่สุดภายในเวลาเพียงไม่กี่นาที คือ การโปรแกรมแบบเส้นตรงในบทที่ 9

วิธีเชิงปริมาณที่เราจะศึกษากันต่อไป

เราจะอธิบายอย่างสั้น ๆ เกี่ยวกับวิธีเชิงปริมาณ แต่ละวิธีที่จะกล่าวต่อไปในหนังสือเล่มนี้เพื่อชี้ให้เห็นว่า ชนิดต่าง ๆของการวิเคราะห์ที่มีอยู่มีอะไรบ้าง และเราอาจนำการวิเคราะห์เหล่านี้ไปใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างไร

การวิเคราะห์การคุ้มทุน (Breakeven analysis) เป็นเรื่องเกี่ยวกับตัวแปรผันที่ทำให้บริษัทได้รับกำไรหรือประสบผลขาดทุน ตัวแปรผันเหล่านี้ได้แก่ต้นทุนคงที่ ต้นทุนแปรผัน ราคาขายต่อหน่วย และจำนวนหน่วยที่ขาย

ทฤษฎีความน่าจะเป็น (Probability theory) ใช้ประโยชน์ในกรณีที่มีความไม่แน่นอน สถิติของเบยส์ (Bayesian statistics) ได้พัฒนาวิธีการตัดสินใจในกรณีที่มีข้อสนเทศจำนวนจำกัด โดยอาศัยทฤษฎีเพียงทฤษฎีเดียว

ตัวแบบของคงคลัง (Inventory models) ช่วยในการควบคุมต้นทุนเกี่ยวกับของคงคลังทั้งสิ้น ต้นทุนเหล่านี้ได้แก่ต้นทุนในการสั่งซื้อและต้นทุนในการเก็บรักษา

เวคเตอร์ ดีเตอร์มินันต์ และพีชคณิตเมตริกซ์ (Vectors, determinants, and matrix algebra) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต่อการทำความเข้าใจ และการใช้ประโยชน์การโปรแกรมแบบเส้นตรง

การโปรแกรมแบบเส้นตรง (Linear programming) เป็นวิธีวิเคราะห์เพื่อหาส่วนผสมที่ดีที่สุดในการใช้ทรัพยากรหลาย ๆ ชนิด ที่มีอยู่อย่างจำกัดจากส่วนผสมที่อาจเป็นไปได้จำนวนมากเพื่อบรรลุเป้าหมายตามที่ได้กำหนดไว้ ปัญหาที่เกิดขึ้นจะถูกเขียนออกมาในรูปสมการพีชคณิต และหาทางแก้ปัญหาเหล่านี้โดยคำนวณจากสมการพีชคณิตเหล่านี้

เกมและกลยุทธ์การแข่งขัน (Games and competitive strategies) ให้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสถานการณ์ที่ขัดแย้งกัน ทำให้เรารู้วิธีการกำหนดทางแก้ปัญหาที่ดีที่สุด ในสถานการณ์ที่มีการแข่งขันบางอย่าง

การวิเคราะห์แบบมาร์คอฟ (Markov analysis) ทำให้เราสามารถคาดคะเนล่วงหน้าการเปลี่ยนแปลงเข้าการแข่งขันในระยะยาว ในกรณีที่ทราบความจงรักภักดีที่มีต่อตราสินค้าของลูกค้าและส่วนแบ่งตลาดที่เป็นอยู่ในขณะนี้

แถวรอคอย (Waiting lines) เป็นเรื่องที่เกี่ยวกับการที่วัตถุชิ้นส่วนลูกค้า ฯ ล ฯ ได้มาถึงอุปกรณ์อำนวยความสะดวกในการผลิต หรือให้บริการในลักษณะเชิงสุ่ม และอุปกรณ์เหล่านั้นมีกำลังการผลิตจำกัด ฝ่ายจัดการใช้ตัวแบบเหล่านี้ในการคำนวณ (1) ความยาวของแถว

รอคอยในอนาคต (2) เวลาถัวเฉลี่ยที่ต้องสูญเสียไปในแถวรอคอยในการที่บุคคลหนึ่งต้องรอการให้บริการ หรือชิ้นส่วนชิ้นหนึ่งต้องรอการผลิต

แบบฝึกหัด

1—1 การทดลองการใช้พลั่วของ Taylor เป็นตัวอย่างของการนำระเบียบวิธีการทางวิทยาศาสตร์ไปใช้กับปัญหาของฝ่ายจัดการใช่หรือไม่ ? จงเทียบขั้นต่าง ๆ ในการทดลองของเขาแต่ละขั้นกับขั้นของระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์ขั้นต่อขั้น ตามความเห็นของท่านการทดลองนี้อาจเรียกได้ว่า เป็นตัวอย่างของการใช้ประโยชน์จากการวิจัยการปฏิบัติการหรือไม่ ? เพราะเหตุใด ?

1—2 ความจริงที่ว่า การวิจัยการปฏิบัติการพิจารณาจากทัศนะขององค์การแทนที่จะพิจารณาจากทัศนะของศูนย์ที่เกิดปัญหาแต่ละแห่ง ปรากฏว่าก่อให้เกิดข้อจำกัดในการนำเครื่องมือนี้ไปใช้อย่างกว้างขวางยิ่งขึ้นใช่หรือไม่ ?

1—3 การตัดสินใจของฝ่ายจัดการในสมัยก่อน ความจริงก็ได้อาศัยวิธีการวิจัยการปฏิบัติการเพราะเหตุใดจึงต้องใช้เวลาประมาณ 50 ปี การวิจัยการปฏิบัติการจึงเป็นที่ยอมรับกันและนำเข้ามาใช้ในอุตสาหกรรม

บทที่ 2

การวิเคราะห์การคุ้มทุน
(BREAKEVEN ANALYSIS)

วิธีการศึกษาวิชาการจัดการในยุคปัจจุบัน เพ่งเล็งทางด้านการทำการตัดสินใจ (decision making) ในเมื่อกำไรหรือขาดทุนของธุรกิจถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์ระหว่างรายรับทั้งสิ้น (total revenue) กับต้นทุนทั้งสิ้น (total costs) ดังนั้นเราจึงมีความสนใจต่อการตัดสินใจของฝ่ายจัดการที่มีผลกระทบต่อรายรับและต้นทุน การตัดสินใจที่ผู้จัดการกระทำไปส่วนมากมีผลกระทบต่อตัวเลขดังกล่าวทั้งสองเสมอ

ความรับผิดชอบที่สำคัญของผู้จัดการประการหนึ่ง ได้แก่การดำเนินงานให้มีกำไร ถ้าการดำเนินงานไม่อาจทำกำไรได้แล้ว ธุรกิจนั้นก็อยู่รอดไม่ได้ และเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่า เครื่องวัดผลการปฏิบัติงานของธุรกิจที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่งได้แก่จำนวนกำไรที่ธุรกิจนั้นทำมาหาได้

มีวิธีการใดบ้างหรือไม่ที่จะทำให้ผู้จัดการทราบล่วงหน้า และโดยมีความถูกต้องเชื่อถือได้ตามสมควรถึงผลของการตัดสินใจบางอย่างที่มีต่อรายรับทั้งสิ้นและต้นทุนทั้งสิ้น ? มีเครื่องมือใดบ้างหรือไม่ที่จะช่วยชี้ให้เห็นสิ่งที่อาจเกิดขึ้นได้กับตัวเลขกำไรถ้าถือปฏิบัติตามการกระทำอย่างใดอย่างหนึ่งลงไป ? คำตอบก็คือ "มี" เครื่องมือของฝ่ายจัดการที่อาจนำมาใช้ในกรณีนี้ได้แก่การวิเคราะห์การคุ้มทุน (breakeven analysis) และแผนภูมิการคุ้มทุน (breakeven chart)

แนวความคิดเกี่ยวกับการคุ้มทุน (Concept of Breakeven)

ผู้ผลิตย่อมคาดหวังไว้ว่า รายรับที่ตนได้รับแต่ละปี (รายได้จากการขายสำหรับปี) จะต้องมีจำนวนมากพอที่จะคลุมหรือช่วยรับภาระรายการต่าง ๆ 4 รายการดังต่อไปนี้: (1) ต้นทุนในการผลิตผลิตภัณฑ์ของตนซึ่งอาจเป็นรองเท้าหรือสบู่ รถยนต์หรือเครื่องบิน ฯลฯ (ตัวอย่างเช่น ต้นทุนวัตถุดิบ) (2) ต้นทุนในการนำผลิตภัณฑ์เหล่านั้นออกสู่ตลาด (ตัวอย่างเช่น ต้นทุนทางด้านการโฆษณา) (3) ต้นทุนทั่วไปในการบริหารธุรกิจ (ตัวอย่างเช่น เงินเดือนประธาน) และ (4) จำนวนกำไรที่เขาหวังว่าจะทำได้ในระหว่างปี ผู้ค้าส่งและผู้ค้าปลีกแตกต่างจากผู้ผลิตเฉพาะในแง่ที่ว่าบุคคลเหล่านี้ซื้อแทนที่จะผลิตสิ่งที่ตนขาย ผู้ขายบริการก็ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่างรายรับกับต้นทุนเช่นกัน

สำหรับผู้ผลิต ผู้ค้าส่ง ผู้ค้าปลีก และผู้ขายบริการ รายรับทั้งสิ้นที่คาดว่าจะได้รับในระหว่างปีต่าง ๆ จะต้องมีจำนวนเท่ากันหรือมากกว่าต้นทุนทั้งสิ้น เมื่อรายรับทั้งสิ้นเท่ากันพอดีกับ (1) ต้นทุนของสินค้าที่ผลิตหรือซื้อ บวกด้วย (2) ต้นทุนในการนำสินค้าเหล่านั้นออกสู่ตลาด บวกด้วย (3) ต้นทุนในการบริหารโดยทั่วไปแล้ว ธุรกิจนั้นก็จะไม่มีกำไรและก็ไม่ขาดทุน คุ้มทุนพอดี เราอาจกล่าวได้ว่าธุรกิจได้ดำเนินงาน ณ จุดคุ้มทุนสำหรับปีนั้น

ดังนั้น จุดคุ้มทุน (breakeven point) คือ ปริมาณหรือระดับการดำเนินงานที่รายรับทั้งสิ้นเท่ากับต้นทุนทั้งสิ้นพอดี ถ้าการดำเนินงานของธุรกิจอยู่ในระดับสูงกว่าจุดนี้แม้เพียงหน่วยเดียว ธุรกิจก็จะแสดงกำไร ในทางกลับกันถ้าการดำเนินงานของธุรกิจอยู่ในระดับที่ต่ำกว่าจุดนี้แม้เพียงหน่วยเดียวก็จะประสบผลขาดทุนสำหรับงวดนั้น

เราอาจแสดงปริมาณหรือระดับการดำเนินงานได้ ๓ วิธีด้วยกัน วิธีที่หนึ่งคือจำนวนหน่วยผลิตภัณฑ์ที่ผลิตหรือขาย อีกวิธีหนึ่งได้แก่ปริมาณการขายที่คิดเป็นจำนวนเงิน และวิธีที่สาม เราอาจแสดงปริมาณเป็นอัตราร้อยละของกำลังการผลิตของโรงงานที่ใช้อยู่ในขณะนั้น ส่วนรายรับนั้นคือจำนวนเงินรายได้จากการขาย

ลักษณะรายรับและต้นทุน (Revenue and Cost Aspects)

รายรับทั้งสิ้นจากการขาย (Total revenue from sales)

งบประมาณที่สำคัญที่สุดของธุรกิจ ได้แก่งบประมาณรายได้จากการขายหรือรายรับจากการขาย งบประมาณนี้สะท้อนให้เห็นการพยากรณ์การขายสำหรับงวดถัดไป ซึ่งโดยทั่วไปก็คืองวดปีปฏิทิน การกะประมาณจำนวนเงินที่จะได้รับจากการขายผลิตภัณฑ์หรือบริการนี้เป็นตัวเลขงบประมาณตัวแรกที่ต้องจัดทำขึ้นและเป็นตัวเลขขั้นมูลฐานที่สุด

ในการคำนวณตัวเลขรายรับ ผู้ขายคนหนึ่งอาจคูณจำนวนหน่วยที่ตนคาดว่าจะขายได้ด้วยราคาขายต่อหน่วย อีกคนหนึ่งอาจคูณจำนวนหน่วยด้วยราคาขายถัวเฉลี่ยที่ตนคาดว่าจะได้รับ ผู้ขายอีกคนหนึ่งอาจนำเอาจำนวนเงินทั้งสิ้นของปีก่อนและปรับปรุงให้สูงขึ้นหรือลดลงตามที่เห็นสมควร

รายรับทั้งสิ้นจากการขายไม่รวมรายได้คงที่ หรือรายได้ที่ไม่ใช่ได้มาจากการดำเนินงาน

ต้นทุนแปรผัน (Variable costs)

ต้นทุนกลุ่มนี้ประกอบด้วยต้นทุนทางตรง (direct costs) ซึ่งอาจคิดเข้าโดยตรงและเฉพาะเจาะจงกับผลิตภัณฑ์ที่ธุรกิจผลิตหรือขาย แนวความคิดเกี่ยวกับต้นทุนแปรผันมีอยู่ ๒ ประการ กล่าวคือ

1. เราได้ตั้งข้อสมมติไว้ว่า ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยจะสม่ำเสมอหรือคงที่ต่อหน่วย โดยไม่คำนึงถึงระดับของปริมาณหรือจำนวนผลิต ตัวอย่างเช่น ถ้าการผลิตโต๊ะ 1 ตัวต้องใช้ไม้ 10 ไม้ฟุตในราคา 40 สตางค์ต่อฟุต การผลิตโต๊ะ 2 ตัวจะต้องใช้ไม้ทั้งหมด 20 ไม้ฟุต (8 บาท) หรือต้นทุนแปรผันต่อหน่วยสำหรับไม้เท่ากับ 4 บาท

2. จำนวนต้นทุนแปรผันทั้งสิ้นจะต้องขึ้น ๆ ลง ๆ ในเมื่อปริมาณหรือจำนวนผลิตเปลี่ยนแปลงไป ถ้าไม่ผลิตเลย ต้นทุนแปรผันทั้งสิ้นจะมีจำนวนเท่ากับศูนย์

ต้นทุนของผู้ผลิตที่จัดเป็นต้นทุนแปรผันได้แก่ วัตถุทางตรง แรงงานทางตรง การหีบห่อ ค่าขนส่งออก เชื้อเพลิง วัสดุสิ้นเปลือง วัตถุที่ใช้ในการผลิต และค่านายหน้าในการขาย ฯลฯ

ต้นทุนคงที่ (Fixed costs)

ต้นทุนเหล่านี้เป็นต้นทุนทางอ้อม (indirect costs) แนวความคิดเกี่ยวกับต้นทุนคงที่มีอยู่เพียงประการเดียว แนวความคิดนี้มีอยู่ว่าต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นย่อมแสดงออกเป็นจำนวนเงิน ต้นทุนคงที่มีแนวโน้มที่จะเป็นจำนวนเงินทั้งสิ้นที่เป็นจำนวนคงที่ โดยไม่คำนึงถึงระดับของปริมาณหรือจำนวนผลิต ณ ปริมาณศูนย์ และที่ปริมาณ 100 เปอร์เซ็นต์ จำนวนเงินทั้งสิ้นของต้นทุนคงที่จะเท่ากัน เมื่อเป็นเช่นนี้ต้นทุนคงที่ต่อหนึ่งหน่วยผลิตภัณฑ์จึงต้องเปลี่ยนแปลงไปเรื่อย ๆ เมื่อปริมาณหรือจำนวนผลิตเพิ่มขึ้น ต้นทุนคงที่ต่อหน่วยจะลดลง

ต้นทุนของผู้ผลิตที่จัดเป็นต้นทุนคงที่ได้แก่ค่าเช่า ดอกเบี้ยเงินลงทุน ภาษีทรัพย์สิน ค่าประกันภัยทรัพย์สิน เงินเดือนผู้บริหาร ส่วนยอมให้สำหรับค่าเสื่อมราคา และจำนวนเงินยอดรวมที่จ่ายสำหรับการโฆษณา ฯลฯ

ปริมาณหรือจำนวนผลิต (Volume or output)

รายรับทั้งสิ้น และต้นทุนทั้งสิ้นขึ้นอยู่กับหรือตามที่เป็นจริงกำหนดโดยปริมาณหรือจำนวนผลิต เมื่อความจริงเป็นเช่นนี้ การเปลี่ยนแปลงในปริมาณหรือจำนวนผลิตย่อมมีผลกระทบต่อการคุ้มทุนของธุรกิจหนึ่ง ๆ ถ้าจำนวนเงินขายของผู้ค้าปลีกคนหนึ่งเพิ่มจาก 350,000 บาทมาเป็น 400,000 บาท ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงทางด้านปริมาณหรือจำนวนขาย ผลการดำเนินงานของเขาอาจเปลี่ยนจากขาดทุนมาเป็นกำไรก็ได้ ถ้าการขายของผู้ผลิตคนหนึ่งที่คิดเป็นจำนวนหน่วยลดจาก 700,000 หน่วยมาเป็น 600,000 หน่วย ผลการดำเนินการของเขาอาจเปลี่ยนแปลงไปในทางตรงกันข้ามก็ได้ ถ้าธุรกิจแห่งหนึ่งดำเนินงานขาดทุน ณ กำลังการผลิต 65 เปอร์เซ็นต์ การเพิ่มเป็น 70 เปอร์เซ็นต์อาจจะทำให้ธุรกิจนี้คุ้มทุนก็ได้ และการเพิ่มมากกว่านี้เป็น 75 เปอร์เซ็นต์ของกำลังการผลิตอาจจะเป็นผลทำให้ได้รับกำไรบ้างก็ได้ ดูตาราง 2—1

ตาราง 2—1

ตารางการคุ้มทุนของผู้ผลิตคนหนึ่ง
(จำนวนเงินบาท)

รายรับจากการขาย	50,000	60,000	70,000
ต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น	25,000	30,000	35,000
ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น	+30,000	+30,000	+30,000
ต้นทุนทั้งสิ้น	55,000	60,000	65,000
กำไรหรือขาดทุน	(5,000)	—0—	5,000
	ขาดทุน	จุดคุ้มทุน	กำไร

ข้อสมมติ : ราคาขายต่อหน่วย 10 บาท
ต้นทุนแปรผันต่อหน่วย 5 บาท
ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น 30,000 บาท

ตารางนี้แสดงให้เห็นว่า การเพิ่มทางด้านการขายอาจเปลี่ยนผลการดำเนินงานจากขาดทุนมาเป็นกำไรได้อย่างไร

ณ ปริมาณการขาย 60,000 บาท ผู้ผลิตนำรายรับไปชดเชยต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น 30,000 บาท (6,000 หน่วยคูณด้วย 5 บาทต่อหน่วย) และมีรายรับเหลือ 30,000 บาท ซึ่งเท่ากับต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นพอดี

ส่วนช่วยเหลือ (Contribution)

แนวความคิดในเรื่องส่วนช่วยเหลือเป็นส่วนมูลฐานในการวิเคราะห์การคุ้มทุน สมมติว่าผู้ผลิตคนหนึ่งขายผลิตภัณฑ์ที่ตนผลิตหนึ่งหน่วย และได้รับเงินจากการขายผลิตภัณฑ์หน่วยนั้น 5 บาท สมมติว่าต้นทุนแปรผันของผลิตภัณฑ์หน่วยนั้นเท่ากับ 3 บาท หลังจากที่ได้จ่ายต้นทุนแปรผันแล้ว ผู้ผลิตมีเงินเหลือ 2 บาทเป็นส่วนช่วยเหลือที่จะนำไปจ่ายชดเชยต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น ภายใต้เงื่อนไขดังกล่าว ทุก ๆ หน่วยที่ผู้ผลิตขายได้จะทำให้เขาได้รับส่วนช่วยเหลือในจำนวนที่เท่ากันที่จะนำไปใช้เพื่อวัตถุประสงค์นี้ เมื่อส่วนช่วยเหลือ 2 บาทได้ถูกสะสมจนมีจำนวนเท่ากับต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น ผู้ผลิตก็จะบรรลุจุดคุ้มทุนของเขา ต่อไปถ้าเขาขายได้อีกหนึ่งหน่วย 2 บาทที่ได้จากหน่วยนี้ก็จะเป็นกำไร

ตัวอย่างเช่น :

ราคาขายต่อหน่วย		1.00	บาท
ต้นทุนแปรผันต่อหน่วย		–0.70	บาท
ส่วนช่วยเหลือต่อหน่วย		0.30	บาท
สมมติว่าปริมาณการขายเท่ากับ		1,000,000	หน่วย
และต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นเท่ากับ		200,000	บาท
เพราะฉะนั้น	รายรับทั้งสิ้น	1,000,000	บาท
	ต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น	–700,000	บาท
	ส่วนช่วยเหลือ	300,000	บาท
	ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น	–200,000	บาท
	กำไร	100,000	บาท

ต่อไป ดูตาราง 2–2

ตาราง 2—2

ตารางการคุ้มทุนของผู้ค้าปลีกคนหนึ่ง
(จำนวนเงินบาท)

ขาย	275,000	300,000	325,000
ต้นทุนสินค้าที่ขาย	—192,500	—210,000	—227,500
กำไรขั้นต้น	82,500	90,000	97,500
ต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น	—55,000	—60,000	—65,000
ส่วนช่วยเหลือเพื่อชดเชย ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น	27,500	30,000	32,500
ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น	—30,000	—30,000	—30,000
กำไรหรือขาดทุน	(2,500)	—0—	2,500
	ขาดทุน	จุดคุ้มทุน	กำไร

ข้อสมมติ : ขายสุทธิ = 100 % ต้นทุนสินค้าที่ขาย = 70 %
กำไรขั้นต้น = 30 %
ต้นทุนแปรผันของผู้ค้าปลีก = 20 % ของขายสุทธิ
ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นของผู้ค้าปลีก = 30,000 บาท ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นนี้เท่ากับ 10 % ของขายสุทธิเมื่อปริมาณขายเท่ากับ 300,000 บาท

ผู้ค้าปลีกคนนี้จ่ายให้ผู้ขาย (ผู้ผลิตและผู้ค้าส่ง) 70 สตางค์สำหรับทุก ๆ 1 บาท ที่เขาได้รับจากลูกค้าของเขาและเหลือเป็นกำไรขั้นต้น 30 % จากอัตราร้อยละนี้เศษสองส่วนสาม (20%) เป็นจำนวนที่เกือบเท่ากับต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น และเศษหนึ่งส่วนสาม (10%) เป็นจำนวนที่เกือบเท่ากับต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นสำหรับกรณีนี้

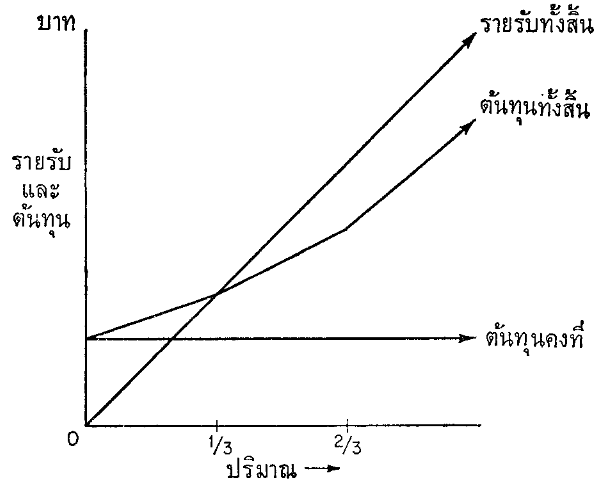
ณ ปริมาณการขาย 300,000 บาท ผู้ค้าปลีกคุ้มทุนพอดี
ปริมาณการขาย 275,000 บาท ทำให้ขาดทุน 2,500 บาท
ปริมาณการขาย 325,000 บาท ทำให้กำไร 2,500 บาท

ขยายความ

เพื่อให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริง เราจะต้องยอมรับและจำไว้ด้วยว่าต้นทุนบางอย่างเป็นต้นทุนกึ่งแปรผัน (semivariable costs) และต้นทุนบางอย่างก็เป็นต้นทุนกึ่งคงที่ (semifixed costs) ต้นทุนแปรผันบางชนิดอาจมีต้นทุนต่อหน่วยเปลี่ยนแปลงไปได้เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงในปริมาณ ตัวอย่างสมมติ 2 ตัวอย่างมีดังนี้ :

(1) สมมติว่าต้นทุนวัตถุดิบที่เป็นส่วนสำคัญของผลิตภัณฑ์เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วมาก หรือ

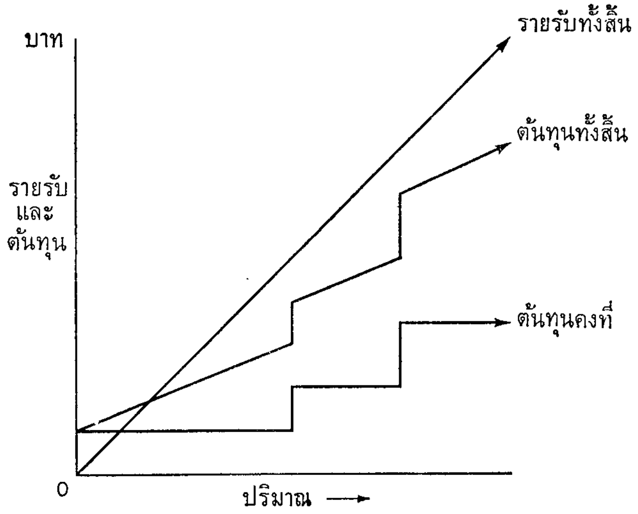
(2) สมมติว่าในปีที่กำลังขยายปริมาณ การจัดซื้อหลังวันกลางปีได้รับส่วนลดปริมาณที่สูงกว่า ในตัวอย่างที่ 1 ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยสูงขึ้น ในตัวอย่างที่ 2 ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยลดลง ดูรูป 2–1



รูป 2–1 ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยที่เพิ่มขึ้นในแผนภูมินี้ ต้นทุนคงที่ในยอดรวมมีจำนวนเท่ากันไม่ว่า ณ ปริมาณใด แต่ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยเพิ่มขึ้นสองครั้ง ครั้งแรกเกิดขึ้นในระดับเศษหนึ่งส่วนสามของปริมาณสูงสุด ครั้งที่สองในระดับเศษสองส่วนสามของปริมาณสูงสุด ต้นทุนทั้งสิ้นจึงเพิ่มสูงขึ้นในอัตราที่เร็วกว่าหลังจุดแต่ละจุดทั้งสองดังกล่าว

ต้นทุนคงที่บางอย่างก็อาจจะมียอดรวมเปลี่ยนแปลงไปได้ เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงในปริมาณ ต้นทุนเหล่านี้จะปรากฏในแผนภูมิการคุ้มทุนในลักษณะเป็น “ขั้นบันได” ตัวอย่างเช่น (1) สมมติว่ารายจ่ายโฆษณาสำหรับปีตามที่วางแผนไว้มีจำนวน 1 ล้านบาท แต่ ณ เวลาใดเวลาหนึ่งในงวดงบประมาณนั้น ฝ่ายจัดการตัดสินใจตัดรายจ่ายโฆษณาให้น้อยลง โดยให้ยอดรวมสำหรับปีมีจำนวนไม่เกิน 800,000 บาท (2) สมมติว่า ในตอนกลางปีได้มีการเพิ่ม

เงินเดือนประธานบริษัท จากตัวเลขงบประมาณเดิม 40,000 บาท มาเป็น 50,000 บาทต่อปี ในตัวอย่างที่ 1 ต้นทุนคงที่ในยอดรวมจะลดลง ในตัวอย่างที่ 2 ต้นทุนคงที่ในยอดรวมจะเพิ่มขึ้น ดูรูป 2–2



รูป 2–2 ต้นทุนคงที่เพิ่มขึ้น ในแผนภูมินี้ ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยไม่เปลี่ยนแปลง แต่ต้นทุนคงที่ในยอดรวมเพิ่มสูงขึ้น 2 ครั้ง ณ ปริมาณที่แตกต่างกัน 2 ระดับ การเปลี่ยนแปลงเหล่านี้ทำให้เส้นต้นทุนทั้งสิ้นเพิ่มขึ้นทันทีในจำนวนที่เท่ากัน

กล่าวโดยทั่วไป เราจะไม่คำนึงถึงต้นทุนกึ่งแปรผันและต้นทุนกึ่งคงที่ เนื่องจากว่าแผนภูมิการคุ้มทุนมีประโยชน์ต่อการพยากรณ์ และการวางแผนระยะสั้นเท่านั้น ดังนั้นโดยปกติฝ่ายจัดการจึงแยกต้นทุนทั้งหลายออกเป็นต้นทุนแปรผันและต้นทุนคงที่ การอธิบายของเราในบทนี้ เราจะแยกต้นทุนออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ ดังกล่าวเช่นกัน

วิธีวิเคราะห์การคุ้มทุน (Approaches to Breakeven Analysis)

แผนภูมิการคุ้มทุน เป็นเครื่องมือที่แสดงออกมาในรูปกราฟที่มีประโยชน์ต่อฝ่ายจัดการ ในขณะที่ทำการตัดสินใจเกี่ยวกับ

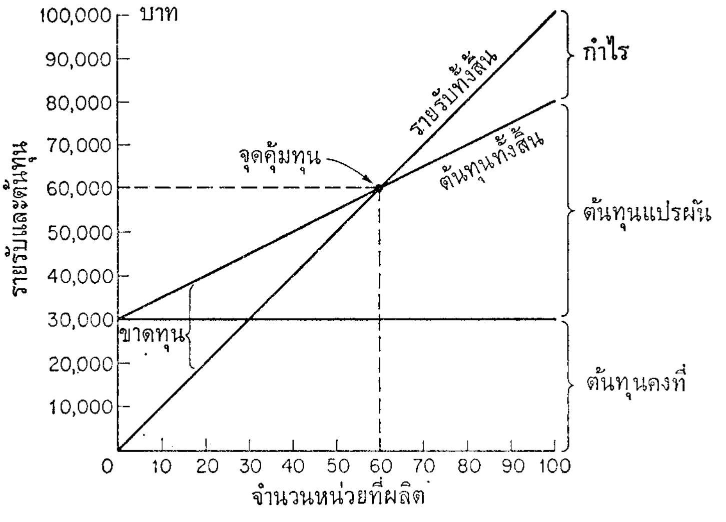
1. ความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงทางด้านการขาย กับการเปลี่ยนแปลงทางด้านกำไร
2. ความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงทางด้านต้นทุน กับการเปลี่ยนแปลงทางด้านกำไร

3. ความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงทางด้านระดับการดำเนินงาน กับการเปลี่ยนแปลงทางด้านกำไร

แผนภูมิการคุ้มทุน แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรผันต่าง ๆ 4 ตัวดังต่อไปนี้ : รายรับ ต้นทุนแปรผัน ต้นทุนคงที่ และปริมาณหรือจำนวนผลิต แผนภูมิการคุ้มทุนจะแสดงให้เห็นว่า ตัวแปรผันเหล่านี้กำหนดการทำกำไรของธุรกิจได้อย่างไร แผนภูมินี้มีส่วนช่วยผู้จัดการในการกะประมาณว่าการตัดสินใจ และการกระทำการบางอย่างมีผลต่อกำไรที่ได้รับอย่างไร วิธีวิเคราะห์การคุ้มทุนมีอยู่ 4 วิธี ดังต่อไปนี้

1. **กราฟมาตรฐาน (Standard graphic)**

รูป 2—3 แสดงและอธิบายวิธีวิเคราะห์การคุ้มทุนที่ใช้กันแพร่หลายที่สุดนี้



รูป 2–3 วิธีกราฟมาตรฐาน วิธีนี้เป็นการแสดงแทนการคุ้มทุนที่ใช้กันโดยทั่วไป ต้นทุนคงที่เป็นฐานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารองรับต้นทุนแปรผันที่เป็นรูปลิ่ว รายรับหรือต้นทุนที่เป็นจำนวนเงินปรากฏอยู่บนแกนตั้งหรือแกน y ปริมาณหรือจำนวนผลิตที่คิดเป็นหน่วยปรากฏอยู่บนแกนนอนหรือแกน x จุดตัดระหว่างเส้นรายรับทั้งสิ้นกับเส้นต้นทุนทั้งสิ้นคือ จุดคุ้มทุน ณ จุดนี้รายรับทั้งสิ้นจะเท่ากับต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น บวกด้วยต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นพอดี

ต้นทุนคงที่ในยอดรวมจะไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่า ณ ปริมาณใด ต้นทุนแปรผันในยอดรวมจะเพิ่มสูงขึ้น เมื่อปริมาณเพิ่มขึ้นจากซ้ายไปขวา

ระยะตั้งฉากระหว่างเส้นรายรับทั้งสิ้น กับเส้นต้นทุนทั้งสิ้นที่อยู่ทางขวามือของจุดคุ้มทุนวัดกำไรที่ได้รับ ณ ปริมาณนั้น ๆ ถ้าอยู่ทางซ้ายมือของจุดคุ้มทุน ระยะตั้งฉากระหว่างเส้นทั้งสองนี้จะเป็นเครื่องวัดกำไรที่มีค่าติดลบ หรือขาดทุน

2. **วิธีพีชคณิต (Algebraic)**

คณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์การคุ้มทุน เป็นคณิตศาสตร์ง่าย ๆ

ให้ TR = รายรับทั้งสิ้น เป็นจำนวนเงิน
TC = ต้นทุนทั้งสิ้น เป็นจำนวนเงิน
TVC = ต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น
TFC = ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น
x = ปริมาณหรือจำนวนผลิต เป็นหน่วย
v = ต้นทุนแปรผันต่อหน่วย เป็นจำนวนเงิน
p = ราคาขายต่อหน่วย เป็นจำนวนเงิน
BEP = จุดคุ้มทุน

รายรับทั้งสิ้นจะต้องเท่ากับปริมาณที่คิดเป็นหน่วยคูณด้วยราคาขายต่อหน่วย : $TR = xp$ และต้นทุนทั้งสิ้นจะต้องเท่ากับต้นทุนแปรผันทั้งสิ้นบวกด้วยต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น: $TC = TVC + TFC$ หรือ $TC = vx + TFC$

ในการคำนวณจุดคุ้มทุนที่เป็นจำนวนหน่วย ให้นำเอา TR และ TC มาเข้าสมการ และหาค่าของปริมาณที่เป็นจำนวนหน่วย ตัวอย่างสมมติว่า TFC เท่ากับ 10,000 บาทต่อปี v เท่ากับ 2 บาท และ p เท่ากับ 4 บาท เข้าสมการ $TR = TC$ เราจะได้

$$x(4) = 10{,}000 + x(2)$$

$$2x = 10{,}000$$

$$x = 5{,}000 \text{ หน่วย}$$

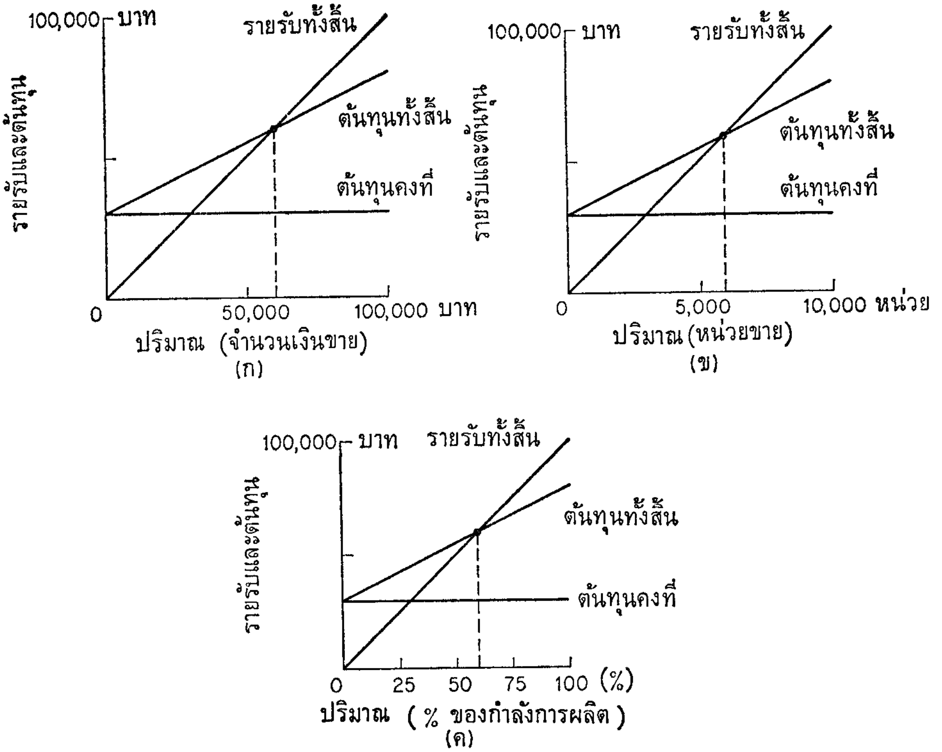
เมื่อคูณ 5,000 หน่วยด้วยราคาขายต่อหน่วย 4 บาท เราจะได้จุดคุ้มทุนที่เป็นจำนวนเงิน 20,000 บาท

ต่อไปนี้ เป็นสูตรที่ใช้ในการคำนวณหาจุดคุ้มทุนที่เป็นจำนวนหน่วย จำนวนเงิน และอัตราร้อยละของกำลังการผลิตที่ใช้ (รูป 2—4 แสดงสูตรเหล่านี้โดยวิธีกราฟ)

$$\text{BEP เป็นจำนวนหน่วย} = \frac{TFC}{p-v} \qquad (2-1)$$

$$\text{BEP เป็นจำนวนเงิน} = \frac{TFC}{1-v/p} \qquad (2-2)$$

$$\text{BEP เป็น \% ของกำลังการผลิต} = \frac{TFC}{(p-v)\ (\text{กำลังการผลิตทั้งสิ้นเป็นจำนวนหน่วย})} \times 100\ \% \qquad (2-3)$$



รูป 2–4 BEP ที่เป็นจำนวนเงิน จำนวนหน่วย และอัตราร้อยละ

(ก) BEP = 60,000 บาท

(ข) BEP = 6,000 หน่วย

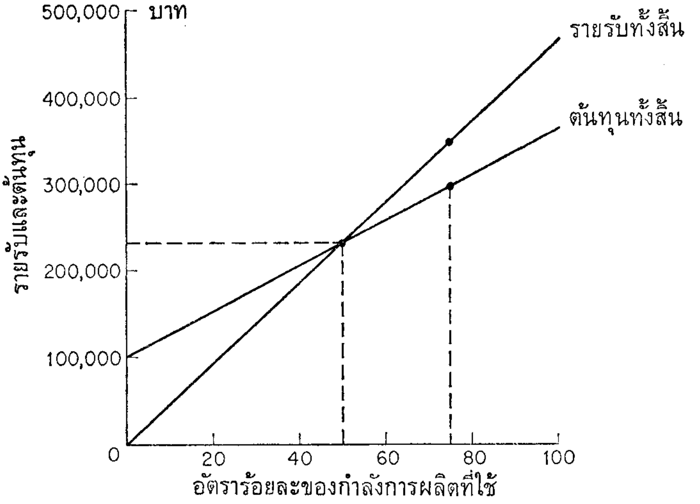
(ค) BEP = 60 % ของกำลังการผลิต

ข้อสมมติ

ราคาขาย	10	บาทต่อหน่วย
ต้นทุนแปรผัน	5	บาทต่อหน่วย
ต้นทุนคงที่	30,000	บาทต่อปี
กำลังการผลิต	10,000	หน่วย

3. กราฟยอดรวม (Gross graphic)

ในบางครั้งเราอาจจะสร้างแผนภูมิการคุ้มทุนได้ ทั้งๆ ที่ไม่ทราบตัวเลขต้นทุนแปรผันต่อหน่วย ในการสร้างแผนภูมิการคุ้มทุนในลักษณะเช่นนี้ เราจะต้องมีการ (1) กะประมาณต้นทุนคงที่ และ (2) รายรับทั้งสิ้นและต้นทุนทั้งสิ้นสำหรับอัตราร้อยละของกำลังการผลิตที่ใช้บางระดับ รูป 2–5 อธิบายให้เห็นวิธีการนี้



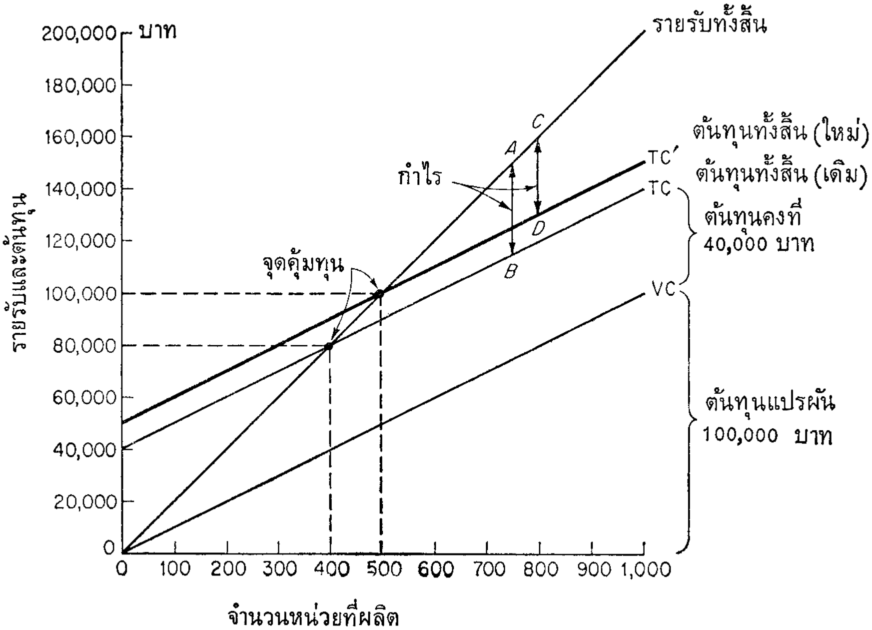
รูป 2–5 วิธีกราฟยอดรวม สมมติว่าต้นทุนคงที่เท่ากับ 100,000 บาท จุดนี้จะอยู่บนแกนตั้ง สมมติว่า ณ ระดับ 75% ของกำลังการผลิต รายรับทั้งสิ้นเท่ากับ 350,000 บาท และต้นทุนทั้งสิ้น (ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นบวกต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น) เท่ากับ 300,000 บาท (ตัวเลขเหล่านี้ได้มาจากไหน ? ตัวเลขเหล่านี้ได้มาจากแผนกบัญชี และจากบันทึกบัญชีในอดีต) ตัวเลขรายรับทั้งสิ้น 350,000 บาท และตัวเลขต้นทุนทั้งสิ้น 300,000 บาท จะอยู่บนเส้นตั้งฉากที่ลากจาก 75% ของกำลังการผลิต ต่อไปลากเส้นจากจุด 0 ไปยังจุดรายรับทั้งสิ้น (350,000 บาท) และลากเส้นอีกเส้นหนึ่งจากจุดต้นทุนคงที่ (100,000 บาท) ไปยังจุดต้นทุนทั้งสิ้น (300,000 บาท)
จุดตัดระหว่างเส้นทั้งสองนี้คือจุดคุ้มทุน ซึ่งอยู่ที่ 50 % ของกำลังการผลิต

4. กราฟในทางกลับกัน (Inverted graphic)

การสร้างกราฟตามวิธีนี้ทำให้ได้แผนภูมิการคุ้มทุนที่ไม่เหมือนกับกราฟที่เราได้เห็นมาแล้วทั้งหมด ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? เพราะตามวิธีที่ 4 นี้ เส้นต้นทุนคงที่จะอยู่เหนือไม่ใช่อยู่ใต้เส้นต้นทุนแปรผัน ถ้าสังเกตรูป 2—6 จะเห็นได้ว่ารูปสีวของต้นทุนแปรผันจะตั้งอยู่บนแกนนอนหรือแกน x มีเส้นรายรับทั้งสิ้นและเส้นต้นทุนทั้งสิ้น และจุดตัดของเส้นทั้งสองนี้คือจุดคุ้มทุน เช่นเดียวกับแผนภูมิที่สร้างขึ้นตามวิธีที่นิยมกัน

ในกิจการผลิตบางประเภท ต้นทุนแปรผันและราคาขายของผลิตภัณฑ์ (เช่นเก้าอี้) ค่อนข้างจะคงที่ ในกรณีเช่นนี้ ปัจจัยสำคัญที่มีอิทธิพลเหนือกำไรคือความสามารถที่จะควบคุมโสหุ้ยอุปกรณ์ซึ่งเป็นต้นทุนคงที่ ผลของโสหุ้ยอุปกรณ์ที่เพิ่มขึ้นที่มีต่อจุดคุ้มทุนและกำไร

ที่ธุรกิจได้รับจะพิจารณาได้จากแผนภูมิประเภทนี้ง่ายกว่าจากแผนภูมิที่สร้างขึ้นตามวิธีที่นิยมกัน ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? ทั้งนี้เพราะว่าความแตกต่างระหว่างต้นทุนคงที่สองระดับจะปรากฏเด่นชัดกว่า



รูป 2–6 วิธีกราฟในทางกลับกัน แผนภูมิรูปนี้แตกต่างไปจากแผนภูมิการคุ้มทุนที่เขียนตามวิธีที่นิยมกัน กล่าวคือ ต้นทุนคงที่จะอยู่เหนือ ไม่ใช่อยู่ใต้ต้นทุนแปรผัน เมื่อต้นทุนคงที่เท่ากับ 40,000 บาท จุดคุ้มทุนจะอยู่ที่ 400 หน่วย เมื่อต้นทุนคงที่เพิ่มขึ้นเป็น 50,000 บาท จุดคุ้มทุนจะเพิ่มขึ้นเป็น 500 หน่วย กำไรที่ได้รับจะสูงกว่าเมื่อระดับต้นทุนคงที่อยู่ในระดับต่ำกว่า ดังจะเห็นได้จากเส้นกำไร AB ซึ่งยาวกว่าเส้นกำไร CD

ตัวแปรผัน 3 ตัวที่มีผลกระทบต่อกำไร (Three Variables Affecting Profits)

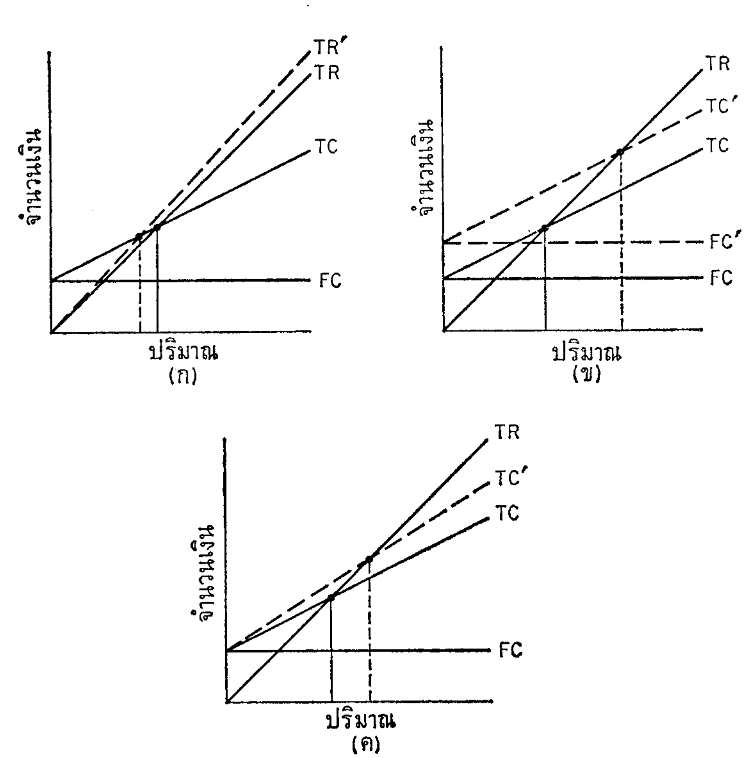
ปฏิกิริยาระหว่างรายรับ ต้นทุนคงที่และต้นทุนแปรผัน เป็นสิ่งกำหนดจำนวนเงินกำไรทั้งสิ้นที่ธุรกิจได้รับ ดังนั้น เหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นต่อไปนี้อาจทำให้ตัวเลขกำไรเปลี่ยนแปลงไปได้

ก. การเปลี่ยนแปลงในราคาขายต่อหน่วย หรือจำนวนหน่วย

ข. การเปลี่ยนแปลงในต้นทุนคงที่ในยอดรวม

ค. การเปลี่ยนแปลงในต้นทุนแปรผันต่อหน่วย

สำหรับตัวอย่างง่าย ๆ แต่อาจจะไม่ค่อยใกล้เคียงกับความเป็นจริงนัก เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงตามข้อ ก. สมมติว่าผู้ผลิตคนหนึ่งสามารถขึ้นราคาขายผลิตภัณฑ์ที่ตนผลิตจากหน่วยละ 1 บาท เป็น 1.25 บาท และไม่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงที่เป็นจำนวนมากในตัวแปรผันอื่น ๆ (เช่น ปริมาณขายที่คิดเป็นหน่วย) ผลที่มีต่อการคุ้มทุนที่เกิดขึ้นทันทีและเป็นผลที่น่าพึงพอใจก็คือ ผู้ผลิตคนนี้จะบรรลุจุดคุ้มทุนเร็วขึ้น (ในปริมาณการขายที่น้อยกว่า) ถ้าขายในราคาหน่วยละ 1.25 บาทแทนที่จะขายในราคาหน่วยละ 1 บาท ในสภาพที่เป็นจริงการขึ้นราคาเช่นนี้ย่อมเป็นทั้งสิ่งที่น่าสนใจและไม่น่าสนใจสำหรับผู้จัดการขาย การขึ้นราคา



รูป 2–7 การเปลี่ยนแปลงในตัวแปรผันที่มีผลกระทบต่อกำไร แสดงแยกต่างหากจากกัน 3 อย่าง เส้นเต็มใช้แทนสภาวการณ์เดิม เส้นไข่ปลาแสดงการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ

(ก) เพิ่มราคาขายต่อหน่วย เส้นตั้งฉากไข่ปลาแสดงให้เห็นว่าจุดคุ้มทุนลดต่ำลงมาได้อย่างไร

(ข) เพิ่มต้นทุนคงที่ เส้นตั้งฉากไข่ปลาแสดงให้เห็นว่าจุดคุ้มทุนเพิ่มสูงขึ้นเป็นจำนวนเท่าไร

(ค) การเปลี่ยนแปลงในที่นี้ได้แก่การเพิ่มทางด้านต้นทุนแปรผัน เช่นเดียวกับข้อ ข. เส้นตั้งฉากไข่ปลาจะแสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงนี้ทำให้จุดคุ้มทุนสูงขึ้น

ขายต่อหน่วยเป็นสิ่งที่น่าสนใจ กล่าวคือ ธุรกิจต้องขายสินค้าในจำนวนหน่วยที่น้อยกว่าเพื่อบรรลุซึ่งจุดคุ้มทุน แต่ก็เป็นวิธีที่ไม่น่าสนใจในแง่ที่ว่าในทางปฏิบัติ ผลิตภัณฑ์ที่มีราคาขายหน่วยละ 1.25 บาท ย่อมขายได้ยากกว่าผลิตภัณฑ์ที่มีราคาขายหน่วยละ 1 บาท ดูรูป 2—7 (ก)

การโฆษณาเป็นตัวอย่างที่ใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงตามข้อ ข. สมมติว่าเมื่อเริ่มปีปฏิทินใหม่ ผู้ผลิตคนหนึ่งได้ตั้งงบประมาณค่าโฆษณาไว้ 100,000 บาท ในระหว่างงวดสามเดือนที่สองของปีนั้น ผู้ผลิตคนนี้มีความรู้สึกว่าสถานการณ์ต่าง ๆ ทำให้ตนต้องทุ่มเททางด้านการโฆษณามากขึ้น จึงเพิ่มค่าโฆษณาสำหรับงวดครึ่งปีหลังเป็นจำนวน 50,000 บาท ทำให้ค่าโฆษณาสำหรับปีมีจำนวนทั้งสิ้น 150,000 บาท การเพิ่มทางด้านต้นทุนคงที่เช่นนี้จะทำให้จุดคุ้มทุนสูงขึ้น ดูรูป 2—7 (ข)

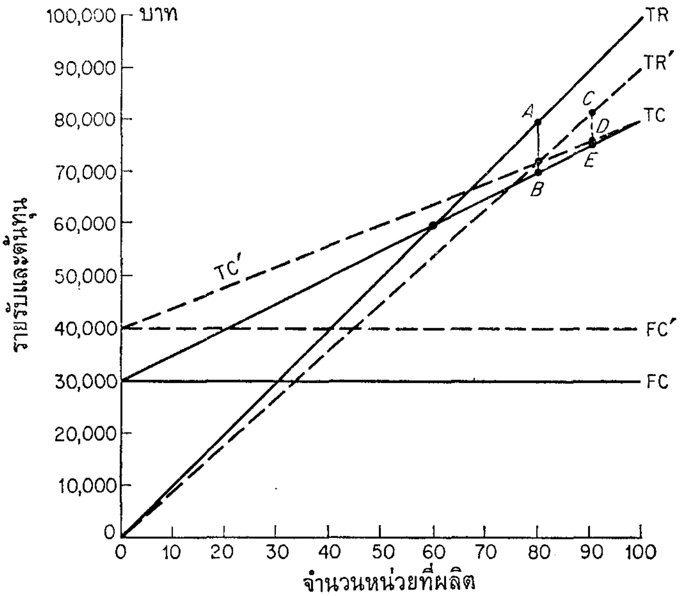
การเปลี่ยนแปลงตามข้อ ค. เป็นการเปลี่ยนแปลงในต้นทุนแปรผันต่อหน่วย สมมติว่าผู้ผลิตคนหนึ่งเริ่มนำเอาส่วนผสมที่มีคุณภาพดีกว่าและราคาสูงกว่ามาใช้ในการผลิตผลิตภัณฑ์ของตน หรือสมมติว่า ผู้ผลิตคนเดียวกันนี้ได้ทำการหีบห่อผลิตภัณฑ์ของตนเป็นพิเศษเป็นจำนวน 15 % ของการขายสำหรับปี เพื่อขายในฤดูคริสต์มาสเป็นครั้งแรก ทำให้ค่าหีบห่อสูงกว่าที่เคยเป็นอยู่เดิม ต้นทุนแปรผันที่เพิ่มขึ้นนี้จะทำให้จุดคุ้มทุนสูงขึ้น ดูรูป 2—7 (ค)

ปัญหาตัวอย่าง—ผลิตภัณฑ์เดียว

รูป 2—7 (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้นมีลักษณะที่เหมือนกันอยู่ประการหนึ่ง กล่าวคือต่างแสดงให้เห็นผลของการเปลี่ยนแปลงในตัวแปรผันตัวใดตัวหนึ่งเพียงตัวเดียว ที่มีต่อจุดคุ้มทุน แต่สถานการณ์ที่น่าสนใจกว่านี้ได้แก่กรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงในตัวแปรผันสองหรือทั้งสามตัวพร้อม ๆ กัน

เราเริ่มต้นด้วยสภาวการณ์เดิมและเขียนไว้เป็นเส้นเต็มในรูป 2—8 ต่อไป จึงพิจารณาว่าบริษัท (1) ดำริที่จะซื้อเครื่องจักรเพิ่มเติมอีกเครื่องหนึ่ง ทำให้ต้องใช้จำนวนคนงานที่ทำหน้าที่ทางด้านการผลิตลดน้อยลงไป และ (2) ในขณะเดียวกันจะลดราคาขายผลิตภัณฑ์ที่บริษัทผลิตได้ วัตถุประสงค์ในการลดราคาก็เพื่อทำให้ปริมาณขายสูงขึ้น นี่เป็นปัญหาเกี่ยวกับการตัดสินใจที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริง

ต่อไป เราจะตั้งข้อสมมติ 3 ข้อดังต่อไปนี้ (1) สมมติว่าเครื่องจักรใหม่ทำให้ต้นทุนคงที่เพิ่มขึ้น 10,000 บาท เพราะเครื่องจักรใหม่นี้ทำให้ค่าใช้จ่ายค่าเสื่อมราคามีจำนวนสูงขึ้น (2) สมมติว่าต้นทุนแปรผันลดลง 20 % เพราะจำนวนคนงานและค่าจ้างคนงานที่ทำการผลิตลดลง (3) สมมติว่าบริษัทลดราคาขายลง 10%



รูป 2–8 แสดงให้เห็นสถานการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงในตัวแปรผันทั้งสามในเวลาเดียวกัน

ข้อสมมติเดิม (เส้นเต็ม)		ข้อสมมติใหม่ (เส้นไข่ปลา)	
ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น	30,000 บาท	ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น	40,000 บาท
ต้นทุนแปรผันต่อหน่วย	500 บาท	ต้นทุนแปรผันต่อหน่วย	400 บาท
ราคาขายต่อหน่วย	1,000 บาท	ราคาขายต่อหน่วย	900 บาท
จุดคุ้มทุน	60 หน่วย	จุดคุ้มทุน	80 หน่วย
กำไร ณ ปริมาณ 80 หน่วย	10,000 บาท	กำไร ณ ปริมาณ 90 หน่วย	5,000 บาท

จากนั้น เขียนการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ เหล่านี้โดยใช้เส้นไข่ปลา ต้นทุนคงที่จะมียอดรวมใหม่ (FC′) 40,000 บาท (30,000 + 10,000 บาท) ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยใหม่จะเท่ากับ 400 บาท (500 บาทหักด้วย 20 %) สมการสำหรับเส้นต้นทุนทั้งสิ้นจะกลายเป็น TC′ = 40,000 บาท + 400x บาท และสมการสำหรับเส้นรายรับทั้งสิ้นจะกลายเป็น TR′ = 900x บาท ความสัมพันธ์เหล่านี้ปรากฏในรูป 2–8 โดยใช้เส้นไข่ปลา

ลองพิจารณาดูว่า การเปลี่ยนแปลงเหล่านี้จะก่อให้เกิดอะไรขึ้นบ้าง ถ้าบริษัททำการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ในขณะที่ปริมาณหรือจำนวนผลิตอยู่ที่ 80 หน่วย รายรับทั้งสิ้นซึ่งเดิมมีจำนวน 80,000 บาท จะลดลง 10 % เหลือ 72,000 บาท ต้นทุนแปรผันทั้งสิ้นซึ่งเดิมเท่ากับ 40,000 บาทก็จะลดลง 20 % เหลือ 32,000 บาท ส่วนต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นซึ่งเดิมเท่ากับ 30,000 บาท จะเพิ่มขึ้น 10,000 บาท เป็น 40,000 บาท เมื่อเป็นเช่นนี้จุดคุ้มทุนจะอยู่ในระดับที่สูงกว่าเดิมจากการผลิต 60 หน่วยเป็น 80 หน่วย รายรับทั้งสิ้นเท่ากับ 72,000 บาท ต้นทุนทั้งสิ้นก็เท่ากับ 72,000 บาท (32,000 + 40,000 บาท)

แต่การลดราคาลง 10% มีความมุ่งหมายที่จะทำให้จำนวนหน่วยที่ขายได้เพิ่มสูงขึ้น สมมติว่าแผนกขายได้คาดคะเนไว้ว่าการลดราคาขายจะทำให้ตัวเลขปริมาณหรือจำนวนผลิตเพิ่มจาก 80 หน่วยเป็น 90 หน่วย ถ้าเป็นไปตามนี้ ฐานะกำไรของธุรกิจจะปรากฏออกมาในรูปใด ?

ก่อนที่จะมีการเปลี่ยนแปลงทั้งสาม (ต้นทุนคงที่ ต้นทุนแปรผัน และราคาขาย) กำไรที่ธุรกิจได้รับจากการขาย 80 หน่วยเท่ากับ 10,000 บาท ซึ่งแสดงโดยเส้นเต็ม AB ในรูป 2–8 ณ ปริมาณการขายตามที่ได้คาดคะเนไว้ 90 หน่วย กำไรที่ธุรกิจได้รับจะเท่ากับ 5,000 บาท ซึ่งแสดงโดยเส้นไข่ปลา CD ในรูปเดียวกัน ดังนั้น เป็นการยากที่ธุรกิจจะทำการเปลี่ยนแปลงดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

แต่ถ้าธุรกิจนี้ไม่ซื้อเครื่องจักรใหม่ แต่ลดราคาขายลง 10 % และทำให้ปริมาณเพิ่มจาก 80 หน่วยเป็น 90 หน่วย ธุรกิจจะได้กำไรเท่าไร ? เราอาจจะวัดกำไรที่ธุรกิจได้รับโดยใช้เส้นรายรับเส้นใหม่ (TR′) แต่ยังคงใช้เส้นต้นทุนทั้งสิ้นเส้นเดิม (TC) กำไรที่ธุรกิจได้รับตามข้อสมมติใหม่นี้มีจำนวนน้อยกว่ากำไรที่ธุรกิจได้รับถ้าไม่ทำการเปลี่ยนแปลงใด ๆ เลย กล่าวคือ ระยะเส้นตั้งฉาก CE (แทนกำไรที่ได้รับประมาณ 6,000 บาท) จะสั้นกว่าระยะเส้นตั้งฉาก AB (แทนกำไรที่ได้รับประมาณ 10,000 บาท)

ปัญหาตัวอย่าง–ผู้ผลิตผลิตภัณฑ์หลายอย่าง

เท่าที่ได้อธิบายมาแล้วในบทนี้ เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ เราได้ยกตัวอย่างเฉพาะที่เกี่ยวกับ (1) ผู้ผลิตซึ่งผลิตผลิตภัณฑ์เพียงประเภทเดียว หรือ (2) ผู้ค้าปลีกที่ขายผลิตภัณฑ์เพียงประเภทเดียว แต่ผู้ผลิตส่วนมากมักจะผลิตผลิตภัณฑ์มากกว่าหนึ่งประเภท ในทำนองเดียวกัน ผู้ค้าปลีกส่วนมากก็ขายผลิตภัณฑ์มากกว่าหนึ่งประเภทเช่นกัน

ในขั้นแรกนี้ลองพิจารณาสภาพการณ์ของผู้ผลิตคนหนึ่งซึ่งผลิตและขายทั้งโต๊ะ ตะเกียง และเก้าอี้ ตัวเลขต้นทุนแปรผันได้มาจากแผนกการบัญชีต้นทุน ส่วนรายละเอียดเกี่ยวกับปริมาณการขายได้มาจากบันทึกของแผนกขาย

ผลิตภัณฑ์	ราคาขาย ต่อหน่วย	ต้นทุนแปรผัน ต่อหน่วย	% ของจำนวนเงินปริมาณขาย
โต๊ะ	80 บาท	60 บาท	20
ตะเกียง	100 บาท	80 บาท	30
เก้าอี้	140 บาท	100 บาท	50
			100

กำลังการผลิตของธุรกิจ = ปริมาณการขายทั้งสิ้น 30,000,000 บาท
รายจ่ายคงที่ต่อปี = 4,000,000 บาท

เราจะสังเกตได้ทันทีว่า โต๊ะแต่ละตัวทำส่วนช่วยเหลือต้นทุนคงที่ได้ 20 บาท ตะเกียง 20 บาท และเก้าอี้ 40 บาท ถ้าเปลี่ยนจำนวนเงินส่วนช่วยเหลือเหล่านี้เป็นอัตราร้อยละของราคาขาย เราจะได้

$$\text{โต๊ะ} : \frac{80\text{ บาท} - 60\text{ บาท}}{80\text{ บาท}} \times 100\% = \frac{20\text{ บาท}}{80\text{ บาท}} \times 100\% = 25\%$$

$$\text{ตะเกียง} : \frac{100\text{ บาท} - 80\text{ บาท}}{100\text{ บาท}} \times 100\% = \frac{20\text{ บาท}}{100\text{ บาท}} \times 100\% = 20\%$$

$$\text{เก้าอี้} : \frac{140\text{ บาท} - 100\text{ บาท}}{140\text{ บาท}} \times 100\% = \frac{40\text{ บาท}}{140\text{ บาท}} \times 100\% = 28\%$$

สูตรมูลฐานที่ใช้ในการคำนวณจะเป็นดังนี้

$$\text{ส่วนช่วยเหลือ} = \frac{\text{ราคาขาย} - \text{ต้นทุนแปรผัน}}{\text{ราคาขาย}} \times 100\% \qquad (2-4)$$

ขั้นต่อไป เราคูณส่วนช่วยเหลือของแต่ละผลิตภัณฑ์ด้วยอัตราร้อยละของปริมาณขายของผลิตภัณฑ์นั้น ๆ แล้วนำเอาตัวเลขที่ได้ทั้งหมดมารวมกันเข้า เราจะได้ส่วนช่วยเหลือทั้งสิ้นต่อการขายรวม 1 บาทของโต๊ะ ตะเกียง และเก้าอี้ ตัวเลขที่คำนวณได้จะปรากฏดังนี้

	ส่วนช่วยเหลือ		**% ของขาย**		
โต๊ะ	25 %	×	20 %	=	5 %
ตะเกียง	20 %	×	30 %	=	6 %
เก้าอี้	28 %	×	50 %	=	14 %
					25 %

25 % นี้เป็นส่วนช่วยเหลือทั้งสิ้นต่อการขายรวม 1 บาทที่ได้รับจากส่วนผสม การขายผลิตภัณฑ์ (product-sales mix) ที่เป็นอยู่ในขณะนี้ การขายสำหรับ 2 สัปดาห์แรกปรากฏดังนี้

โต๊ะ	2,100 ตัว	×	80 บาท	=	168,000 บาท (20%)	168,000 บาท	× 25%	=	42,000 บาท
ตะเกียง	2,520 ดวง	×	100 บาท	=	252,000 บาท (30%)	252,000 บาท	× 20%	=	50,400 บาท
เก้าอี้	3,000 ตัว	×	140 บาท	=	420,000 บาท (50%)	420,000 บาท	× 28%	=	117,600 บาท
					840,000 บาท (100%)	840,000 บาท			210,000 บาท

210,000 บาท เท่ากับ 25% ของ 840,000 บาท

จุดคุ้มทุนของธุรกิจอาจคำนวณได้ดังนี้

$$\text{จุดคุ้มทุน} = \frac{\text{ต้นทุนคงที่}}{\text{ราคา} - \text{ต้นทุนแปรผัน}}$$

$$= \frac{\text{ต้นทุนคงที่}}{\text{ส่วนช่วยเหลือ}}$$

$$= \frac{4{,}000{,}000 \text{ บาท}}{25\,\%}$$

$$= 16{,}000{,}000 \text{ บาท} \qquad (2\text{–}5)$$

การคำนวณกำไรหรือขาดทุนสำหรับปริมาณระดับต่าง ๆ คงไม่ยุ่งยากไปกว่าในกรณีที่เป็นปัญหาของผลิตภัณฑ์เดียว ตัวอย่างเช่น กำไรที่บริษัทนี้ได้รับ ณ ระดับ 80 % ของกำลังการผลิต (สมมติว่าส่วนผสมการขายยังคงเหมือนเดิม) อาจคำนวณได้ดังนี้

กำไร = รายรับทั้งสิ้น – ต้นทุนทั้งสิ้น

= 80 % (30,000,000 บาท) – ต้นทุนคงที่ – ต้นทุนแปรผัน

= 24,000,000 บาท – 4,000,000 บาท – 75 % (24,000,000 บาท)

= 24,000,000 บาท – 4,000,000 บาท – 18,000,000 บาท

= 2,000,000 บาท

ปัญหาตัวอย่าง – ผู้ค้าปลีก

สมมติว่า ในการวิเคราะห์ร้านขายเครื่องแต่งกายสุภาพบุรุษแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าได้ข้อเท็จจริงต่าง ๆ ดังนี้

สายผลิตภัณฑ์	Markup จากราคาขาย	% ของจำนวนเงินขาย
เสื้อเชิ้ต	40 %	30 %
กางเกง	30	10
ชุดสากล	35	40
เบ็ดเตล็ด	50	20

สมมติว่า ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นของผู้ค้าปลีกคนนี้เท่ากับ 50,000 บาท และต้นทุนแปรผันทั้งสิ้นมีจำนวนประมาณ 12 % ของขายสุทธิ จะสังเกตได้ว่าสำหรับเสื้อเชิ้ต ผู้ค้าปลีกคนนี้จะต้องจ่ายต้นทุนสินค้าที่ขายเท่ากับ 60 % ของจำนวนเงินที่เขาได้รับจากการขายเสื้อเชิ้ต ในทำนองเดียวกัน สำหรับกางเกง ผู้ค้าปลีกจะต้องจ่ายให้แก่ผู้ค้าส่ง 70 % ของราคาขายปลีก สำหรับชุดสากล 65 % ของราคาขายปลีก และสำหรับรายการเบ็ดเตล็ด 50 % ของราคาขาย กำไรขั้นต้นที่ผู้ค้าปลีกได้รับจากสายผลิตภัณฑ์แต่ละสาย (40 %, 30 %, 35 % และ 50 %)

จะถูกนำไปชดเชยต้นทุนแปรผันและต้นทุนคงที่ ถ้าหากว่ายังมีเหลือ จำนวนเงินที่เหลือคือกำไรของผู้ค้าปลีกคนนี้

การคำนวณในกรณีนี้ คล้ายคลึงกับผู้ผลิตผลิตภัณฑ์หลายอย่าง ดังนี้

	กำไรขั้นต้น		% ของขาย		
เสื้อเชิ้ต	40 %	×	30 %	=	12 %
กางเกง	30 %	×	10 %	=	3 %
ชุดสากล	35 %	×	40 %	=	14 %
เบ็ดเตล็ด	50 %	×	20 %	=	10 %
					39 %

ดังนั้น 39 % ที่ได้คือกำไรขั้นต้นรวมที่ได้รับจากสายผลิตภัณฑ์ต่าง ๆ ตามที่ได้สมมติไว้ โดยแสดงเป็นอัตราร้อยละของราคาขาย เมื่อหักกำไรขั้นต้นรวมนี้ด้วย 12 % เพื่อชดเชยต้นทุนแปรผันของผู้ค้าปลีกคนนี้แล้ว จะเหลือเป็นส่วนช่วยเหลือ 27 % การคำนวณจุดคุ้มทุนจะปรากฏดังนี้

$$\text{จุดคุ้มทุน} = \frac{\text{ต้นทุนคงที่}}{\text{ส่วนช่วยเหลือ}}$$

$$= \frac{50{,}000 \text{ บาท}}{27\%}$$

$$= 185{,}185 \text{ บาท}$$

วิธีคำนวณกำไรที่ผู้ค้าปลีกได้รับจากปริมาณการขาย 200,000 บาท จะเป็นดังนี้

รายรับทั้งสิ้น − ต้นทุนสินค้าที่ขาย = กำไรขั้นต้น

200,000 บาท − (61 % ของ 200,000 บาท) = 78,000 บาท

กำไร = กำไรขั้นต้น − (ต้นทุนคงที่ + ต้นทุนแปรผัน)

= 78,000 บาท − (50,000 บาท + 12 % ของ 200,000 บาท)

= 78,000 บาท − (50,000 บาท + 24,000 บาท)

= 78,000 บาท − 74,000 บาท

= 4,000 บาท (2—6)

จะสังเกตได้ว่า การเปลี่ยนแปลงใด ๆ ในส่วนผสมการขายผลิตภัณฑ์ (ตัวอย่างเช่น อัตราส่วนการขายเสื้อเชิ้ตสูงขึ้น หรืออัตราส่วนการขายชุดสากลลดลง) จะทำให้ (1) จุดคุ้มทุน และ (2) ตัวเลขจำนวนเงินกำไรที่ได้ เปลี่ยนแปลงไปด้วย

การวิเคราะห์การคุ้มทุนกับการกระทำการตัดสินใจ

การตัดสินใจของฝ่ายจัดการ ไม่ได้ขึ้นอยู่กับการวิเคราะห์การคุ้มทุนแต่เพียงอย่างเดียว แต่อย่างไรก็ดี ในสภาพการณ์หลายอย่าง การวิเคราะห์นี้ก็มีประโยชน์คุ้มค่าสมควรที่จะดำเนินการวิเคราะห์ การวิเคราะห์การคุ้มทุนเป็นเครื่องมือในการวางแผนอย่างหนึ่งของฝ่ายจัดการเป็นสิ่งช่วยในการกระทำการตัดสินใจ ฝ่ายจัดการย่อมไม่ต้องการเพียงคุ้มทุน ฝ่ายจัดการต้องการที่จะให้จำนวนเงินกำไรอยู่ในระดับสูงสุด หมายความว่า แผนภูมิการคุ้มทุนความจริงก็คือ แผนภูมิ "การวางแผนกำไร" นั่นเอง ต่อไปเราจะได้พิจารณาปัญหาบางอย่างที่ต้องตัดสินใจโดยใช้การวิเคราะห์การคุ้มทุน

การวางแผนผลิตภัณฑ์ (Product planning)

การตัดสินใจเกี่ยวกับการวางแผนผลิตภัณฑ์ ซึ่งบางครั้งเรียกว่า การตัดสินใจเกี่ยวกับ "การซื้อขายสินค้า" (merchandising) ต้องอาศัยการจัดทำแผนภูมิการคุ้มทุน เช่น การตัดสินใจเกี่ยวกับ "การลดและ/หรือ การเพิ่ม" ผลิตภัณฑ์ชนิดใดชนิดหนึ่ง ควรจะเพิ่มผลิตภัณฑ์ใหม่ชนิดหนึ่งที่ตนสนใจอยู่หรือไม่ เมื่อพิจารณาจากรายรับและต้นทุนตามที่ได้กะประมาณไว้ ควรตัดสินค้าบางอย่างออกจากสายผลิตภัณฑ์ที่มีอยู่ในปัจจุบันหรือไม่เมื่อพิจารณาผลที่มีต่อรายรับและต้นทุน นอกจากนี้ ก็มีเรื่องการหีบห่อถ้าใช้หีบห่อที่มีราคาแพงกว่า (หรือถูกกว่า) และนำเอาเครื่องจักรใหม่เข้ามาใช้ ย่อมมีผลกระทบต่อต้นทุนแปรผัน และต้นทุนคงที่ตลอดจนรายรับและปริมาณในลักษณะต่าง ๆ กัน

สมมติว่าผู้ผลิตคนหนึ่ง กำลังพิจารณาว่าเขาควรตัดผลิตภัณฑ์ชนิดหนึ่งออกจากสายผลิตภัณฑ์ของตน และชดเชยด้วยผลิตภัณฑ์อีกชนิดหนึ่งหรือไม่ ข้อมูลต้นทุนและจำนวนผลิตเท่าที่เป็นอยู่ในปัจจุบัน ปรากฏดังนี้

ผลิตภัณฑ์	ราคาขาย	ต้นทุนแปรผันต่อหน่วย	% ของขาย
หิ้งหนังสือ	บาท 120	บาท 80	30 %
โต๊ะ	200	120	20
เตียง	400	240	50
	ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นต่อปี	1,500,000 บาท	
	การขายปีก่อน	5,000,000 บาท	

การเปลี่ยนแปลงที่กำลังพิจารณาอยู่คือ การตัดสายผลิตภัณฑ์โต๊ะออกไปและนำเอาตู้เข้ามาแทน ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงตัดและเพิ่มสายผลิตภัณฑ์ดังกล่าว ผู้ผลิตได้ทำการพยากรณ์เกี่ยวกับข้อมูลต้นทุนและจำนวนผลิตไว้ดังนี้

ผลิตภัณฑ์	ราคาขาย	ต้นทุนแปรผันต่อหน่วย	% ของขาย
หิ้งหนังสือ	บาท 120	บาท 80	50 %
ตู้	320	120	10
เตียง	400	240	40
	ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นต่อปี	1,500,000 บาท	
	การขายปีนี้	5,200,000 บาท	

ผู้ผลิตควรจะดำเนินการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวหรือไม่ ?

การคำนวณกำไรจากสายผลิตภัณฑ์ที่มีอยู่ในปัจจุบันปรากฏดังนี้

$$\frac{120 \text{ บาท} - 80 \text{ บาท}}{120 \text{ บาท}} \times 30\,\% = 0.10$$

$$\frac{200 \text{ บาท} - 120 \text{ บาท}}{200 \text{ บาท}} \times 20\,\% = 0.08$$

$$\frac{400 \text{ บาท} - 240 \text{ บาท}}{400 \text{ บาท}} \times 50\,\% = \underline{0.20}$$

ส่วนช่วยเหลือ $\underline{0.38}$

ส่วนช่วยเหลือ = 5,000,000 บาท × 0.38 = 1,900,000 บาท

กำไร = 1,900,000 บาท − 1,500,000 บาท = 400,000 บาท

กำไรจากสายผลิตภัณฑ์ต่าง ๆ ตามข้อเสนอใหม่ปรากฏดังนี้

$$\frac{120 \text{ บาท} - 80 \text{ บาท}}{120 \text{ บาท}} \times 50\,\% = 0.17$$

$$\frac{320 \text{ บาท} - 120 \text{ บาท}}{320 \text{ บาท}} \times 10\,\% = 0.06$$

$$\frac{400 \text{ บาท} - 240 \text{ บาท}}{400 \text{ บาท}} \times 40\,\% = \underline{0.16}$$

ส่วนช่วยเหลือ $\underline{0.39}$

ส่วนช่วยเหลือ = 5,200,000 บาท × 0.39 = 2,028,000 บาท

กำไร = 2,028,000 บาท − 1,500,000 บาท = 528,000 บาท

กำไรตามข้อเสนอใหม่ ปรากฏว่ามากกว่ากำไรเดิมที่ได้รับ ผู้ผลิตควรจะดำเนินการเปลี่ยนแปลงตามข้อเสนอนี้

การตั้งราคา (Pricing)

ราคาที่ผู้ขายกำหนดย่อมมีผลกระทบต่อรายรับทั้งสิ้น และปริมาณหรือจำนวนผลิต แต่ในขณะเดียวกัน ต้นทุนแปรผันและต้นทุนคงที่ที่ต้องจ่ายก็มีผลกระทบต่อราคาขายเช่นกัน ฉะนั้น จึงเกิดปัญหาเกี่ยวกับการตั้งราคาขายเริ่มแรก ปัญหาเกี่ยวกับการเพิ่มและการลดราคาขาย อุปสงค์และตารางอุปสงค์มีบทบาทขั้นมูลฐานต่อการกำหนดราคา ที่มาของกำไรจากการดำเนินงานโดยปกติก็ได้มาจากกำไรขั้นต้น

สมมติว่า ผู้ผลิตคนหนึ่งได้พัฒนาผลิตภัณฑ์ใหม่ชนิดหนึ่ง แต่เขามีเงินทุนจำกัด คู่แข่งขันได้ทำการขายผลิตภัณฑ์ที่มีคุณภาพด้อยกว่าในราคาหน่วยละ 6 บาท ผู้ผลิตคนนี้ต้องจ่ายต้นทุนคงที่ 50,000 บาท ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยเท่ากับ 1.50 บาท เขากำลังพิจารณาว่ากำไรที่ได้รับจะเป็นเท่าใด ถ้าตั้งราคาขายสำหรับผู้บริโภคหน่วยละ 10.00 บาท 7.50 บาทและ 4.95 บาท ดูตารางข้างล่างนี้

ราคาขายสำหรับผู้บริโภค	10.00 บาท	7.50 บาท	4.95 บาท
ส่วนลดแก่ผู้ค้าส่งและผู้ค้าปลีก	− 5.00 บาท	− 3.75 บาท	− 2.48 บาท
จำนวนที่ผู้ผลิตได้รับ	5.00 บาท	3.75 บาท	2.47 บาท
ต้นทุนแปรผัน	− 1.50 บาท	− 1.50 บาท	− 1.50 บาท
ส่วนช่วยเหลือที่จะชดเชยต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น	3.50 บาท	2.25 บาท	0.97 บาท
จุดคุ้มทุน เป็นหน่วย			
ต้นทุนคงที่ทั้งหมด/ส่วนช่วยเหลือ	14,285	22,222	51,546

ถ้าตั้งราคาขายหน่วยละ 4.95 บาท ผู้ผลิตจะต้องขาย 51,546 หน่วยจึงคุ้มทุนพอดี แต่ถ้าตั้งราคาขายหน่วยละ 10.00 บาท จุดคุ้มทุนจะอยู่ที่ 14,285 หน่วย

การเลือกและการเปลี่ยนแทนเครื่องมืออุปกรณ์

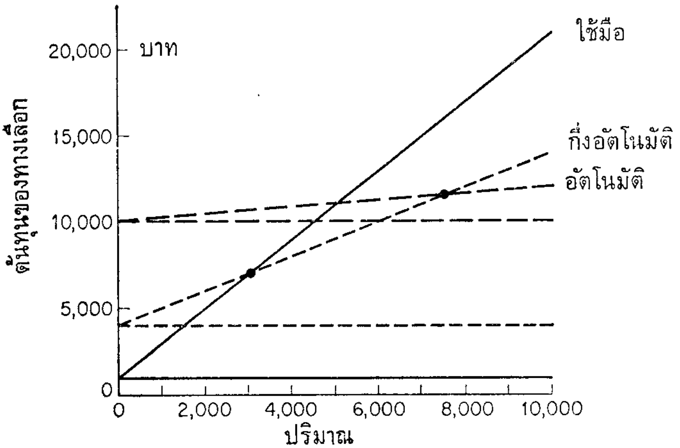
(Equipment selection and replacement)

การที่ธุรกิจเลือกซื้อเครื่องมืออุปกรณ์ชนิดใดชนิดหนึ่งในตอนเริ่มแรก ย่อมมีผลระยะยาวต่อการทำกำไรได้ของธุรกิจนั้น เครื่องมืออุปกรณ์ที่ใช้มีผลกระทบต่อต้นทุน ปริมาณและรายรับ ในเวลาต่อมาอาจมีเครื่องมืออุปกรณ์ที่ได้รับการปรับปรุงให้ดีขึ้นออกมาใหม่ ทำให้เครื่องมืออุปกรณ์เก่าล้าสมัยหรือมิฉะนั้นก็สิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายมาก เครื่องมืออุปกรณ์ที่ออกใหม่อาจช่วยประหยัดแรงงาน ประหยัดวัตถุดิบ ได้จำนวนผลิตมากกว่า หรือทำให้คุณภาพของผลิตภัณฑ์สูงขึ้น เครื่องมืออุปกรณ์ที่ใหม่กว่าอาจทำให้จุดคุ้มทุนของธุรกิจลดต่ำลงมา

ตัวอย่างง่าย ๆ มีดังนี้ ผู้ผลิตคนหนึ่งอาจเลือกใช้เครื่องจักรชนิดใดชนิดหนึ่งจากเครื่อง

จักรที่มีอยู่ 3 เครื่อง (1) เครื่องจักรอัตโนมัติ ต้องจ่ายต้นทุนคงที่ปีละ 10,000 บาท และต้นทุนแปรผันต่อหน่วย 20 สตางค์ (2) เครื่องจักรกึ่งอัตโนมัติต้องจ่ายต้นทุนคงที่ปีละ 4,000 บาท ถ้าใช้เครื่องจักรเครื่องนี้ ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยเท่ากับ 1.00 บาท (3) เครื่องจักรที่ใช้มือต้องจ่ายต้นทุนคงที่ปีละ 1,000 บาท ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยเท่ากับ 2.00 บาท

จากรูป 2—9 จะเห็นได้ว่า การใช้เครื่องจักรที่ใช้มือจะประหยัดที่สุดจนถึงปริมาณ 3,000 หน่วย ในช่วง 3,000 ถึง 7,500 หน่วย การใช้เครื่องจักรกึ่งอัตโนมัติจะประหยัดที่สุด แต่ถ้าสูงกว่า 7,500 หน่วยไปแล้ว การใช้เครื่องจักรอัตโนมัติจะประหยัดกว่าเครื่องจักรอื่นอีกสองเครื่อง



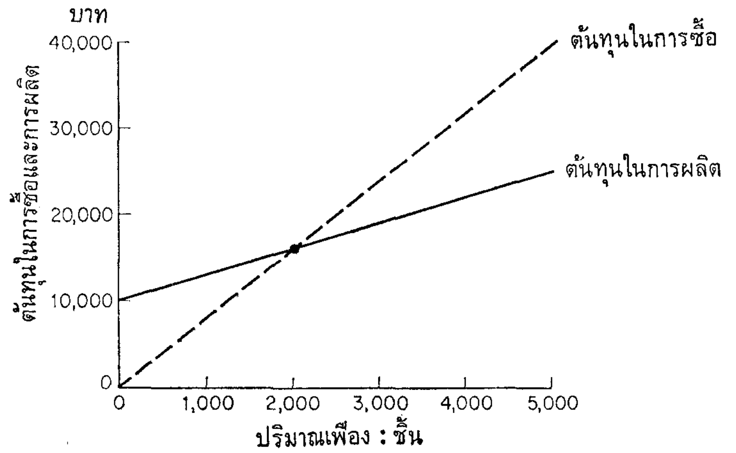
รูป 2–9 การวิเคราะห์การคุ้มทุน : เครื่องจักรเครื่องใดประหยัดที่สุด ?

การตัดสินใจผลิตหรือซื้อ (The make-or-buy decision)

ผู้ผลิตหลายคนอาจเลือกผลิตส่วนประกอบ ชิ้นส่วน หรือส่วนผสมบางอย่างเพื่อนำไปใช้ประกอบเป็นส่วนหนึ่งของผลิตภัณฑ์สำเร็จรูปของตน หรืออาจซื้อจากบุคคลภายนอกก็ได้ ผู้ผลิตอาหารกระป๋องอาจทำกระป๋องเองหรือซื้อจากบุคคลภายนอก ผู้ผลิตรถยนต์อาจทำหัวเทียนเองหรือซื้อจากบุคคลภายนอก การวิเคราะห์การคุ้มทุนสามารถช่วยผู้ผลิตทำการตัดสินใจว่าควรผลิตเองหรือซื้อจากบุคคลภายนอก

สมมติว่า ผู้ผลิตเครื่องจักรคนหนึ่งจะต้องใช้เฟืองเครื่องจักรแบบพิเศษในการผลิตเครื่องจักรชนิดหนึ่ง ในขณะนี้เขาซื้อเฟืองแบบนี้จากโรงหล่อในราคาชิ้นละ 8 บาท ผู้ผลิตคนนี้อาจผลิตเฟืองแบบนี้ด้วยตนเอง โดยซื้อเครื่องจักรใหม่ ซึ่งจะทำให้ต้นทุนคงที่เพิ่มขึ้นปีละ 10,000 บาท และต้นทุนแปรผันทั้งสิ้นเท่ากับ 3 บาทต่อชิ้น

ถ้าพิจารณาจากรูป 2—10 จะเห็นได้ว่า ถ้าผู้ผลิตต้องการเฟืองมากกว่า 2,000 ชิ้นต่อปี การผลิตเฟืองด้วยตนเองดีกว่าซื้อจากบุคคลภายนอก



รูป 2–10 การวิเคราะห์การคุ้มทุน : ผู้ผลิตควรจะผลิตเพืองเอง หรือซื้อจากบุคคลภายนอก ?

ส่วนผสมการส่งเสริม (Promotion mix)

ผู้ขายทุกคนต่างกำหนดและใช้ "ส่วนผสมการส่งเสริม" ที่ตนคิดว่าจะทำกำไรได้ดีที่สุด การส่งเสริมที่ผู้ขายนำมาใช้อาจจัดจำแนกอย่างกว้าง ๆ เป็น 3 ประเภท กล่าวคือ การขายโดยบุคคล (Personal selling) การโฆษณา (Advertising) และการส่งเสริมการขาย (Sales promotion) แต่ละวิธียังอาจแยกเป็นวิธีย่อยต่าง ๆ กันออกไป นอกจากนี้ อัตราส่วนระหว่างการขายโดยบุคคล การโฆษณาและการส่งเสริมการขาย ที่ประกอบขึ้นเป็นส่วนผสมการส่งเสริมของผู้ขายแต่ละคนก็แตกต่างกัน สมมติว่าผู้ผลิตคนหนึ่งกำลังคิดที่จะเพิ่มพนักงานขายที่รับเงินเดือนประจำขึ้นอีก 5 คน ผู้ผลิตอีกคนหนึ่งอาจกำลังพิจารณาว่า เขาควรจะทุ่มเทเงินอีก 200,000 บาทในการโฆษณาหรือไม่ การวิเคราะห์การคุ้มทุนจะแสดงให้เห็นผลของต้นทุนคงที่ใหม่ที่มีต่อจุดคุ้มทุน

เพื่อเป็นการอธิบาย สมมติว่าผู้ผลิตคนหนึ่งขายผลิตภัณฑ์ของตนในราคาหน่วยละ 5 บาท โดยจ่ายต้นทุนแปรผันหน่วยละ 2 บาท และต้นทุนคงที่ทั้งสิ้น 60,000 บาท ส่วนช่วยเหลือต่อหน่วยเท่ากับ 3 บาท และ 60,000 บาท/3 บาท = จุดคุ้มทุน 20,000 หน่วย การขาย 30,000 หน่วยจะทำกำไรได้ 30,000 บาท

จะมีอะไรเกิดขึ้นบ้าง ถ้าผู้ผลิตคนนี้เริ่มจ่าย 3,000 บาทเพื่อการโฆษณา ? ต้นทุนคงที่จะเพิ่มขึ้นเป็น 63,000 บาท และ 63,000 บาท/3 บาท = จุดคุ้มทุน 21,000 หน่วย เพื่อที่จะได้กำไร 30,000 บาท ผู้ผลิตต้องขาย 31,000 หน่วย การคำนวณหาคำตอบโดยวิธีพีชคณิต จะเป็นดังนี้

สมมติ x	=	จำนวนผลิต
กำไร	=	รายรับ – ค่าใช้จ่าย
30,000 บาท	=	x (5 บาท) – 63,000 บาท – x (2 บาท)
	=	5x บาท – 63,000 บาท – 2x บาท
93,000 บาท	=	3x บาท
	=	31,000 หน่วย

วิถีการจำหน่าย (Distribution channels)

ผู้ผลิตทุกคนไม่ว่าจะเป็นผู้ผลิตสินค้าสำหรับตลาดผู้บริโภค หรือตลาดอุตสาหกรรม หรือตลาดทั้งสอง จะต้องตัดสินใจว่าเขาควรจะนำสินค้าของตนออกไปสู่ตลาดอย่างไร ตัวอย่างเช่น ผู้ผลิตผลิตภัณฑ์อาหารอาจกำลังพิจารณาว่าควรใช้สำนักงานประจำท้องถิ่น และหน่วยงานขายของตนแทนนายหน้าหรือไม่ หรือผู้ผลิตผ้าอาจกำลังพิจารณาว่าเขาควรจะเลิกใช้ตัวแทนการขายโดยจัดให้มีแผนกขายและหน่วยงานขายของตน และเริ่มใช้พนักงานขายออกไปติดต่อกับผู้ซื้อหรือไม่ หรือปัญหาที่แตกต่างไปจากนี้ ผู้ผลิตคนหนึ่งอาจจะกำลังปรึกษาหารือเกี่ยวกับการทำกำไรได้ของการจำหน่ายแต่ผู้เดียว (exclusive distribution) โดยยอมให้มีผู้ค้าปลีกเพียงคนเดียวในเมืองหนึ่ง ๆ เปรียบเทียบกับการจำหน่ายแบบคัดเลือก (selective distribution) โดยยอมให้มีผู้ค้าปลีกหลาย ๆ คนในเมืองหนึ่ง ๆ ว่าวิธีใดจะทำกำไรได้ดีกว่ากัน ภายใต้กรณีต่าง ๆ ดังกล่าวเราอาจนำเอาแผนภูมิการคุ้มทุนเข้ามาใช้ได้

สมมติว่า ผู้ผลิตคนหนึ่งที่นครหลวง ฯ ทำการจำหน่ายสินค้าไปยังภาคเหนือ ภาคกลาง ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ และภาคใต้โดยผ่านตัวแทนผู้ผลิต (manufacturers' agent) ปริมาณขายปีก่อนมีจำนวน 2 ล้านบาท ผู้ผลิตต้องจ่ายให้ตัวแทนเป็นค่านายหน้า 7 % จำนวนเงิน 140,000 บาท ผู้ผลิตคนนี้กำลังพิจารณาเปลี่ยนวิถีการจำหน่าย โดยใช้หน่วยงานขายประจำท้องถิ่นของตนเองแทนที่จะใช้ตัวแทนผู้ผลิต พนักงานทุกคนที่หน่วยงานขายจะได้รับเงินเดือนประจำในอัตราตามที่กำหนดไว้

คำถามข้อแรกก็คือ ในปีแรกที่นำวิถีการจำหน่ายใหม่มาใช้ จำนวนต้นทุนคงที่จะเพิ่มขึ้นจริงเท่าไร และมีจำนวนมากหรือน้อยกว่า 140,000 บาท ? คำถามถัดไปก็คือ ในปีแรกนั้นรายรับจะมีจำนวนมากหรือน้อยกว่า 2 ล้านบาท ? ในกรณีนี้เราอาจนำเอาการวิเคราะห์การคุ้มทุนเข้ามาใช้ได้เช่นกัน

ข้อสรุป

การตัดสินใจทั้งหมดเท่าที่ได้กล่าวมาแล้ว เป็นเพียงตัวอย่างเท่านั้นและยังไม่สมบูรณ์ในตัวของมันเอง สิ่งที่ได้กล่าวไปแล้วทั้งหมดเป็นตัวอย่างเกี่ยวกับการทำการตัดสินใจ ซึ่งเป็น

หน้าที่อย่างหนึ่งของผู้จัดการในระดับสูง และเป็นตัวอย่างการตัดสินใจที่มีผลต่อกำไรที่ธุรกิจได้รับเป็นอย่างมาก ในกรณีเช่นนี้ เราอาจจะนำเอาการวิเคราะห์การคุ้มทุนเข้ามาใช้ให้เกิดประโยชน์ได้

ข้อควรระวังเกี่ยวกับการวิเคราะห์การคุ้มทุน

ในการใช้ประโยชน์การวิเคราะห์การคุ้มทุน มีข้อควรระวังและข้อจำกัดบางประการที่ควรเรียนรู้และทำความเข้าใจ ดังต่อไปนี้

1. การวิเคราะห์การคุ้มทุนจะใช้ได้ และเป็นประโยชน์ก็ต่อเมื่อธุรกิจมีระบบการบัญชีต้นทุนที่ดี ธุรกิจต้องนำเอาเทคนิคและวิธีการการบัญชีบริหารที่ถูกต้องเข้ามาใช้ กล่าวโดยสรุปต้องมีตัวเลขที่เพียงพอ และตัวเลขเหล่านั้นเป็นตัวเลขที่ถูกต้องใช้ได้

2. ข้อสมมติขั้นมูลฐานในการวิเคราะห์การคุ้มทุนมีอยู่ว่า ความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุน–รายได้–ปริมาณ เป็นความสัมพันธ์ในลักษณะเส้นตรง ข้อสมมตินี้จะเป็นจริงเฉพาะภายในช่วงจำนวนผลิตแคบ ๆ เท่านั้น ตัวอย่างเช่น การวิเคราะห์นี้อาจจะนำไปใช้ในการตัดสินใจว่า

(ก) ควรจะตั้งราคาขาย 50 สตางค์ หรือ 60 สตางค์ ?

(ข) ปริมาณการผลิตควรจะอยู่ที่ 80% ของกำลังการผลิตแทนที่จะเป็น 85% หรือไม่ ?

(ค) ควรจะจ่ายค่าใช้จ่ายในการโฆษณา 100,000 บาท หรือ 115,000 บาท ? หรือ

(ง) ควรจะบรรจุผลิตภัณฑ์ในหีบห่อที่มีต้นทุน 70 สตางค์ แทนหีบห่อที่มีต้นทุน 90 สตางค์ หรือไม่ ?

3. การที่เส้นรายรับทั้งสิ้นเป็นเส้นตรงเนื่องมาจากข้อสมมติว่า ณ ราคาหนึ่งที่กำหนดไว้ เราอาจขายผลิตภัณฑ์ในปริมาณใด ๆ ก็ได้ ในระดับราคาที่แตกต่างกันเราต้องทำการคำนวณเส้นรายรับทั้งสิ้นใหม่เสมอแทนที่จะมีเส้นรายรับทั้งสิ้นเพียงเส้นเดียว เพราะถ้ามิฉะนั้นแล้วก็เท่ากับว่าเราไม่ได้นำเอาอุปสงค์และตารางอุปสงค์เข้ามาพิจารณาและให้น้ำหนักตามที่ควรจะเป็น

4. การวิเคราะห์การคุ้มทุนไม่ใช่เครื่องมือสำหรับการใช้ประโยชน์ในระยะยาว การใช้ประโยชน์จากการวิเคราะห์การคุ้มทุนควรจะจำกัดเฉพาะระยะสั้นเท่านั้น จากข้อเท็จจริงนี้ การวิเคราะห์การคุ้มทุนควรจัดทำสำหรับงวดระยะเวลางบประมาณของธุรกิจเท่านั้น ซึ่งปกติก็คือปีปฏิทิน

5. ขอบเขตที่รวมไว้ในการวิเคราะห์ควรจะมีจำกัด ถ้ารวมผลิตภัณฑ์หลาย ๆ ชนิด แผนกงานหลาย ๆ แผนก หรือโรงงานหลาย ๆ แห่งเข้าไว้ด้วยกัน แล้วสร้างเป็นแผนภูมิการคุ้มทุนเพียงรูปเดียวแล้ว ผลการปฏิบัติงานที่ดีและที่เลวก็จะคละกันในผลงานทั้งหมดได้โดยง่าย

6. ถ้าข้อควรระวังข้อที่ 5 เป็นจริง การเก็บข้อมูลโดยแยกตามผลิตภัณฑ์หรือโดยชื่อยี่ห้อ (ซึ่งเป็นสิ่งที่ฝ่ายจัดการต้องการ) อาจทำได้ยาก

7. การวิเคราะห์การคุ้มทุนมีประโยชน์ในสถานการณ์ที่ค่อนข้างจะมีเสถียรภาพ และเคลื่อนไหวไปอย่างช้า ๆ มากกว่าในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วและไม่แน่ไม่นอน ข้อควรจำมีอยู่ว่า แผนภูมิการคุ้มทุนเป็นเครื่องมือวิเคราะห์สภาพที่อยู่คงที่มากกว่า

8. แผนภูมิการคุ้มทุนเสนอความสัมพันธ์ของต้นทุน–รายรับ–ปริมาณ ในลักษณะที่ง่ายจนเกินไป ปัจจัยทั้งสามย่อมอยู่ภายใต้อิทธิพลภายนอกและอิทธิพลของปัจจัยอีกสองปัจจัย สิ่งที่สำคัญที่สุดก็คือ การวิเคราะห์การคุ้มทุน ถือว่าเป็นเครื่องแนะแนวสำหรับการตัดสินใจ ไม่ใช่เป็นสิ่งที่ใช้แทนดุลพินิจ วิจารณญาณ และสามัญสำนึกของฝ่ายจัดการได้

สรุป

ผู้ผลิตและผู้ค้าปลีกส่วนมากดำเนินงานในระดับที่ปริมาณการขายเพิ่มขึ้น จะทำให้กำไรที่ได้รับเพิ่มตามไปด้วย โดยปกติ ต้นทุนคงที่ทั้งสิ้นที่ลดลงจะทำให้จุดคุ้มทุนลดลงด้วยในทำนองเดียวกัน ต้นทุนแปรผันต่อหน่วยที่ลดลงก็จะทำให้จุดคุ้มทุนลดลงเช่นกัน ดังนั้นถ้าต้นทุนทั้งสองประเภทดังกล่าวลดลงพร้อม ๆ กัน จะทำให้จุดคุ้มทุนลดลงในอัตราที่เร็วและมากกว่า ถ้าสามารถเพิ่มราคาขายโดยไม่ทำให้ตัวแปรผันอื่น ๆ เปลี่ยนแปลง จุดคุ้มทุนก็จะลดลงเช่นกัน

แผนภูมิการคุ้มทุนเป็นเพียงเครื่องมือเชิงปริมาณอย่างง่าย ที่จะช่วยฝ่ายจัดการในการกะประมาณล่วงหน้า ถึงผลของการตัดสินใจทางเศรษฐกิจบางอย่างที่มีต่อกำไรของธุรกิจ แผนภูมิการคุ้มทุนใช้สำหรับการวางแผนกำไร ฝ่ายจัดการย่อมไม่ต้องการเพียงคุ้มทุนเท่านั้น แต่ต้องการที่จะทำกำไร

แบบฝึกหัด

2–1 บริษัท สมิธการผลิต จำกัด ทำการผลิตและจำหน่ายเก้าอี้ จากการวิเคราะห์ข้อมูลทางการบัญชี ปรากฏว่า

ต้นทุนคงที่	1,000,000 บาทต่อปี
ต้นทุนแปรผัน	40 บาทต่อเก้าอี้ 1 ตัว
กำลังการผลิต	20,000 ตัวต่อปี
ราคาขาย	140 บาทต่อเก้าอี้ 1 ตัว

ก. ให้คำนวณจุดคุ้มทุน เป็นจำนวนเก้าอี้

ข. หาจำนวนเก้าอี้ที่บริษัทต้องขายเพื่อจะได้กำไร 600,000 บาท

ค. ต้นทุนคงที่ต่อเก้าอี้ 1 ตัว ณ กำลังการผลิต 75% เท่ากับเท่าใด

2–2 บริษัท เทเลอร์อาหารสัตว์ จำกัด ผลิตอาหารสำหรับไก่ สุกร ปศุสัตว์ และสุนัข จากบันทึกต่าง ๆ ที่มีอยู่ เราได้ข้อมูลต่าง ๆ ดังนี้

อาหารสำหรับ	ราคาขายต่อตัน	VC ต่อตัน	% ของจำนวนเงินขายทั้งสิ้น
ไก่	บาท 600	บาท 300	40%
สุกร	800	320	20%
ปศุสัตว์	720	320	25%
สุนัข	640	240	15%
ต้นทุนคงที่ต่อปี : 1,600,000 บาท			

ก. ให้หาส่วนช่วยเหลือทั้งสิ้นต่อการขายรวม 1 บาท จากส่วนผสมผลิตภัณฑ์ที่เป็นอยู่ในขณะนี้

ข. หาจุดคุ้มทุนเป็นจำนวนเงิน

2–3 ในขณะนี้ ร้านรองเท้าโฮม มีรองเท้าสุภาพสตรีอยู่ 3 ประเภท ทางร้านกำลังพิจารณายกเลิกการขายรองเท้าประเภทหนึ่ง และเพิ่มรองเท้าอีกสองประเภท จากข้อมูลที่ให้ไว้ข้างล่างนี้ ให้ท่านตัดสินใจว่าทางร้านควรจะดำเนินการเปลี่ยนแปลงนี้หรือไม่ ให้เหตุผลของท่านสนับสนุน

รองเท้าที่มีอยู่ในขณะนี้

ประเภท	ราคาขาย	VC / คู่	การขายปีนี้
พื้นเรียบ	บาท 100	บาท 60	บาท 300,000
กอล์ฟ	160	120	100,000
หุ้มส้น	200	120	600,000
			1,000,000
ต้นทุนคงที่ : 300,000 บาท			

ถ้ายอมรับข้อเสนอใหม่ จะมีรองเท้าต่าง ๆ ดังนี้

ประเภท	ราคาขาย	VC / คู่	การขายที่คาดไว้
พื้นเรียบ	บาท 100	บาท 60	บาท 250,000
หุ้มส้น	200	120	600,000
เดินเล่น	160	80	100,000
ห้องนอน	60	30	50,000
			1,000,000

2–4 บริษัท เอสการพิมพ์ จำกัด ต้องการตั้งราคาขายสำหรับหนังสือใหม่เล่มหนึ่ง ผู้จัดการขายกำลังพิจารณาราคาต่าง ๆ 3 ราคา 8 บาท 6 บาท และ 4.50 บาท ต้นทุนคงที่ที่ปันส่วนมายังหนังสือเล่มนี้มีจำนวน 8,000 บาท ต้นทุนแปรผันเท่ากับ 3 บาทต่อเล่ม การพยากรณ์การขายปรากฏดังนี้

4,000 เล่ม ในราคา 8 บาทต่อเล่ม

6,000 เล่ม ในราคา 6 บาทต่อเล่ม

10,000 เล่ม ในราคา 4.50 บาทต่อเล่ม

บริษัทควรจะตั้งราคาขายสำหรับหนังสือเล่มนี้เท่าไร ?

2–5 ผู้ผลิตอุปกรณ์การไฟฟ้าคนหนึ่งกำลังพิจารณาการติดตั้งเครื่องจักรเครื่องหนึ่ง จากเครื่องจักรที่มีอยู่ 2 เครื่อง การพยากรณ์การขายในระยะยาวชี้ให้เห็นว่า สำหรับระยะเวลา 5 ปีข้างหน้า การขายจะมีจำนวนไม่ต่ำกว่า 8,200 หน่วยต่อปี อายุการใช้งานที่คาดไว้ของเครื่องจักรแต่ละเครื่องเท่ากับ 5 ปี เครื่องจักรเครื่องแรกจะเพิ่มต้นทุนคงที่ 20,000 บาทต่อปี แต่จะลดต้นทุนแปรผันลง 6 บาทต่อหน่วย เครื่องจักรเครื่องที่สองจะเพิ่มต้นทุนคงที่ 4,000 บาทต่อปี แต่จะลดต้นทุนแปรผันลง 4 บาทต่อหน่วย ต้นทุนแปรผันในขณะนี้เท่ากับ 20 บาทต่อหน่วย ผู้ผลิตจะไม่ได้เปรียบหรือเสียเปรียบไม่ว่าจะซื้อเครื่องจักรเครื่องแรก หรือเครื่องที่สอง ณ จำนวนผลิตระดับใด ? ผู้ผลิตควรจะซื้อเครื่องจักรเครื่องใด ?

2–6 ในขณะนี้ บริษัท บราวน์มอเตอร์ จำกัด ซื้อลิ้นไอเสียเพื่อใช้ในการผลิตมอเตอร์ในราคาหน่วยละ 50 บาท ในการกะประมาณต้นทุนที่บริษัทจะต้องจ่าย ถ้าผลิตลิ้นไอเสียด้วยตนเองปรากฏว่า ต้นทุนคงที่เท่ากับ 96,000 บาทต่อปี และต้นทุนแปรผันเท่ากับ 25 บาทต่อหน่วย มอเตอร์แต่ละเครื่องต้องใช้ลิ้นไอเสียเพียงอันเดียว และกำลังการผลิตของบริษัทเท่ากับ 6,000 เครื่องต่อปี บริษัทควรจะทำการผลิตลิ้นไอเสียเอง ณ อัตราร้อยละเท่าไรของกำลังการผลิต ?

2–7 บริษัท คิงส์ จำกัด กำลังพิจารณาโปรแกรมโฆษณาโปรแกรมหนึ่ง โปรแกรมนี้จะทำให้ต้นทุนคงที่เพิ่มขึ้น 7,000 บาท บริษัทขายผลิตภัณฑ์ในราคาหน่วยละ 10 บาท และจ่ายต้นทุนแปรผันหน่วยละ 3 บาท ต้นทุนคงที่ในขณะนี้เท่ากับ 35,000 บาท บริษัทจะต้องขายเพิ่มขึ้นอีกเป็นจำนวนกี่หน่วยจึงคุ้มกับการโฆษณานี้ ? จุดคุ้มทุนใหม่คิดเป็นจำนวนหน่วยเท่ากับเท่าไร ?

2–8 ต่อไปนี้เป็นต้นทุนรายปีของบริษัทแห่งหนึ่ง

ค่าเสื่อมราคา	บาท 40,000
เงินเดือน	53,000
วัตถุดิบใช้ไป	30,000
ค่าโฆษณา	15,000
ค่าแรงงานทางตรง	8,000
ค่านายหน้าในการขาย	16,000
ค่าภาษี	18,000

บริษัทแห่งนี้ขายผลิตภัณฑ์ 6 ชนิดด้วยกัน ส่วนช่วยเหลือทั้งสิ้นต่อการขายรวม 1 บาท เท่ากับ 36% ต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น ณ จุดคุ้มทุนเท่ากับเท่าไร ?

2–9 บริษัท XYZ การรถไฟ จำกัด ดำเนินการเดินรถไฟบนเส้นทางเส้นหนึ่งที่กำหนดไว้ นักบัญชีของบริษัทได้รวบรวมตัวเลขต้นทุนสำหรับรถไฟซึ่งมีขนาดความยาวต่าง ๆ ดังนี้

	ต้นทุนทั้งหมด	**ต้นทุนถัวเฉลี่ยต่อตู้**
หัวจักรและรถ 10 ตู้	บาท 2,700	บาท 270
หัวจักรและรถ 20 ตู้	3,200	160
หัวจักรและรถ 30 ตู้	3,700	123
หัวจักรและรถ 40 ตู้	4,200	105
หัวจักรและรถ 50 ตู้ (สูงสุด)	4,700	94

การดำเนินงานของบริษัทในขณะนี้มีกำไรโดยใช้รถไฟที่มีความยาวถัวเฉลี่ย 35 ตู้ บริษัทต้องแข่งขันกับบริษัท บริการขนส่ง จำกัด ซึ่งทำการขนส่งโดยรถบรรทุกบนเส้นทางเดียวกัน บริษัท บริการขนส่ง จำกัด ได้มาติดต่อกับบริษัท XYZ การรถไฟ จำกัดและเสนอที่จะจ่าย 86 บาทต่อรถบรรทุก 1 คัน ในการลากรถบรรทุกพ่วงท้ายบนเส้นทางเดียวกันนี้ รถตู้เรียบแต่ละตู้บรรทุกรถบรรทุกได้ 1 คัน และบริษัทมีรถตู้เรียบอยู่เป็นจำนวน

มาก ต้นทุนที่จะต้องจ่ายเพิ่มเติมในการนำรถบรรทุกขึ้นลงเท่ากับ 7.50 บาทต่อคัน บริษัท บริการขนส่ง จำกัด ไม่อาจให้ประกันเกี่ยวกับจำนวนรถบรรทุกขั้นต่ำสุดที่จะให้นำมาพ่วงท้าย ให้ประเมินข้อเสนอนี้ในแง่ของโอกาสการทำกำไร รถไฟวิ่งไปกลับ 300 เที่ยวต่อปี

2–10 ABC โมเต็ลมีห้องพักทั้งสิ้น 50 ห้อง ในจำนวนนี้เป็นห้องเดี่ยว 20 ห้องซึ่งให้เช่าในอัตรา 80 บาทต่อคืน ห้องคู่ 15 ห้องซึ่งให้เช่าในอัตรา 120 บาทต่อคืน และห้อง 3 คน 15 ห้องซึ่งให้เช่าในอัตรา 160 บาทต่อคืน ต้นทุนคงที่รายปีซึ่งรวมค่าแรงงานทั้งหมดแล้วมีจำนวน 850,000 บาท ค่าใช้จ่ายแปรผันที่จะจ่ายเพิ่มเติมต่อห้องเท่ากับ 30 บาทต่อคืน ซึ่งคลุมค่าลินิน กำลัง สบู่ ฯลฯ มีผู้มาเช่าห้องพักต่าง ๆ ในอัตราส่วนเกือบเท่ากับจำนวนห้องพักที่มีอยู่ กล่าวคือมีผู้เช่าห้องคู่และห้องสามคนในจำนวนที่ใกล้เคียงกัน และมีผู้เช่าห้องเดี่ยวมากกว่าห้องคู่ประมาณหนึ่งในสาม ให้คำนวณจุดคุ้มทุนเป็นอัตราร้อยละของการมีผู้มาเช่าพักอาศัย โดยสมมติว่าปีหนึ่งมี 360 วัน ระดับของการมีผู้มาเช่าพักอาศัยควรจะเป็นเท่าไรจึงจะทำให้ได้กำไร 380,000 บาทต่อปี ?

บทที่ 3

ทฤษฎีความน่าจะเป็นเบื้องต้น
(INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY)

ถ้าหากเราสามารถคาดคะเนสิ่งที่จะเกิดขึ้นในอนาคตได้ถูกต้องแน่นอนทุกอย่าง โครงสร้างของโลกธุรกิจคงจะแตกต่างไปจากที่เป็นอยู่ในปัจจุบันนี้มาก การตัดสินใจจะผิดพลาดก็ต่อเมื่อไม่ได้นำเอาข้อสนเทศที่เกี่ยวข้องทั้งหมดเข้ามาพิจารณา ผู้ผลิตคงไม่ผลิตสินค้าเกินความต้องการ ผู้ค้าปลีกคงไม่ต้องขายลดราคาพิเศษเพื่อขจัดสินค้าที่ตกค้างอยู่ คงไม่มีการเก็งกำไรในตลาดหุ้นและความล้มเหลวทางธุรกิจก็จะเกิดขึ้นได้ยากมาก

แต่เราไม่ได้อาศัยอยู่ในโลกที่เราสามารถพยากรณ์อนาคตได้อย่างถูกต้องแน่นอนทุกอย่าง เราจึงได้มีการศึกษาและใช้ประโยชน์จากทฤษฎีความน่าจะเป็น (probability theory) เพื่อลดความไม่แน่นอนให้น้อยลง มีอยู่หลาย ๆ กรณีที่นักธุรกิจพอจะทราบได้ว่า ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นจากการตัดสินใจอย่างใดอย่างหนึ่งจะออกมาในรูปใด ถ้ามีการรวบรวมข้อสนเทศเหล่านี้ และนำมาพิจารณาในลักษณะที่เป็นระบบ นักธุรกิจก็จะตัดสินใจได้ดีกว่าวิธีการเดาสุ่ม

ความน่าจะเป็นเชิงปรนัยและเชิงอัตนัย (Objective and Subjective Probabilities)

ความน่าจะเป็นแยกออกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ ความน่าจะเป็นเชิงปรนัย (objective probability) และความน่าจะเป็นเชิงอัตนัย (subjective probability) ความน่าจะเป็นเชิงปรนัย คือ ความน่าจะเป็นที่มีหลักฐานในอดีตที่เฉพาะเจาะจงหรือประสบการณ์ร่วม (กล่าวคือ มีหลักฐานที่เที่ยงธรรม) เพียงพอที่จะสนับสนุนการกำหนดความน่าจะเป็นนั้น ๆ

ตัวอย่างเช่น ในการโยนเหรียญอันหนึ่ง เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่า ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวเท่ากับ .50 (หรือ 1/2 หรือ 50%) ทั้งนี้เท่ากับเราสมมติโดยปริยายว่าเหรียญอันนั้นเป็นเหรียญเที่ยงธรรม (หรือไม่ได้ถ่วงน้ำหนัก หรือไม่ลำเอียง) และได้ทำการโยนเหรียญอันนี้ในลักษณะที่ว่า การออกหัวและออกก้อยมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน คนที่มีเหตุผลพอเพียงคงไม่โต้แย้งว่าความน่าจะเป็นดังกล่าวไม่ถูกต้อง เพราะมีผู้แสดงให้เห็นซ้ำ ๆ หลายครั้งแล้วว่าความน่าจะเป็นนี้เป็นจริง ในการโยนเหรียญแต่ละครั้ง ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวที่เท่ากับ .50 จึงเป็นความน่าจะเป็นเชิงปรนัย เพราะเป็นความน่าจะเป็นที่เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป

แต่ในการตัดสินใจแต่ละครั้ง นักธุรกิจมักจะไม่มีหลักฐานในอดีตที่อาจนำมาใช้ประโยชน์ได้ เมื่อเป็นเช่นนี้ นักธุรกิจจึงต้องอาศัยการกะประมาณของตนเองเกี่ยวกับสถานการณ์

ที่เป็นอยู่และโอกาสที่จะเกิดผลลัพธ์ต่าง ๆ การกะประมาณนี้เป็นที่เข้าใจกันว่าคือความน่าจะเป็นเชิงอัตนัย

ตัวอย่างเกี่ยวกับความน่าจะเป็นเชิงอัตนัย สมมติว่า พนักงานขายคนหนึ่งและผู้ค้าปลีกกำลังเผชิญกับปัญหา ๆ หนึ่งว่า ควรจะสั่งซื้อของขวัญชนิดหนึ่งจำนวน 100 ชิ้นเพื่อขายในระหว่างฤดูคริสต์มาสหรือไม่ ? บุคคลทั้งสองต่างก็มีความสามารถและมีประสบการณ์เกี่ยวกับงานในหน้าที่ของตนมามากกว่า 20 ปี พนักงานขายพยายามที่จะทำสิ่งที่จะอำนวยประโยชน์ให้แก่ผู้ค้าปลีกมากที่สุด ในเมื่อผู้ค้าปลีกมีความรู้ต่าง ๆ เกี่ยวกับสถานการณ์ภายในท้องถิ่นของตนอย่างละเอียดถี่ถ้วนและพนักงานขายก็มีประสบการณ์เกี่ยวกับงานในด้านนี้มามาก บุคคลทั้งสองควรจะได้กำหนดความน่าจะเป็นของความสำเร็จ ที่อาจเกิดจากการสั่งซื้อของขวัญดังกล่าวที่เกือบจะเท่ากัน ผู้ค้าปลีกและพนักงานขายอาจมีความเห็นตรงกันว่าสมควรที่จะซื้อของขวัญตามที่ได้เสนอมาหรือไม่หลังจากที่ได้พิจารณากำไรตามที่คาดไว้แล้ว

ความจริงความน่าจะเป็นเชิงอัตนัย ก็คือการเดานั่นเอง แต่เป็นการเดาที่เรียกว่า "การเดาอย่างผู้รู้" (educated guess) โดยอาศัยประสบการณ์และความรู้โดยทั่ว ๆ ไปที่บุคคลนั้น ๆ มีอยู่ ทุกคนจะต้องทำการเดาเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น เพราะเรามักจะเรียนรู้อะไรหลายต่อหลายอย่างแล้วจากข้อสนเทศในอดีต หรือความรู้ความเข้าใจต่าง ๆ ที่ได้มาจากการศึกษา

เหรียญเที่ยงธรรม (The Fair Coin)

ในการโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่ง (กล่าวคือเป็นเหรียญที่ไม่ลำเอียง มีด้านหนึ่งเป็นหัว อีกด้านหนึ่งเป็นก้อย) เราทราบว่าเหรียญนั้นอาจจะออกหัวหรือออกก้อย ถ้าสมมติว่าเหรียญอันนั้นจะไม่ตั้งอยู่กับพื้น ในการโยนเหรียญครั้งใดครั้งหนึ่ง เราไม่สามารถทราบล่วงหน้าได้ว่า เหรียญอันนั้นจะออกหัวหรือออกก้อย แต่ถ้าโยนเหรียญอันนั้นเป็นจำนวนหลาย ๆ ครั้ง (ในจำนวนไม่จำกัด) เหรียญนั้นจะออกหัวครึ่งหนึ่งของจำนวนครั้งที่โยน และออกก้อยครึ่งหนึ่งของจำนวนครั้งที่โยน ถ้าจะพูดในแง่ความน่าจะเป็น ในการโยนเหรียญครั้งหนึ่งครั้งใดความน่าจะเป็นที่จะออกหัวเท่ากับ .50 (หรือ 50%) และความน่าจะเป็นที่จะออกก้อยเท่ากับ .50 (หรือ 50%) ถ้าจะเขียนเป็นสัญลักษณ์ที่เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปแล้ว จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} P(H) &= .5 \\ P(T) &= \underline{.5} \\ & \ 1.0 \end{aligned}$$

ความน่าจะเป็นเหล่านี้ เรียกว่า ความน่าจะเป็นสุดท้าย หรือความน่าจะเป็นที่ไม่มีเงื่อนไข (marginal or unconditional probabilities) เพราะว่าผลลัพธ์ที่เกิดจากการโยน

เหรียญแต่ละครั้งจะไม่กระทบกระเทือนถึงหรืออยู่ภายใต้เงื่อนไขของการโยนเหรียญครั้งอื่น ๆ แต่อย่างใด สมมติว่า เราโยนเหรียญไม่ลำเอียงอันหนึ่ง 3 ครั้ง และปรากฏว่าเหรียญนั้นออกหัวทั้ง 3 ครั้ง ถ้าโยนครั้งที่ 4 ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวเท่ากับเท่าไร ? เนื่องจากเหรียญอันนี้ไม่ลำเอียงหรือบกพร่องแต่อย่างใด และการโยนเหรียญนี้แต่ละครั้งก็ไม่ได้ขึ้นอยู่กับการโยนครั้งอื่น ๆ เลย ในการโยนครั้งที่ 4 และการโยนครั้งต่อ ๆ ไปความน่าจะเป็นที่จะออกหัวจึงเท่ากับ .5 และความน่าจะเป็นที่จะออกก้อย .5

จะสังเกตได้ว่า ความน่าจะเป็นสุดท้าย หรือความน่าจะเป็นที่ไม่มีเงื่อนไขทั้งสองรวมกันเข้ามีค่าเท่ากับ 1.0 ผลรวมของความน่าจะเป็นสุดท้ายที่จะต้องเท่ากับ 1.0 นี้เป็นลักษณะสำคัญของทฤษฎีความน่าจะเป็น กล่าวคือ ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้จากการกระทำอย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่ง ณ ขณะหนึ่งขณะใดจะไม่มีผลลัพธ์ 2 อย่างเกิดขึ้นพร้อมกัน รวมกันเข้าจะต้องเท่ากับหนึ่งเสมอ เราอาจอธิบายให้เห็นได้โดยง่ายดังนี้ ลองพิจารณาเหรียญเที่ยงธรรมอีกครั้งหนึ่ง สมมติว่าเหรียญอันนี้ไม่ลำเอียง ด้านหนึ่งเป็นหัว อีกด้านหนึ่งเป็นก้อย และไม่ตั้งอยู่กับพื้น (เราจะไม่คำนึงถึงเหตุการณ์นี้ถ้าหากว่าเหรียญอันนั้นเกิดตั้งอยู่กับพื้นได้) ต่อไป ถ้ากำหนดให้ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวเท่ากับ .3 และความน่าจะเป็นที่จะออกก้อยเท่ากับ .3 เราก็จะได้

$$
\begin{aligned}
P(H) &= .3 \\
P(T) &= \underline{.3} \\
&= .6
\end{aligned}
$$

ถ้าหากเป็นไปตามความน่าจะเป็นดังระบุไว้ข้างต้น เราคาดว่าเหรียญนี้จะออกหัว 30% ของจำนวนครั้งที่โยน และออกก้อย 30% ของจำนวนครั้งที่โยน เราจะเห็นได้ว่าการกำหนดความน่าจะเป็นดังกล่าวไม่ถูกต้อง เพราะไม่ได้คำนึงถึงอีก 40% ของจำนวนครั้งที่โยน ถ้าจะใช้ตัวอย่างการตัดขนมเค้กชิ้นหนึ่งออกเป็นส่วน ๆ ซึ่งเป็นตัวอย่างที่ใช้ในการอธิบายเรื่องเศษส่วนที่เราคุ้นเคยแล้ว ก็เท่ากับเป็นการกล่าวว่า ขนมเค้ก 2 ชิ้นซึ่งต่างก็เท่ากับ 30% ของขนมเค้กทั้งชิ้นรวมกันเข้าเท่ากับขนมเค้กชิ้นนั้นทั้งชิ้นนั่นเอง

กล่าวอีกนัยหนึ่ง ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ใด ๆ ที่เกิดจากการกระทำอย่างหนึ่งที่กำหนดให้จะต้องอยู่ในระหว่าง 0 ถึง 1 และผลรวมของความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ทั้งหมดจะต้องเท่ากับ 1 ถ้ากำหนดให้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อย่างหนึ่งเท่ากับ 0 เรามีความเชื่อมั่นว่าเหตุการณ์นั้นจะไม่เกิดขึ้นอย่างแน่นอน ในทางตรงกันข้าม ถ้ากำหนดให้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อย่างหนึ่งเท่ากับ 1 เรามีความเชื่อมั่นว่าเหตุการณ์นั้นจะต้องเกิดขึ้นอย่างแน่นอน ความน่าจะเป็นที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 (เช่น .20, .45, .60, .05 ฯลฯ) เป็นจุดที่อยู่ในระหว่าง

ช่วงของความเชื่อมั่นว่าเหตุการณ์นั้นจะไม่เกิดขึ้นแน่นอนกับความเชื่อมั่นว่าเหตุการณ์นั้นจะต้องเกิดขึ้นอย่างแน่นอน สิ่งที่กล่าวไปแล้วทั้งหมดอาจเขียนสรุปได้ดังนี้ $0 \leq P \leq 1$ และอ่านได้ความว่า "ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์อย่างใดอย่างหนึ่งจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1

การทำให้การแจกแจงอยู่ในลักษณะปกติ (Normalizing Distributions)

ในบางครั้ง ข้อสนเทศที่มีอยู่เป็นเพียงจำนวนเหตุการณ์ต่าง ๆ ตามประเภทที่กำหนดไว้ เช่น ในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งผลการสอบวิชาภาษาสเปน 1 สำหรับระยะเวลา 5 ปีที่ผ่านไปปรากฏว่ามีการแจกแจงดังต่อไปนี้

ระดับ	จำนวนนักเรียน
A	63
B	127
C	502
D	346
F	462
รวม	1,500

สมมติว่า ในปีนี้มีนักเรียนสมัครเรียนภาษาสเปน 1 จำนวน 315 คน และเราต้องการกะประมาณจำนวนนักเรียนที่จะสอบไล่ได้ระดับต่าง ๆ โดยอาศัยการแจกแจงในอดีต ในการกะประมาณดังกล่าว เราต้องเปลี่ยนคะแนนดิบเป็นอัตราร้อยละของจำนวนนักเรียนทั้งสิ้นโดยหารคะแนนดิบของแต่ละระดับด้วย 1,500 ดังนี้

$$
\begin{array}{llrr}
A & \frac{63}{1,500} \times 100\% & = & 4.20\% \\
B & \frac{127}{1,500} \times 100\% & = & 8.47\% \\
C & \frac{502}{1,500} \times 100\% & = & 33.47\% \\
D & \frac{346}{1,500} \times 100\% & = & 23.06\% \\
F & \frac{462}{1,500} \times 100\% & = & \underline{30.80\%} \\
 & & & \underline{\underline{100.00\%}}
\end{array}
$$

ในการคำนวณจำนวนนักเรียนที่คาดว่าจะได้ระดับ A ในปีนี้ เราเพียงแต่คูณ 315 ด้วย 4.20% การแจกแจงที่คาดไว้หลังจากที่ปัดเป็นจำนวนเต็มแล้วปรากฏดังนี้

ระดับ	จำนวนนักเรียน
A	13
B	27
C	105
D	73
F	97
รวม	315

ตัวอย่างอีกตัวอย่างหนึ่ง สมมติว่าเรามีกล่องอยู่ใบหนึ่งซึ่งบรรจุลูกหินสีดำ 6 ลูก สีแดง 1 ลูก สีเหลือง 8 ลูก และสีน้ำเงิน 5 ลูก (ลูกหินทุกลูกมีขนาดและรูปร่างเหมือนกันหมด) การแจกแจงของลูกหินที่มีอยู่ปรากฏดังนี้

สี	ปริมาณ
ดำ	6
แดง	1
เหลือง	8
น้ำเงิน	5
	20

ในการกำหนดความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกหินสีดำขึ้นมาลูกหนึ่ง เราจะต้องการจำนวนลูกหินสีดำที่มีอยู่ด้วยจำนวนลูกหินที่มีอยู่ทั้งสิ้น นั่นคือ 6/20=.30 หรือ 30% ดังนั้นเราอาจกล่าวได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกหินสีดำขึ้นมาลูกหนึ่งเท่ากับ .30 หรือ 30% ในการกำหนดว่าความน่าจะเป็นของลูกหินสีอื่น ๆ คงใช้วิธีการอย่างเดียวกันนี้ การแจกแจงใหม่ที่คำนวณได้นี้เรียกว่า การแจกแจงปกติ (normalized distribution) เพราะผลรวมของอัตราร้อยละทั้งหมดเท่ากับ 100% หรือถ้าใช้ทศนิยม ผลรวมจะเท่ากับ 1.00 ซึ่งเป็นไปตามที่เราได้กล่าวไว้ในตอนแรกว่า ผลรวมของความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดของเหตุการณ์อย่างหนึ่งจะต้องเท่ากับ 1 เสมอ ในกรณีนี้ผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นได้ คือ การหยิบลูกหินสีต่าง ๆ กันขึ้นมาจากกล่องใบนั้น

การแจกแจงปกติสำหรับลูกหินสีต่าง ๆ ที่บรรจุอยู่ในกล่องปรากฏดังนี้

สี	ปริมาณ	แสดงเป็น อัตราร้อยละ	แสดงเป็น ทศนิยม
ดำ	6	30%	.30
แดง	1	5	.05
เหลือง	8	40	.40
น้ำเงิน	5	25	.25
รวม	20	100%	1.00

เหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกัน (Mutually Exclusive Events)

ถ้าในขณะใดขณะหนึ่ง ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นเป็นผลลัพธ์อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว เราเรียกเหตุการณ์เหล่านั้นว่าเป็นเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกัน (mutually exclusive) ลองพิจารณาตัวอย่างเหรียญเที่ยงธรรมอีกครั้งหนึ่ง ผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นได้มีอยู่ 2 อย่างคือ ออกหัวหรือออกก้อย ในการโยนเหรียญอันหนึ่ง ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นอาจจะเป็นการออกหัวหรือออกก้อยอย่างใดอย่างหนึ่ง ไม่ใช่ทั้งสองอย่างพร้อมกัน เหตุการณ์ที่จะออกหัวหรือออกก้อยนี้จึงเรียกว่าเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกัน

ตัวอย่างอีกตัวอย่างหนึ่ง สมมติว่า เรามีถุงใบหนึ่งบรรจุลูกบอล 4 ลูก ลูกบอลทั้งสี่มีสีต่าง ๆ กัน คือ แดง น้ำเงิน เขียว และเหลือง แต่มีขนาดรูปร่างและคุณสมบัติอื่น ๆ เหมือนกันทุกอย่าง ถ้าเราหยิบลูกบอลจากถุงนี้ขึ้นมาหนึ่งลูก ปรากฏว่าเป็นสีน้ำเงิน การหยิบลูกบอลสีน้ำเงินจากถุงนี้ ทำให้เราไม่มีโอกาสหยิบลูกบอลสีอื่น ๆ ขึ้นมาในขณะเดียวกันนั้น เพราะในขณะใดขณะหนึ่ง เราจะหยิบลูกบอลจากถุงนี้ขึ้นมาเพียงลูกเดียวเท่านั้น เมื่อเป็นเช่นนี้ เหตุการณ์ (หรือการหยิบลูกบอลขึ้นมาจากถุง) เหล่านี้จึงเป็นเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกัน

ในการวินิจฉัยว่าเหตุการณ์ต่าง ๆ เป็น mutually exclusive หรือไม่ เราจะต้องตั้งคำถามสำคัญคำถามหนึ่งว่า "เหตุการณ์สองอย่างหรือมากกว่านั้นอาจเกิดขึ้นพร้อมกันได้หรือไม่?" ถ้าคำตอบคือ "ได้" เหตุการณ์เหล่านั้นก็ไม่ขจัดซึ่งกันและกัน

ตัวอย่างเช่น เรามีลูกเต๋าธรรมดาและไม่ลำเอียง (กล่าวคือไม่ได้ถ่วงน้ำหนัก เที่ยงธรรม จริง ตรงไปตรงมา ฯลฯ) อยู่ลูกหนึ่ง และต้องการทราบว่าจำนวนที่อยู่บนลูกเต๋าแต่ละด้านเป็นเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกันหรือไม่ ในการทอดลูกเต๋าแต่ละครั้ง ลูกเต๋าจะหันด้านใดด้านหนึ่งขึ้นมาเพียงด้านเดียวเท่านั้น ดังนั้นจำนวนที่อยู่บนลูกเต๋าแต่ละด้านจึงเป็นเหตุการณ์

ที่ขจัดซึ่งกันและกัน เพราะถ้ามิฉะนั้นแล้ว ในการทอดลูกเต๋าครั้งหนึ่งครั้งใด ลูกเต๋าอาจจะหันด้านต่าง ๆ ขึ้นสองด้านหรือมากกว่านั้นก็ได้

การบวกเข้าด้วยกันได้ของเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกัน

(Additivity of mutually exclusive events)

เราอาจนำความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกันมาบวกเข้าด้วยกันได้ กล่าวคือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ เหล่านี้อาจบวกเข้าด้วยกันได้ และถ้ารวมผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดเข้าด้วยกัน ผลรวมของความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ทั้งหมดจะต้องเท่ากับ 1.0

ในกรณีตัวอย่างถุงบรรจุลูกบอล 4 ลูก ซึ่งลูกบอลแต่ละลูกมีสีต่างกันและมีโอกาสที่จะถูกหยิบขึ้นมาได้เท่ากัน เราอาจแสดงเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกันซึ่งอาจบวกเข้าด้วยกันได้ (หรือรวมกันเข้าได้) ดังนี้

เหตุการณ์	ความน่าจะเป็น
หยิบลูกบอลสีแดง	.25
หยิบลูกบอลสีน้ำเงิน	.25
หยิบลูกบอลสีเขียว	.25
หยิบลูกบอลสีเหลือง	.25
รวม	1.00

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เหล่านี้รวมกันเข้าจะต้องเท่ากับ 1.00 เพราะผลลัพธ์ที่เกิดจากการหยิบลูกบอลขึ้นมาหนึ่งลูกมีอยู่ทั้งหมด 4 อย่าง และผลลัพธ์แต่ละอย่างมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้เท่ากัน

ต่อไปลองพิจารณากรณีที่มีถุงใบหนึ่งซึ่งบรรจุลูกบอลต่าง ๆ ตามรายละเอียดดังนี้ :

รายละเอียด	ปริมาณ	ความน่าจะเป็น
สีแดงจุดขาว	2	2/6
สีเขียวจุดขาว	2	2/6
สีแดงล้วน	1	1/6
สีเขียวล้วน	1	1/6
รวม	6	6/6 = 1

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอลที่มีสีเขียวอยู่ด้วยเท่ากับเท่าไร ? ลูกบอลที่เข้าข่ายนี้มีอยู่ 3 ลูก คือ ลูกบอลสีเขียวจุดขาว 2 ลูก และสีเขียวล้วน 1 ลูก ความน่าจะเป็นของลูกบอลทั้งสามลูกนี้รวมกันได้ 3/6 หรือ 1/2 หรือ .50 หรือ 50%

ความน่าจะเป็นของลูกบอลสีเขียวจุดขาว	2/6
ความน่าจะเป็นของลูกบอลสีเขียวล้วน	1/6
รวมความน่าจะเป็นของลูกบอลที่มีสีเขียวอยู่ด้วย	3/6

เหตุการณ์ทุกอย่างที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด (Collectively Exhaustive Events)

ถ้ารายการ ๆ หนึ่ง รวบรวมผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้นได้จากการกระทำอย่างหนึ่งที่กำหนดให้ เราเรียกรายการแสดงผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดนี้ว่าเป็นรายการที่รวมเหตุการณ์ทุกอย่างที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด กล่าวคือ ได้รวมผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทุกอย่างไว้แล้วและไม่มีผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้อื่นใดปรากฏอยู่ในรายการนั้น ๆ

ในตัวอย่างเหรียญเที่ยงธรรม ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้มีอยู่ 2 อย่างด้วยกัน คือ ออกหัวหรือออกก้อย ในการโยนเหรียญครั้งหนึ่ง ๆ ผลลัพธ์ที่ได้จะต้องเป็นหัวหรือก้อย ดังนั้นรายการที่แสดงผลลัพธ์ทั้งสองนี้จึงรวมเหตุการณ์ทุกอย่างที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

รายการแสดงผลลัพธ์ (หรือเหตุการณ์) อาจรวมเหตุการณ์ต่าง ๆ ทั้งที่เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกันและที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด ในตอนก่อนเราได้แสดงให้เห็นแล้วว่า การโยนเหรียญแต่ละครั้ง เหรียญนั้นอาจจะออกหัวหรือออกก้อย แต่ไม่ออกหัวและออกก้อยพร้อมกัน และสรุปได้ความว่า เหตุการณ์เหล่านี้เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกัน เพราะฉะนั้นรายการที่แสดงผลลัพธ์ที่อาจเกิดจากการโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่ง (กล่าวคือ ออกหัวหรือออกก้อย) จึงรวมเหตุการณ์ต่าง ๆ ทั้งที่เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกันและที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

ลองพิจารณาการทอดลูกเต๋าธรรมดาอีกครั้งหนึ่ง รายการแสดงผลลัพธ์และความน่าจะเป็นของผลลัพธ์แต่ละอย่างปรากฏดังนี้

ผลลัพธ์ (หรือเหตุการณ์) ที่อาจเกิดขึ้นได้		ความน่าจะเป็น
ขึ้นหน้า	1	1/6
,,	2	1/6
,,	3	1/6
,,	4	1/6
,,	5	1/6
,,	6	1/6
รวม		6/6 = 1

ในเมื่อผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดปรากฏอยู่ในรายการข้างต้น รายการนี้จึงรวมเหตุการณ์ทุกอย่างที่อาจเกิดขึ้น นอกจากนี้ รายการนี้ยังเป็นการรวมเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกันอีกด้วย เพราะในขณะใดขณะหนึ่ง ผลลัพธ์ที่ได้จะต้องเป็นผลลัพธ์อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

จะสังเกตได้ว่า ผลรวมของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งเป็นลักษณะสำคัญของรายการที่รวมเหตุการณ์หรือผลลัพธ์ต่าง ๆ ทั้งที่ขจัดซึ่งกันและกัน และที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

เหตุการณ์อิสระทางเชิงสถิติ (Statistically Independent Events)

ถ้าการเกิดเหตุการณ์อย่างหนึ่ง ไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์อื่นใด เราเรียกเหตุการณ์เหล่านี้ว่าเป็นเหตุการณ์อิสระทางเชิงสถิติ ความน่าจะเป็นภายใต้ความเป็นอิสระทางเชิงสถิติมีอยู่ 3 ชนิดคือ (1) ความน่าจะเป็นสุดท้าย (marginal probability) (2) ความน่าจะเป็นรวม (joint probability) และ (3) ความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไข (conditional probability)

1. ความน่าจะเป็นสุดท้ายภายใต้ความเป็นอิสระทางเชิงสถิติ
(Marginal probabilities under statistical independence)

ความน่าจะเป็นสุดท้ายเป็นความน่าจะเป็นธรรมดา ๆ ของการเกิดเหตุการณ์อย่างหนึ่ง ตัวอย่างเช่น

ก. ตัวอย่างเหรียญเที่ยงธรรม ในการโยนเหรียญทุกครั้ง เรามี P(H) = .5 และ P(T) = .5 (กล่าวคือ ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวเท่ากับ .5 และความน่าจะเป็นที่จะออกก้อยก็เท่ากับ .5) ไม่ว่าเราจะโยนเหรียญนี้ไปแล้วกี่ครั้ง และผลลัพธ์ที่ได้จะออกมาในรูปใดก็ตาม เหตุการณ์ (การโยนเหรียญ) แต่ละอย่างจะแยกต่างหากจากกัน และไม่เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ (การโยนเหรียญ) อื่นใดเลย ดังนั้นการโยนเหรียญเที่ยงธรรมจึงเป็นเหตุการณ์อิสระทางเชิงสถิติ

ข. สมมติว่าเรามีเหรียญลำเอียงอยู่อันหนึ่ง เหรียญอันนี้ถูกดัดแปลงในลักษณะที่จะออกหัว .90 ของจำนวนครั้งที่โยน และออกก้อย .10 ของจำนวนครั้งที่โยน ในการโยนเหรียญครั้งหนึ่งครั้งใด P(H) = .90 และ P(T) = .10 ผลลัพธ์จากการโยนแต่ละครั้งไม่มีความสัมพันธ์ใด ๆ กับผลลัพธ์ที่เกิดจากการโยนครั้งอื่น ๆ ที่เกิดขึ้นก่อนและหลังการโยนเหรียญครั้งนี้ การโยนเหรียญอันนี้จึงมีความเป็นอิสระทางเชิงสถิติเช่นกัน แม้ว่าเหรียญอันนี้จะลำเอียงก็ตาม

2. ความน่าจะเป็นร่วมภายใต้ความเป็นอิสระทางเชิงสถิติ
(Joint probabilities under statistical independence)

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์อิสระตั้งแต่สองเหตุการณ์ขึ้นไปพร้อม ๆ กัน หรือ

ต่อเนื่องกัน เท่ากับผลคูณของความน่าจะเป็นสุดท้ายของเหตุการณ์อิสระเหล่านั้น เราอาจให้คำนิยามทางเชิงคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$P(AB) = P(A) \times P(B)$$

ให้ $P(AB)$ = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A และ B พร้อมกันหรือต่อเนื่องกัน เราเรียกความน่าจะเป็นนี้ว่า "ความน่าจะเป็นร่วม"

$P(A)$ = ความน่าจะเป็นสุดท้ายที่จะเกิดเหตุการณ์

$P(B)$ = ความน่าจะเป็นสุดท้ายที่จะเกิดเหตุการณ์

ถ้าใช้ตัวอย่างเหรียญเที่ยงธรรม ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวทั้ง 2 ครั้งในการโยนเหรียญติดต่อกัน 2 ครั้ง เท่ากับความน่าจะเป็นที่จะออกหัวในการโยนครั้งที่ 1 (H_1) คูณความน่าจะเป็นที่จะออกหัวในการโยนครั้งที่ 2 (H_2) นั่นคือ $P(H_1H_2) = P(H_1) \times P(H_2)$ เราได้อธิบายให้เห็นแล้วว่าเหตุการณ์ทั้งสองเป็นเหตุการณ์อิสระทางเชิงสถิติ เพราะความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่ได้จากการโยนเหรียญแต่ละครั้ง ไม่ถูกกระทบกระเทือนโดยผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นก่อนหน้าผลลัพธ์นั้น เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวในการโยนเหรียญไม่ว่าจะเป็นการโยนครั้งใดก็ตามจึงเท่ากับ .5 เสมอ $P(H_1H_2) = .5 \times .5 = .25$ ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวทั้ง 2 ครั้งในการโยนเหรียญติดต่อกัน 2 ครั้งจึงเท่ากับ .25 (หรือ 1/4 หรือ 25 %)

ในทำนองเดียวกัน ถ้าโยนเหรียญ 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวติดต่อกัน 3 ครั้ง คือ $P(H_1H_2H_3) = .5 \times .5 \times .5 = .125$ (หรือ 1/8 หรือ 12.5 %)

สมมติว่า เราโยนเหรียญไม่เที่ยงธรรมอันหนึ่งซึ่งมี $P(H) = .9$ และ $P(T) = .1$ เหตุการณ์ (ผลลัพธ์) ต่าง ๆ ที่เกิดจากการโยนเหรียญแต่ละครั้งยังคงเป็นเหตุการณ์อิสระ เพราะความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญทุกครั้งจะเหมือนเดิม หมายความว่า การโยนเหรียญแต่ละครั้งแยกต่างหากจากกันโดยเด็ดขาด และไม่ถูกกระทบกระเทือนโดยการโยนครั้งอื่น ๆ หรือผลลัพธ์อื่น ๆ

ถ้าโยนเหรียญนี้ติดต่อกัน 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวทั้ง 3 ครั้งเท่ากับเท่าไร ?

$$P(H_1H_2H_3) = P(H_1) \times P(H_2) \times P(H_3) = .9 \times .9 \times .9 = .729$$

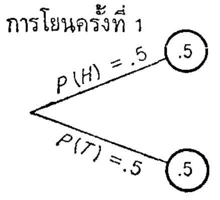
ถ้าโยนเหรียญนี้ติดต่อกัน 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกก้อยทั้ง 3 ครั้งเท่ากับเท่าไร ?

$$P(T_1T_2T_3) = P(T_1) \times P(T_2) \times P(T_3) = .1 \times .1 \times .1 = .001$$

จะสังเกตได้ว่า ความน่าจะเป็นทั้งสองรวมกันเข้าไม่เท่ากับ 1 เพราะ $P(H_1H_2H_3)$ และ $P(T_1T_2T_3)$ ไม่ใช่รายการที่รวมเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด แต่เหตุการณ์ทั้งสองยังคงขจัดซึ่งกันและกัน เพราะถ้าเกิดเหตุการณ์อย่างหนึ่งแล้วก็จะไม่เกิดเหตุการณ์อีกอย่างหนึ่ง

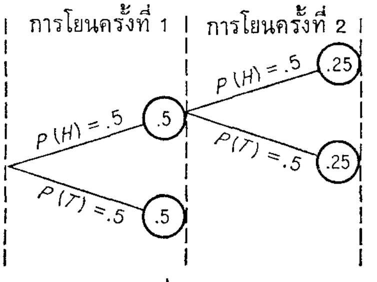
เพื่ออธิบายให้เข้าใจกว่านี้ เราจะสร้างผังความน่าจะเป็น (probability tree) แสดงผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ และความน่าจะเป็นของผลลัพธ์แต่ละอย่างในการโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่ง 3 ครั้ง

ในการโยนเหรียญครั้งที่ 1 ผลลัพธ์อาจเกิดขึ้นได้มีอยู่ 2 อย่าง คือ ออกหัวหรือออกก้อย ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ทั้งสองนี้ต่างก็เท่ากับ .5 ตามที่แสดงในรูป 3—1



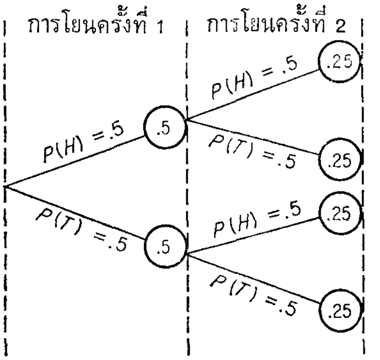
รูป 3–1

สมมติว่า ในการโยนเหรียญครั้งที่ 1 ผลลัพธ์ที่ได้คือหัว และเราตั้งใจที่จะโยนเหรียญนี้อีกครั้งหนึ่ง ในการโยนเหรียญครั้งที่ 2 นี้ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้มีอยู่ 2 อย่างคือ ออกหัวหรือออกก้อย ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ทั้งสองนี้ต่างก็เท่ากับ .5 เราจึงเพิ่มแขนงเข้าไปอีก 2 แขนง ดังปรากฏในรูป 3—2



รูป 3–2

ต่อไปเราจะพิจารณากรณีที่ผลลัพธ์จากการโยนเหรียญครั้งที่ 1 คือออกก้อย ผลของการโยนเหรียญครั้งที่ 2 จะต้องต่อไปจากแขนงที่ 2 ของการโยนครั้งที่ 1 ดังนั้น เราจึงเพิ่มแขนงเข้าไปอีก 2 แขนง ดังรูป 3—3



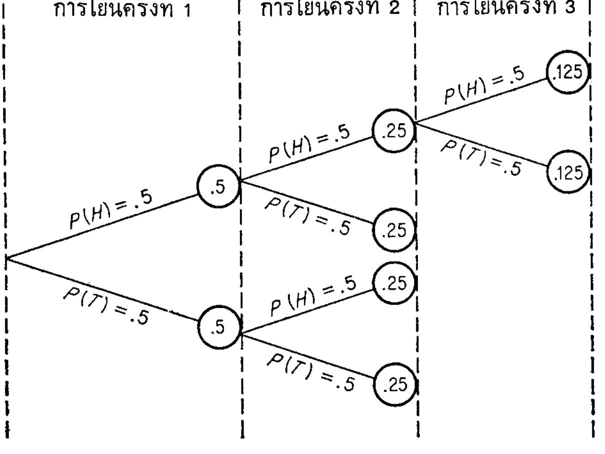
รูป 3–3

จะสังเกตได้ว่าในการโยนเหรียญอันหนึ่ง 2 ครั้ง ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้มีอยู่ 4 อย่างด้วยกัน คือ

1. H_1H_2
2. H_1T_2
3. T_1H_2
4. T_1T_2

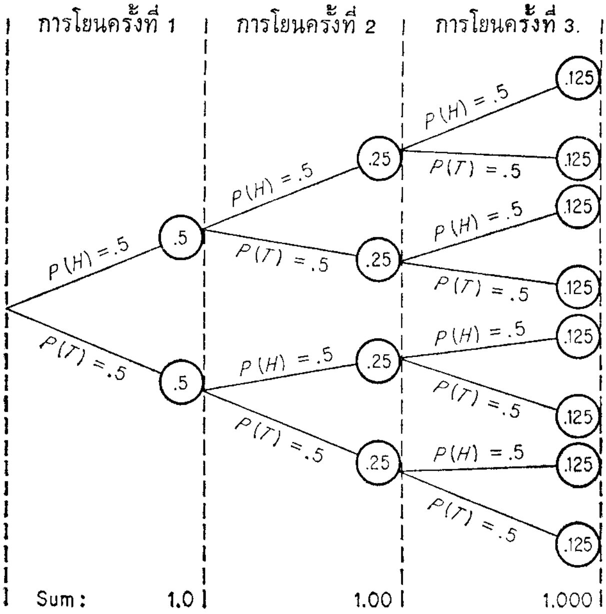
(ตัวเลขที่กำกับตัวอักษรแสดงครั้งที่โยน เช่น T_2 หมายถึงการออกหัวในการโยนครั้งที่ 2) ดังนั้น เมื่อโยนเหรียญไปแล้ว 2 ครั้ง เราอาจได้ผลลัพธ์อย่างใดอย่างหนึ่งจากผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ 4 อย่างข้างต้น เนื่องจากเราต้องการโยนเหรียญนี้ถึง 3 ครั้งเราจึงต้องเพิ่มแขนงเข้าไปในผังนี้อีก

สมมติว่าในการโยนเหรียญ 2 ครั้งแรกปรากฏว่าออกหัวทั้งสองครั้ง เราอาจเพิ่มแขนงสำหรับการโยนเหรียญครั้งที่ 3 เข้าไปได้ ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ยังคงเป็นการออกหัวหรือออกก้อย ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ทั้งสองนี้ต่างก็เท่ากับ .5 งานขั้นแรกของการต่อแขนงสำหรับการโยนเหรียญครั้งที่ 3 ปรากฏในรูป 3–4



รูป 3–4

การเพิ่มแขนงเข้าไปในผังนี้ คงดำเนินไปในทำนองเดียวกับที่ได้อธิบายไว้แล้วข้างต้น ผังความน่าจะเป็นที่สำเร็จบริบูรณ์ปรากฏในรูป 3–5



รูป 3–5 ผังความน่าจะเป็นที่สำเร็จบริบูรณ์

จะสังเกตได้ว่า ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวหรือออกก้อยต่างก็เท่ากับ .5 ไม่ว่าจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น (การโยนเหรียญครั้งแรก) ไกลเท่าใดก็ตาม ทั้งนี้เป็นไปตามคำนิยามของคำว่า "ความเป็นอิสระ" กล่าวคือ เหตุการณ์ที่เป็นเหตุการณ์อิสระจะไม่ถูกกระทบกระเทือนโดยเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นก่อนหรือหลังเหตุการณ์นั้น

สมมติว่าเราจะโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่ง 3 ครั้ง และต้องการทราบความน่าจะเป็นที่จะออกหัวจากการโยนทั้ง 3 ครั้ง ถ้าจะเขียนปัญหานี้ในรูปของสัญลักษณ์ก็เท่ากับว่าเราต้องการทราบ $P(H_1H_2H_3)$ จากคำนิยามทางเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับความน่าจะเป็นร่วมของเหตุการณ์อิสระ เราทราบแล้วว่า $P(H_1H_2H_3) = P(H_1) \times P(H_2) \times P(H_3) = .5 \times .5 \times .5 = .125$ เราอาจได้คำตอบจากผังความน่าจะเป็นโดยอ่านไปตามแขนง $H_1H_2H_3$

ตัวอย่างสั้น ๆ เกี่ยวกับการใช้ประโยชน์จากผังความน่าจะเป็น

ก. ในการโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่งติดต่อกัน 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกก้อย หัว ก้อย ตามลำดับเท่ากับเท่าไร ? $P(T_1H_2T_3) = P(T_1) \times P(H_2) \times P(T_3) = .125$ ถ้าอ่านจากผังความน่าจะเป็นไปตามแขนงที่แสดงการออกหัวและออกก้อยตามที่ระบุไว้ เราก็จะได้คำตอบอย่างเดียวกัน

ข. ในการโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่งติดต่อกัน 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกก้อย ก้อย หัว ตามลำดับเท่ากับเท่าไร ? ถ้าอ่านตามแขนงที่กำหนดให้ออกก้อยในการโยนครั้งแรก

ออกก้อยในการโยนครั้งที่ 2 และออกหัวในการโยนครั้งที่ 3 เราจะได้ความน่าจะเป็น .125 เพราะฉะนั้น $P(T_1T_2H_3) = .125$

สิ่งสำคัญที่ควรแก่การสังเกตก็คือ ความน่าจะเป็น ณ จุดใดจุดหนึ่งบนแขนงใดแขนงหนึ่งที่กำหนดให้จะไม่เท่ากับความน่าจะเป็นของการโยนเหรียญครั้งใดครั้งหนึ่ง เป็นต้นว่าการออกหัวในการโยนเหรียญครั้งที่ 3 $P(H_1T_2H_3) = .125$ แต่ $P(H_3) = .5$ ความน่าจะเป็นอันแรกเป็นกรณีความน่าจะเป็นร่วม กล่าวคือ เป็นความน่าจะเป็นที่จะออกหัวในการโยนครั้งแรก ออกก้อยในการโยนครั้งที่ 2 และออกหัวในการโยนครั้งที่ 3 แต่ในทางตรงกันข้ามความน่าจะเป็นอันหลังเป็นเพียงความน่าจะเป็นสุดท้าย ที่จะออกหัวในการโยนเหรียญครั้งใดครั้งหนึ่ง ซึ่งตามตัวอย่างนี้ ได้แก่การโยนครั้งที่ 3

จะสังเกตได้ว่า ผลรวมของความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้จากการโยนเหรียญแต่ละครั้งจะต้องเท่ากับ 1 เพราะเราได้รวมผลลัพธ์ที่เป็นทั้งเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกัน และที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดดังปรากฏในตาราง 3–1

ตาราง 3—1

รายการแสดงผลลัพธ์					
การโยนครั้งที่ 1		การโยนครั้งที่ 2		การโยนครั้งที่ 3	
ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้	ความน่าจะเป็น	ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้	ความน่าจะเป็น	ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้	ความน่าจะเป็น
H_1	.5	H_1H_2	.25	$H_1H_2H_3$	.125
T_1	.5	H_1T_2	.25	$H_1H_2T_3$	.125
	1.0	T_1H_2	.25	$H_1T_2H_3$	.125
		T_1T_2	.25	$H_1T_2T_3$	.125
			1.00	$T_1H_2H_3$	.125
				$T_1H_2T_3$	.125
				$T_1T_2H_3$	.125
				$T_1T_2T_3$	.125
					1.000

ลองพิจารณาคำถามต่อไปนี้โดยใช้ประโยชน์จากผังความน่าจะเป็นอีกครั้งหนึ่ง

ก. ในการโยนเหรียญอันหนึ่ง 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวอย่างน้อย 2 ครั้ง เท่ากับเท่าไร ? เราทราบแล้วว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อิสระที่ขจัดซึ่งกันและกันอาจบวกกันเข้าได้ ดังนั้นเราจึงต้องพิจารณาดูว่า ในการโยนเหรียญ 3 ครั้ง โอกาสที่จะออกหัวอย่างน้อย 2 ครั้งมีโอกาสที่จะเป็นไปได้กี่ทาง แล้วนำเอาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เหล่านั้นมารวมกันเข้า ผลลัพธ์ที่เป็นไปตามข้อกำหนดข้างต้นคือ $H_1H_2H_3$, $H_1H_2T_3$, $H_1T_2H_3$ และ $T_1H_2H_3$ เนื่องจากความน่าจะเป็นของผลลัพธ์เหล่านี้ต่างก็เท่ากับ .125 ผลรวมจึงเท่ากับ .5 เพราะฉะนั้นในการโยนเหรียญอันหนึ่ง 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวอย่างน้อย 2 ครั้งจึงเท่ากับ .5

ข. ในการโยนเหรียญอันหนึ่ง 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกก้อยอย่างน้อยที่สุด 1 ครั้ง เท่ากับเท่าไร ? กรณีที่ไม่ออกก้อยเลยมีอยู่เพียงกรณีเดียว คือ $H_1H_2H_3$ เพราะฉะนั้นในการหาคำตอบ เราอาจนำความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้ไปหักออกจาก 1 ดังนี้ :– $1-P(H_1H_2H_3) = 1-.125 = .875$ ในการโยนเหรียญอันหนึ่งติดต่อกัน 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกก้อยอย่างน้อย 1 ครั้งจึงเท่ากับ .875

ค. ในการโยนเหรียญอันหนึ่ง 2 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวอย่างน้อยที่สุด 1 ครั้ง เท่ากับเท่าไร ? โอกาสที่จะออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้งได้แก่ H_1H_2, H_1T_2, T_1H_2 ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์เหล่านี้ต่างเท่ากับ .25 เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้งในการโยนเหรียญอันหนึ่ง 2 ครั้งจึงเท่ากับ .75 หรืออีกวิธีหนึ่งเราอาจพิจารณาจากกรณีที่ไม่ออกหัวเลยคือ T_1T_2 และนำเอาความน่าจะเป็นของผลลัพธ์นี้ไปหักออกจาก 1 ดังนี้ :–
$1-P(T_1T_2) = 1-.25 = .75$

เราควรจะจำไว้ด้วยว่า ความน่าจะเป็นเหล่านี้เป็นความน่าจะเป็นถัวเฉลี่ยหลังจากที่ได้โยนเหรียญเป็นจำนวนหลาย ๆ ครั้งแล้ว เราอาจจะโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่ง 10 ครั้งและออกหัวทั้ง 10 ครั้งก็ได้ แต่ถ้าโยนเหรียญนี้ติดต่อกันเป็นจำนวนหลาย ๆ ครั้ง เราคาดว่าเหรียญนั้นจะออกหัวครึ่งหนึ่งของจำนวนครั้งที่โยน และออกก้อยครึ่งหนึ่งของจำนวนครั้งที่โยน

3. ความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขภายใต้ความเป็นอิสระทางเชิงสถิติ (Conditional probabilities under statistical independence)

เราได้พิจารณาความน่าจะเป็นไปแล้ว 2 ชนิด คือความน่าจะเป็นสุดท้าย (หรือความน่าจะเป็นที่ไม่มีเงื่อนไข) และความน่าจะเป็นร่วม ถ้าเขียนเป็นสัญลักษณ์ ความน่าจะเป็นสุดท้ายคือ P(A) และความน่าจะเป็นร่วม คือ P(AB) แต่ยังมีความน่าจะเป็นอีกชนิดหนึ่งซึ่งเรียกว่า ความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไข (conditional probability) เขียนเป็นสัญลักษณ์ ความน่า

จะเป็นที่มีเงื่อนไข คือ $P(A|B)$ และอ่านว่า "ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A โดยกำหนดว่าเกิดเหตุการณ์ B แล้ว"

สำหรับเหตุการณ์อิสระทางเชิงสถิติ ความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขของเหตุการณ์ A โดยกำหนดว่าเกิดเหตุการณ์ B แล้ว ก็คือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A นั่นเอง ผู้ที่เพิ่งอ่านข้อความนี้เป็นครั้งแรก อาจจะเกิดความรู้สึกว่าข้อความนี้ขัดแย้งกัน แต่ถ้าพิจารณาจากคำนิยามแล้ว ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อิสระ จะไม่ถูกกระทบกระเทือนโดยเหตุการณ์อื่น ๆ ที่เกิดขึ้น ดังนั้น เราจึงอาจนิยามความเป็นอิสระทางเชิงสถิติ โดยเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่าเป็นสภาวะที่ $P(A|B) = P(A)$

ตัวอย่าง กำหนดให้การโยนเหรียญครั้งแรกออกหัว อยากทราบว่าถ้าโยนเหรียญอันนี้เป็นครั้งที่ 2 ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวเท่ากับเท่าไร ? ถ้าเขียนเป็นสัญลักษณ์ความน่าจะเป็นนี้คือ $P(H_2|H_1)$ เราคงจำได้ว่าสำหรับเหตุการณ์อิสระ 2 อย่าง ผลจากการโยนเหรียญครั้งแรกจะไม่กระทบกระเทือนต่อผลของการโยนครั้งที่ 2 เลย ในเมื่อความน่าจะเป็นที่จะออกหัวหรือออกก้อยจากการโยนเหรียญเท่ากันทุกครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวในการโยนครั้งที่สองจึงเท่ากับ .5 ดังนั้น เราอาจกล่าวได้ว่า $P(H_2|H_1) = P(H) = .5$

ตาราง 3—2 เป็นการสรุปความน่าจะเป็นภายใต้สภาวะความเป็นอิสระทางเชิงสถิติทั้ง 3 ชนิด และสูตรทางคณิตศาสตร์ของความน่าจะเป็นแต่ละชนิด

ตาราง 3—2

ความน่าจะเป็นภายใต้ความเป็นอิสระทางเชิงสถิติ		
ชนิดของความน่าจะเป็น	**สัญลักษณ์**	**สูตร**
1. สุดท้าย (หรือที่ไม่มีเงื่อนไข)	$P(A)$	$P(A)$
2. ร่วม	$P(AB)$	$P(A) \times P(B)$
3. ที่มีเงื่อนไข	$P(A\|B)$	$P(A)$

เหตุการณ์พึ่งพิงทางเชิงสถิติ (Statistically Dependent Events)

ถ้าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อย่างหนึ่ง ขึ้นอยู่กับหรือถูกกระทบกระเทือนโดยเหตุการณ์อีกอย่างหนึ่งที่เกิดขึ้น เราเรียกเหตุการณ์นั้นว่าเป็นเหตุการณ์พึ่งพิงทางเชิงสถิติ ความน่าจะเป็นภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ แยกออกได้เป็น 3 ชนิดเช่นเดียวกับเหตุการณ์อิสระ คือ (1) ความน่าจะเป็นสุดท้าย (2) ความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไข และ (3) ความน่าจะเป็นร่วม

1. ความน่าจะเป็นสุดท้ายภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ

(Marginal probabilities under statistical dependence)

ความน่าจะเป็นสุดท้ายของเหตุการณ์ที่พึ่งพิงทางเชิงสถิติ เหมือนกับความน่าจะเป็นสุดท้ายของเหตุการณ์อิสระทางเชิงสถิติทุกประการ ถ้าสังเกตจากสัญลักษณ์ของความน่าจะเป็นสุดท้าย ซึ่งเขียนออกมาในรูปของ P(A) เราก็จะเข้าใจเรื่องนี้ได้ดี จะเห็นได้ว่า เป็นการพิจารณาเฉพาะความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว เพราะฉะนั้นแม้จะมีเหตุการณ์พึ่งพิง 2 อย่างเข้ามาเกี่ยวข้องก็ตาม ความน่าจะเป็นสุดท้ายก็ยังคงเป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งเท่านั้น ตัวอย่างเช่น

ก. เรามีกล่องอยู่ใบหนึ่ง บรรจุลูกบอล 3 ลูก สีแดง 1 ลูก สีเขียว 1 ลูก และสีน้ำเงิน 1 ลูก และมีถุงอยู่ 3 ใบ บรรจุลูกหินสีต่าง ๆ 6 ลูก ดังนี้ :

ถุงที่ 1 บรรจุลูกหินสีขาว 3 ลูก สีดำ 3 ลูก
ถุงที่ 2 บรรจุลูกหินสีขาว 2 ลูก สีดำ 2 ลูก สีเหลือง 2 ลูก
ถุงที่ 3 บรรจุลูกหินสีดำ 6 ลูก

หยิบลูกบอลหนึ่งลูกจากกล่องที่บรรจุ ถ้าลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีแดง เราจะหยิบลูกหินจากถุงที่ 1 ถ้าเป็นสีเขียว เราจะหยิบลูกหินจากถุงที่ 2 และถ้าเป็นสีน้ำเงิน เราจะหยิบลูกหินจากถุงที่ 3

ความน่าจะเป็นของการหยิบลูกหินสีเหลือง จะถูกกระทบกระเทือนโดยลูกบอลสีต่าง ๆ ที่หยิบขึ้นมาหรือไม่ ? จะต้องถูกกระทบกระเทือนอย่างแน่นอน ทั้งนี้เพราะว่าเฉพาะถุงที่ 2 เท่านั้นที่มีลูกหินสีเหลืองบรรจุอยู่ และการที่เราจะหยิบลูกหินจากถุงที่ 2 ได้ ก็ต่อเมื่อลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีเขียว เพราะฉะนั้นเหตุการณ์ทั้งสอง (การหยิบลูกบอลจากกล่องและการหยิบลูกหินจากถุง) จึงเป็นเหตุการณ์ที่มีการพึ่งพิงทางเชิงสถิติ แต่ความน่าจะเป็นสุดท้ายของการหยิบลูกหินสีเหลืองจากถุงที่ 2 ยังคงเท่ากับลูกหินสีเหลือง 2 ลูก/ลูกหินที่มีอยู่ในถุงนี้ทั้งสิ้น 6 ลูก = 1/3

ข. เราจะโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่ง ถ้าออกหัวเราจะโยนเหรียญอันเดิมนี้อีกครั้งหนึ่ง แต่ถ้าออกก้อยเราจะโยนเหรียญไม่เที่ยงธรรม (หรือลำเอียง) อีกอันหนึ่ง ซึ่งมีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว .9 และความน่าจะเป็นที่จะออกก้อย .1 [หรือ P(H) = .9 และ P(T) = .1] ผลลัพธ์จากการโยนเหรียญครั้งแรก กระทบกระเทือนถึงความน่าจะเป็นที่จะออกหัวในการโยนครั้งที่ 2 หรือไม่ ? จะต้องกระทบกระเทือนอย่างแน่นอน เพราะความน่าจะเป็นของการออกหัวหรือออกก้อยในการโยนครั้งที่ 2 ย่อมอยู่ภายใต้เงื่อนไข (หรือขึ้นอยู่กับ) ผลของการโยนครั้งที่ 1

ถ้าโยนครั้งแรกออกหัว เราจะโยนเหรียญเที่ยงธรรมอีกครั้งหนึ่ง ในการโยนครั้งที่ 2 ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวหรือออกก้อย จะเหมือนกับการโยนครั้งแรกทุกประการ คือ P(H) = .5 และ P(T) = .5 แต่ถ้าโยนครั้งแรกออกก้อย ในการโยนครั้งที่ 2 ความน่าจะเป็นสุดท้ายที่จะออกหัวเท่ากับเท่าไร? คำตอบคือ ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวจากการโยนเหรียญไม่เที่ยงธรรม P(H) = .9 เหตุการณ์เหล่านี้เป็นเหตุการณ์พึ่งพิงทางเชิงสถิติ แต่การคำนวณความน่าจะเป็นสุดท้ายของเหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่ง ยังคงเหมือนกับกรณีที่เป็นเหตุการณ์อิสระทางเชิงสถิติ

2. ความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ
(Conditional probabilities under statistical dependence)

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ โดยทั่วไปส่วนมากมักจะเป็นความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไข และความน่าจะเป็นร่วมภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ มากกว่าความน่าจะเป็นสุดท้าย ในที่นี้เราจะอธิบายความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขก่อน เพราะความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขนี้อาจนำไปใช้เป็นหลักในการอธิบายแนวความคิดเกี่ยวกับความน่าจะเป็นร่วม

สมมติว่า เรามีถุงอยู่ใบหนึ่งซึ่งบรรจุลูกบอลสีต่าง ๆ 10 ลูก ดังนี้ :

สีแดงจุดขาว	3 ลูก
สีแดงลายขาว	1 ลูก
สีเขียวจุดขาว	2 ลูก
สีเขียวลายขาว	4 ลูก

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอลลูกใดลูกหนึ่งจากถุงใบนี้ต่างก็เท่ากับ .1 เพราะมีลูกบอลอยู่ทั้งหมด 10 ลูก และแต่ละลูกมีความน่าจะเป็นที่จะถูกหยิบขึ้นมาเท่ากัน ตาราง 3—3 จะช่วยทำให้การอธิบายตัวอย่างต่าง ๆ ข้างล่างนี้เข้าใจง่ายยิ่งขึ้น

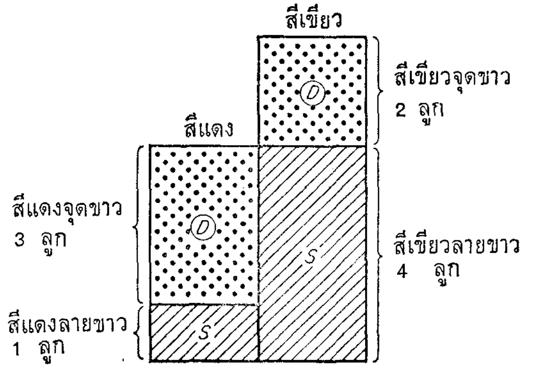
ตัวอย่าง ก. สมมติว่าใครคนหนึ่งหยิบลูกบอลขึ้นมาจากถุงหนึ่งลูก และบอกว่าลูกบอลลูกนั้นเป็นสีแดง ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลลูกนั้นจะเป็นสีแดงจุดขาวเท่ากับเท่าไร? ถ้าจะเขียนเป็นสัญลักษณ์ คำถามข้างต้นคือ P(D | R) หรือ "ถ้ากำหนดให้ลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีแดง ความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขที่ลูกบอลลูกนั้นจะเป็นสีแดงจุดขาวเท่ากับเท่าไร ?"

ตาราง 3–3

สีและแบบของลูกบอล 10 ลูก

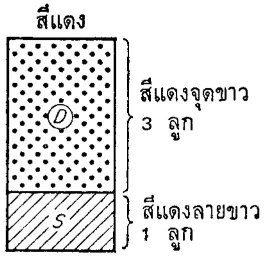
เหตุการณ์	ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์	
1	.1	สีแดงจุดขาว
2	.1	
3	.1	
4	.1	สีแดงลายขาว
5	.1	สีเขียวจุดขาว
6	.1	
7	.1	สีเขียวลายขาว
8	.1	
9	.1	
10	.1	

ถ้าจะแสดงเป็นแผนภาพ คำถามนี้ปรากฏในรูป 3–6



รูป 3–6

ในเมื่อเราทราบว่าลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีแดง การคำนวณความน่าจะเป็นที่ลูกบอลลูกนี้จะเป็นสีแดงจุดขาว เราจึงไม่ต้องคำนึงถึงลูกบอลสีเขียวที่มีอยู่ทั้งหมด และสนใจเฉพาะลูกบอลสีแดงเท่านั้น ถ้าจะเขียนเป็นแผนภาพ เราจะพิจารณาเฉพาะส่วนที่แสดงในรูป 3–7 เท่านั้น



รูป 3–7 ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลจะเป็นจุดขาวหรือลายขาว โดยกำหนดให้ลูกบอลลูกนั้นเป็นลูกบอลสีแดง

จากปัญหาดังกล่าวข้างต้น เราทราบว่ามีลูกบอลสีแดงทั้งหมด 4 ลูก ในจำนวนนี้เป็นสีแดงจุดขาว 3 ลูกและสีแดงลายขาว 1 ลูก มาถึงขั้นนี้ เราได้แยกปัญหาของเราออกมาในรูปของการหาความน่าจะเป็นอย่างง่าย ๆ ของลูกบอลสีแดงจุดขาวและสีแดงลายขาว ในการหาความน่าจะเป็นดังกล่าว เราหารจำนวนลูกบอลที่มีอยู่แต่ละอย่าง ด้วยจำนวนลูกบอลสีแดงที่มีอยู่ทั้งสิ้น ดังนี้ :

$$P(D) = \frac{3}{4} = .75$$

$$P(S) = \frac{1}{4} = .25$$

$$\underline{\underline{1.00}}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง 3/4 ของลูกบอลสีแดงที่มีอยู่เป็นสีแดงจุดขาว และอีก 1/4 เป็นสีแดงลายขาว ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีแดง ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลลูกนั้นจะเป็นสีแดงจุดขาวจึงเท่ากับ .75 ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีแดง ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลลูกนั้นจะเป็นสีแดงลายขาวเท่ากับ .25

หลังจากที่ได้คำตอบตามที่คำนวณแล้ว เราจะให้เหตุผลอย่างไรจึงจะทำให้เราสามารถพัฒนาสูตรสำหรับความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ จากข้อสังเกตที่ว่าสีของลูกบอลกำหนดความน่าจะเป็นที่ลูกบอลลูกนั้น จะเป็นลูกบอลที่มีจุดขาวหรือลายขาว (ลูกบอลสีเขียวมีโอกาสเป็นลูกบอลที่มีลายขาวมากกว่าลูกบอลสีแดง) เราจึงสรุปได้ว่าเหตุการณ์เหล่านี้เป็นเหตุการณ์พึ่งพิงทางเชิงสถิติ เนื่องจากสีของลูกบอลกระทบกระเทือนถึงความน่าจะเป็นที่ลูกบอลลูกนั้นจะเป็นลูกบอลที่มีจุดขาวหรือลายขาว เหตุการณ์ทั้งสองนี้จึงเป็นเหตุการณ์พึ่งพิง

ถ้ากำหนดให้ลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีแดง ในการคำนวณความน่าจะเป็นที่ลูกบอลลูกนี้จะเป็นสีแดงจุดขาว เราหารความน่าจะเป็นของลูกบอลสีแดงจุดขาว (3 ใน 10 ลูก หรือ .3) ด้วยความน่าจะเป็นของลูกบอลสีแดง (4 ใน 10 ลูก หรือ .4) ดังนั้น

$$P(D|R) = \frac{P(DR)}{P(R)}$$

หรือถ้าจะเขียนเป็นสูตรทั่วไป โดยใช้อักษร A และ B แทนเหตุการณ์ทั้งสอง

$$P(A|B) = \frac{(PAB)}{P(B)}$$

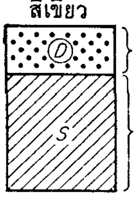
สูตรนี้เป็นสูตรสำหรับความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ

ตัวอย่าง ข. $P(D|G)$ เท่ากับเท่าใด ? $P(S|G)$ เท่ากับเท่าใด ?

$$P(D|G) = \frac{P(DG)}{P(G)} = \frac{.2}{.6} = \frac{1}{3}$$

$$P(S|G) = \frac{P(SG)}{P(G)} = \frac{.4}{.6} = \frac{2}{3}$$

เราได้แสดงปัญหานี้ในรูปของแผนภาพดังปรากฏในรูป 3–8



รูป 3–8 ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลจะเป็นจุดขาวหรือลายขาว โดยกำหนดให้ลูกบอลลูกนั้นเป็นลูกบอลสีเขียว

ความน่าจะเป็นทั้งสิ้นของลูกบอลสีเขียวเท่ากับ .6 (6 ใน 10 ลูก) ถ้าเราทราบว่าลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีเขียว ในการคำนวณความน่าจะเป็นที่ลูกบอลลูกนั้นจะเป็นลูกบอลสีเขียวจุดขาว เราจะต้องหารความน่าจะเป็นของลูกบอลสีเขียวจุดขาว (.2) ด้วยความน่าจะเป็นของลูกบอลสีเขียว (.6) หรือ .2/.6 = 1/3 ในทำนองเดียวกัน ในการคำนวณความน่าจะเป็นที่ลูกบอลลูกนั้นจะเป็นลูกบอลสีเขียวลายขาว เราหารความน่าจะเป็นของลูกบอลสีเขียวลายขาว (.4) ด้วยความน่าจะเป็นของลูกบอลสีเขียว (.6) หรือ .4/.6 = 2/3

ตัวอย่าง ค. ให้คำนวณ $P(R|D)$ และ $P(G|D)$

ดูรูป 3–9 ในเมื่อทราบว่าลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นลูกบอลที่มีจุดขาว เราไม่ต้องคำนึงถึงลูกบอลที่มีลายขาว และพิจารณาเฉพาะลูกบอลที่มีจุดขาวเท่านั้น

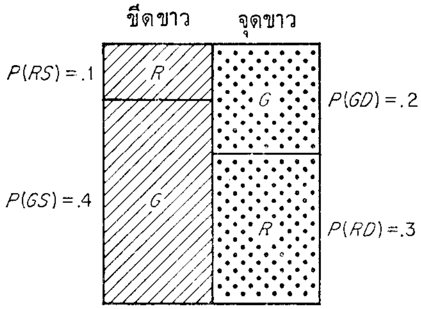


Figure 3-9

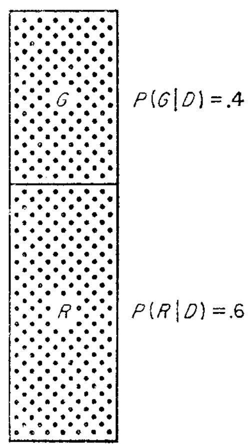
รูป 3–9

ต่อไปให้ดูรูป 3—10 รูปนี้แสดงให้เห็นว่า ถ้ากำหนดให้ลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นลูกบอลที่มีจุดขาว ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลจะเป็นลูกบอลสีเขียว หรือสีแดงเท่ากับเท่าไร ? จะสังเกตได้ว่าอัตราส่วนสัมพัทธ์ของความน่าจะเป็นทั้งสองคือ .4 ต่อ .6

$$P(G|D) = \frac{P(GD)}{P(D)} = \frac{.2}{.5} = .4$$

$$P(R|D) = \frac{P(RD)}{P(D)} = \frac{.3}{.5} = \underline{.6}$$

$$\underline{\underline{1.0}}$$



รูป 3–10

ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลจะเป็นลูกบอลสีแดงหรือสีเขียว โดยกำหนดให้ลูกบอลนั้นเป็นลูกบอลที่มีจุดขาว (ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลจะมีลายขาว = 0)

ตัวอย่าง ง. ให้คำนวณ P(R|S) และ P(G|S)

$$P(R|S) = \frac{P(RS)}{P(S)} = \frac{\cdot 1}{\cdot 5} = \cdot 2$$

$$P(G|S) = \frac{P(GS)}{P(S)} = \frac{\cdot 4}{\cdot 5} = \frac{\cdot 8}{\underline{\underline{1 \cdot 0}}}$$

3. ความน่าจะเป็นร่วมภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ

(Joint probabilities under statistical dependence)

เราได้แสดงให้เห็นแล้วว่า สูตรสำหรับความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขภายใต้สภาวะการพึ่งพิงทางเชิงสถิติ คือ $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ ถ้าหาค่าของ $P(AB)$ จากสูตรนี้ (โดยการคูณไขว้อย่างง่าย ๆ) เราจะได้ $P(AB) = P(A|B) \times P(B)$ สูตรนี้เป็นสูตรสำหรับความน่าจะเป็นร่วมภายใต้สภาวะการพึ่งพิงทางเชิงสถิติ และอ่านว่า "ความน่าจะเป็นร่วมของเหตุการณ์ A และ B เท่ากับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A โดยกำหนดว่าเกิดเหตุการณ์ B แล้ว คูณด้วยความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B" จะสังเกตได้ว่าสูตรนี้ไม่ใช่ $P(AB) = P(A) \times P(B)$ ซึ่งเป็นสูตรภายใต้สภาวะความเป็นอิสระทางเชิงสถิติ

เมื่อนำสูตรทั่วไป $P(AB) = P(A|B) \times P(B)$ มาใช้กับคำว่าสีแดง สีเขียว จุดขาวและลายขาว เราจะได้ $P(RD) = P(R|D) \times P(D)$ หรือ $P(RD) = .6 \times .5 = .3$ ในที่นี้ .6 คือความน่าจะเป็นที่ลูกบอลจะเป็นลูกบอลสีดำ ถ้ากำหนดให้ลูกบอลลูกนั้นเป็นลูกบอลที่มีจุดขาว (ตามที่คำนวณในตัวอย่าง ค. ข้างต้น) และ .5 คือความน่าจะเป็นที่ลูกบอลจะเป็นลูกบอลที่มีจุดขาว (ดังที่คำนวณได้ในตัวอย่าง ค. เช่นกัน)

เราอาจพิสูจน์ได้ว่า $P(RD) = .3$ จากตาราง 3–3 ซึ่งกำหนดความน่าจะเป็นมาโดยวิธีตรวจนับ (ลูกบอล 3 ใน 10 ลูกเป็นลูกบอลสีแดงจุดขาว)

ความน่าจะเป็นร่วมต่อไปนี้ คำนวณได้ในลักษณะเดียวกับการคำนวณข้างต้น ความน่าจะเป็นเหล่านี้อาจพิสูจน์ได้โดยอ้างอิงจากตาราง 3–3 เช่นกัน

$$P(RS) = P(R|S) \times P(S) = .2 \times .5 = .1$$
$$P(GD) = P(G|D) \times P(D) = .4 \times .5 = .2$$
$$P(GS) = P(G|S) \times P(S) = .8 \times .5 = .4$$

จะสังเกตได้ว่า ความน่าจะเป็นสุดท้ายของเหตุการณ์ "ลูกบอลสีแดง" อาจคำนวณได้โดยรวมความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ร่วมที่มีลูกบอลสีแดงรวมอยู่ด้วย

$$P(R) = P(RD) + P(RS) = .3 + .1 = .4$$

ในทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นสุดท้ายของเหตุการณ์ "ลูกบอลสีเขียว" อาจคำนวณได้โดยรวมความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ร่วมที่มีลูกบอลสีเขียวรวมอยู่ด้วย

$$P(G) = P(GD) + P(GS) = .2 + .4 = .6$$

ในทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นสุดท้ายของเหตุการณ์ "ลูกบอลที่มีจุดขาว" อาจคำนวณได้โดยรวมความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ร่วมที่มีลูกบอลที่มีจุดขาวรวมอยู่ด้วย

$$P(D) = P(RD) + P(GD) = .3 + .2 = .5$$

และความน่าจะเป็นสุดท้ายของเหตุการณ์ "ลูกบอลที่มีลายขาว" อาจคำนวณได้โดยรวมความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ร่วมที่มีลูกบอลที่มีลายขาวรวมอยู่ด้วย

$$P(S) = P(RS) + P(GS) = .1 + .4 = .5$$

ความน่าจะเป็นสุดท้ายทั้ง 4 คือ

$$P(R) = .4$$
$$P(G) = .6$$
$$P(D) = .5$$
$$P(S) = .5$$

อาจพิสูจน์ได้จากตาราง 3—3

เราได้พิจารณาความน่าจะเป็นภายใต้สภาวะการพึ่งพิงทางเชิงสถิติทั้ง 3 ชนิดแล้ว คือ ความน่าจะเป็นสุดท้าย ความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไข และความน่าจะเป็นร่วม ตาราง 3—4 ข้างล่างนี้เป็นการสรุปความน่าจะเป็นทั้งสามชนิดดังกล่าว

ตาราง 3—4

ความน่าจะเป็นภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ		
ชนิดของความน่าจะเป็น	สัญลักษณ์	สูตร
1. สุดท้าย (หรือที่ไม่มีเงื่อนไข)	$P(A)$	$P(A)$
2. ร่วม	$P(AB)$	$P(A\|B) \times P(B)$
3. ที่มีเงื่อนไข	$P(A\|B)$	$\frac{P(AB)}{P(B)}$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเป็นอิสระและการพึ่งพิง (Relationship between Independence and Dependence)

ภายใต้สภาวะการพึ่งพิงทางเชิงสถิติ สูตรสำหรับความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไข คือ $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ แต่สูตรสำหรับความน่าจะเป็นร่วมภายใต้ความเป็นอิสระ คือ $P(AB) = P(A) \times P(B)$ แทนค่า $P(AB)$ ในสูตรสำหรับความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขด้วย $P(A) \times P(B)$ เราจะได้

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)}$$

ตัด P(B) ที่ปรากฏอยู่ในตัวเศษและส่วนออกไป จะได้

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

สูตรที่ได้คือ $P(A|B) = P(A)$ นี้เรียกว่า "คำนิยามทางคณิตศาสตร์ของความเป็นอิสระทางเชิงคณิตศาสตร์" (mathematical definition of statistical independence) ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าสูตรนี้เป็นจริงได้อย่างไร

1. ในการโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่ง ปรากฏว่าครั้งแรกออกก้อย ถ้าโยนเหรียญนี้เป็นครั้งที่ 2 ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวเท่ากับเท่าไร ?

ถ้าใช้คำว่าหัวและก้อย แทนเข้าไปในสูตร $P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)}$ เราจะได้ $P(H_2|T_1) = \frac{P(H_2) \times P(T_1)}{P(T_1)} = \frac{.5 \times .5}{.5} = .5$ ผลของการโยนเหรียญครั้งแรกไม่ได้กระทบกระเทือนถึงความน่าจะเป็นของการโยนครั้งที่ 2 เลย กล่าวอีกนัยหนึ่ง $P(H_2|T_1) = P(H_2)$ จะสังเกตได้ว่าสูตรนี้เหมือนกับสูตรทั่วไป $P(A | B) = P(A)$

2. ในการโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่งสองครั้ง ปรากฏว่าออกก้อยทั้งสองครั้ง ถ้าโยนเหรียญนี้เป็นครั้งที่ 3 ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวเท่ากับเท่าไร ?

$$P(H_3|T_1T_2) = \frac{P(H_3) \times P(T_1) \times P(T_2)}{P(T_1) \times P(T_2)} = \frac{.5 \times .5 \times .5}{.5 \times .5} = \frac{.125}{.25} = .5$$

จะสังเกตได้ว่า เราได้ขยายสูตรทั่วไปสำหรับกรณีที่มีความเป็นอิสระออกไป แต่ไม่ได้เปลี่ยนแปลงแนวความคิดในเรื่องนี้แต่อย่างใด ลองเปรียบเทียบสูตรทั้งสองนี้

$P(H_3|T_1T_2)$ มีความหมายอย่างเดียวกับ $P(A|B)$ เพราะ H_3 ในสูตรแรกเทียบได้กับ A ในสูตรหลัง และ T_1T_2 เทียบได้กับ B

ในทำนองเดียวกัน $\frac{P(A) \times P(B)}{P(B)}$ เทียบได้กับ $\frac{P(H_3) \times P(T_1) \times P(T_2)}{P(T_1) \times P(T_2)}$

ดังนั้นโดยการขยายสูตรออกไป เราได้แสดงให้เห็นแล้วว่า $P(H_3|T_1T_2) = P(H_3)$

การพิสูจน์ให้เห็นว่า $P(AB) = P(A) \times P(B)$ ภายใต้ความเป็นอิสระทางเชิงสถิติโดยอาศัยคณิตศาสตร์นั้น มีความสับสนยุ่งยากกว่าวิธีทำความเข้าใจอย่างง่าย ๆ ดังนั้น เราจึงขออธิบายโดยอาศัยวิธีการหลัง

สมมติว่า ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกบอล 2 ลูก ลูกหนึ่งเป็นสีแดง (R) อีกลูกหนึ่งสีน้ำเงิน (B) ถ้าหยิบลูกบอลจากถุงนี้ติดต่อกัน 2 ครั้ง (เมื่อหยิบลูกบอลจากถุงขึ้นแล้ว เราจะคืนลูกบอล

ลูกนั้นกลับเข้าสู่ถุงก่อนที่จะทำการหยิบครั้งต่อไป) ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอลสีแดงทั้งสองครั้งเท่ากับเท่าไร ? ในการหาคำตอบให้กับคำถามนี้ เราต้องพิจารณาดูว่าเราอาจจะหยิบลูกบอลสองลูกนี้ขึ้นมาในลักษณะต่าง ๆ กันอย่างไรบ้าง ? ถ้าหยิบลูกบอลขึ้นมา 2 ครั้ง ลูกบอลที่ถูกหยิบขึ้นมาอาจจะเป็น (1) RR (2) RB (3) BB (4) BR เหตุการณ์ทั้งสี่นี้เป็นเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกัน และที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทั้งสี่รวมกันเข้าจะต้องเท่ากับ 1 เหตุการณ์ทั้งสี่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากัน เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์แต่ละอย่างจึงเท่ากับ 1/4 หรือ .25 ดังนี้

เหตุการณ์	**ความน่าจะเป็น**
RR	.25
RB	.25
BB	.25
BR	.25
	1.00

เนื่องจากมีลูกบอลอยู่เพียง 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอลลูกใดลูกหนึ่งจึงเท่ากับ 1/2 หรือ .5 กล่าวคือ $P(R) = P(B) = .5$ ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์แต่ละอย่างจึงเท่ากับ $.5 \times .5 = .25$ ซึ่งเป็นไปตามสูตรสำหรับเหตุการณ์อิสระทางเชิงสถิติ $P(AB) = P(A) \times P(B)$ เพราะฉะนั้น $P(RR) = P(R) \times P(R)$

จะสังเกตได้ว่า ถ้าเหตุการณ์ต่าง ๆ มีโอกาสเกิดขึ้นไม่เท่ากัน ความน่าจะเป็นที่คำนวณได้จะไม่เหมือนกับความน่าจะเป็นที่คำนวณได้ข้างต้น ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่มีลูกบอลสีแดง 9 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงิน 1 ลูกอยู่ในถุงใบหนึ่ง ผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ยังคงเหมือนเดิมคือ RR, RB, BB และ BR แต่โอกาสที่จะหยิบลูกบอลสีแดงขึ้นมาหนึ่งลูกเป็น 9 เท่าของโอกาสที่จะหยิบลูกบอลสีน้ำเงินขึ้นมาหนึ่งลูก เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ทั้ง 4 ที่คำนวณได้จึงปรากฏดังนี้

เหตุการณ์	ความน่าจะเป็น
RR	$.9 \times .9 = .81$
RB	$.9 \times .1 = .09$
BB	$.1 \times .1 = .01$
BR	$.1 \times .9 = .09$
	1.00

เท่าที่ได้กล่าวไปแล้วทั้งหมด เป็นการอธิบายความน่าจะเป็นภายใต้ความเป็นอิสระทางเชิงสถิติ และภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ เพื่อสะดวกในการใช้อ้างอิงต่อไป เราจึงได้สรุปความน่าจะเป็นชนิดต่าง ๆ ไว้ในตาราง 3–5

ตาราง 3—5

ความน่าจะเป็นภายใต้ความเป็นอิสระและการพึ่งพิงทางเชิงสถิติ			
ชนิดของความน่าจะเป็น	สัญลักษณ์	สูตรภายใต้ความเป็นอิสระทางเชิงสถิติ	สูตรภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ
1. สุดท้าย	P(A)	P(A)	P(A)
2. ร่วม	P(A|B)	P(A) × P(B)	P(A|B) × P(B)
3. ที่มีเงื่อนไข	P(AB)	P(A)	$\frac{P(AB)}{P(B)}$

การแก้ไขความน่าจะเป็นที่ได้กะประมาณไว้ก่อน (Revising Prior Estimates of Probabilities)

ถ้าได้รับข้อสนเทศเพิ่มเติม เราอาจจะดัดแปลงความน่าจะเป็นได้เสมอ ความน่าจะเป็นใหม่หรือที่ได้รับการดัดแปลงแล้ว เรียกว่า "ความน่าจะเป็นที่ได้แก้ไขแล้ว" (revised probabilities) จากข้อเท็จจริงที่ว่าเมื่อมีข้อสนเทศเพิ่มมากขึ้น เราก็สามารถที่จะแก้ไขความน่าจะเป็นให้ถูกต้องยิ่งขึ้น ทำให้ทฤษฎีความน่าจะเป็นมีคุณค่ามากต่อการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน

ตัวอย่างง่าย ๆ เช่น เรามีลูกเต๋าที่ถูกแปรรูปแล้ว (ลำเอียงหรือถ่วงน้ำหนัก) 2 ชนิด บรรจุอยู่ในถุงใบหนึ่ง ครึ่งหนึ่งของลูกเต๋าเหล่านี้จะขึ้นหน้าเอี่ยว (หรือจุดเดียว) ร้อยละ 30

ของจำนวนครั้งที่ทอด P(ace) = .3 อีกครึ่งหนึ่งจะขึ้นหน้าเอี่ยวร้อยละ 60 ของจำนวนครั้งที่ทอด P(ace) = .6 เราจะเรียกลูกเต๋าจำนวนครึ่งแรกว่าชนิดที่ 1 และจำนวนครึ่งหลังว่าชนิดที่ 2 เราหยิบลูกเต๋าขึ้นมาจากถุงหนึ่งลูกแล้วทอดลูกเต๋านั้นหนึ่งครั้ง ปรากฏว่าขึ้นหน้าเอี่ยว ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าลูกนี้เป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 เท่ากับเท่าไร ? ในเมื่อลูกเต๋าทั้งสองชนิดมีจำนวนเท่ากัน เราอาจจะตอบได้ว่าความน่าจะเป็นเท่ากับเศษหนึ่งส่วนสอง แต่เราอาจจะให้คำตอบที่ถูกต้องกว่านี้ เพื่อทำให้การตอบคำถามดังกล่าวเป็นไปโดยถูกต้องยิ่งขึ้น เราจึงได้สร้างตาราง 3—6

ตาราง 3—6

เหตุการณ์ขั้นต้น	ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ขั้นต้น	P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง เหตุการณ์ขั้นต้น)	P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง เหตุการณ์ขั้นต้น)
ชนิดที่ 1	.5	.3	.15
ชนิดที่ 2	.5	.6	.30
	1.0		.45

ผลรวมของความน่าจะเป็นสำหรับเหตุการณ์ขั้นต้นเท่ากับ 1.0 ทั้งนี้เพราะว่ามีลูกเต๋าอยู่เพียง 2 ชนิด และความน่าจะเป็นของลูกเต๋าแต่ละชนิดต่างก็เท่ากับ .5 ลูกเต๋าทั้งสองชนิดจึงประกอบขึ้นเป็นเหตุการณ์ที่เป็นทั้งเหตุการณ์ที่ขจัดซึ่งกันและกัน และที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

ผลรวมของ P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง | เหตุการณ์ขั้นต้น) ไม่เท่ากับ 1.0 เพราะตัวเลข .3 และ .6 เป็นความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง ถ้าลูกเต๋าลูกนั้นเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 ตามลำดับ

ช่องที่ 4 แสดงความน่าจะเป็นร่วมที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง และเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 ซึ่งเท่ากับ $.5 \times .3 = .15$ และความน่าจะเป็นร่วมที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้งและเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 2 ซึ่งเท่ากับ $.5 \times .6 = .30$ ผลรวมของความน่าจะเป็นร่วมทั้งสองนี้ (.45) คือ ความน่าจะเป็นสุดท้ายที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง (เราได้อธิบายเกี่ยวกับแนวความคิดในเรื่องนี้แล้วในหน้า 71—72) จะสังเกตได้ว่า ความน่าจะเป็นร่วมของแต่ละกรณีคำนวณจากสูตร $P(AB) = P(A|B) \times P(B)$

ในการคำนวณความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าที่หยิบขึ้นมาเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 เราใช้สูตรความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขภายใต้การพึ่งพิงทางเชิงสถิติ ดังนี้

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

เมื่อนำมาปรับใช้กับปัญหาข้างต้น เราจะได้

$$P\ (\text{ชนิดที่ 1}\ |\ \text{ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง}) = \frac{P\ (\text{ชนิดที่ 1, ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง})}{P\ (\text{ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง})}$$

หรือ $P\ (\text{ชนิดที่ 1}\ |\ \text{ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง}) = \frac{.15}{.45} = \frac{1}{3}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าที่หยิบขึ้นมาเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 จึงเท่ากับเศษหนึ่งส่วนสาม

ลองคำนวณความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าลูกนี้เป็นลูกเต๋าชนิดที่ 2

$$P\ (\text{ชนิดที่ 2}\ |\ \text{ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง}) = \frac{P\ (\text{ชนิดที่ 2, ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง})}{P\ (\text{ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง})} = \frac{.30}{.45} = \frac{2}{3}$$

สมมติว่า เราทอดลูกเต๋าลูกเดิมอีกครั้งหนึ่ง ปรากฏว่าขึ้นหน้าเอี่ยวอีก ความน่าจะเป็นที่ได้รับการแก้ไขอีกขั้นหนึ่งว่า ลูกเต๋าลูกนี้เป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 เท่ากับเท่าไร ? ดูตาราง 3—7

ตาราง 3—7

เหตุการณ์ขั้นต้น	ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ขั้นต้น	P(ขึ้นหน้าเอี่ยว 1 ครั้ง | เหตุการณ์ขั้นต้น)	P(ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง | เหตุการณ์ขั้นต้น)	P(ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง | เหตุการณ์ขั้นต้น)
ชนิดที่ 1	.5	.3	.09	.045
ชนิดที่ 2	.5	.6	.36	.180
	1.0			.225

ตาราง 3—7 มีช่องเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งช่อง คือ P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง|เหตุการณ์ขั้นต้น) ช่องนี้แสดงความน่าจะเป็นร่วมที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง จากการทอดลูกเต๋าติดต่อกัน 2 ครั้ง ถ้าเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 และถ้าเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 2 กล่าวคือ P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง|ชนิดที่ 1) $= .3 \times .3 = .09$ และ P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง|ชนิดที่ 2) $= .6 \times .6 = .36$ ความน่าจะเป็นร่วมที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง จากการทอดลูกเต๋าติดต่อกัน 2 ครั้ง และเป็นลูกเต๋าแต่ละชนิด (ชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2) ปรากฏอยู่ในช่องสุดท้าย กล่าวคือ P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 2

ครั้ง, ชนิดที่ 1) เท่ากับความน่าจะเป็นของลูกเต๋าชนิดที่ 1 คูณด้วย P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง|ชนิดที่ 1) หรือ .5 × .09 = .045 และ P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง, ชนิดที่ 2) เท่ากับความน่าจะเป็นของลูกเต๋าชนิดที่ 2 คูณด้วย P (ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง|ชนิดที่ 2) หรือ .5 × .36 = .180 ผลรวมที่ได้ (.225) คือความน่าจะเป็นสุดท้ายที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง ในการทอดลูกเต๋าติดต่อกัน 2 ครั้ง

ต่อไป เราจะคำนวณความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าที่หยิบขึ้นมาเป็นชนิดที่ 1 โดยกำหนดให้ลูกเต๋านี้ขึ้นหน้าเอี่ยวในการทอดติดต่อกัน 2 ครั้ง เราใช้สูตรทั่วไปสูตรเดิมโดยเปลี่ยนเป็น

$$P\,(\text{ชนิดที่ 1}|\text{ ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง}) = \frac{P\,(\text{ชนิดที่ 1, ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง})}{P(\text{ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง})} = \frac{.045}{.225} = .2$$

ในทำนองเดียวกัน

$$P\,(\text{ชนิดที่ 2}|\text{ ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง}) = \frac{P\,(\text{ชนิดที่ 2, ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง})}{P\,(\text{ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้ง})} = \frac{.180}{.225} = .8$$

เท่าที่ได้กล่าวไปแล้วทั้งหมด ทำให้เราเรียนรู้อะไรได้บ้าง ? เมื่อหยิบลูกเต๋าขึ้นมาในตอนแรก เราทราบแต่เพียงว่าความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าลูกนั้นจะเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 เท่าคับ .5 และความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าลูกนั้นจะเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 2 ก็ = .5 กล่าวอีกนัยหนึ่ง โอกาสที่ลูกเต๋าจะเป็นชนิดที่ 1 หรือชนิดที่ 2 50 : 50 หลังจากที่ได้ทอดลูกเต๋าไปแล้วหนึ่งครั้ง เราได้แก้ไขความน่าจะเป็นเดิมเป็น :

ความน่าจะเป็นที่จะเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 = 1/3

ความน่าจะเป็นที่จะเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 2 = 2/3

หลังจากที่ได้ทอดลูกเต๋าครั้งที่ 2 เราได้แก้ไขความน่าจะเป็นอีกครั้งหนึ่งเป็น :

ความน่าจะเป็นที่จะเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 1 = .2

ความน่าจะเป็นที่จะเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 2 = .8

ดังนั้น เราได้เปลี่ยนความน่าจะเป็นซึ่งเดิมเท่ากับ .5 สำหรับลูกเต๋าทั้งสองชนิด มาเป็น .2 สำหรับลูกเต๋าชนิดที่ 1 และ .8 สำหรับลูกเต๋าชนิดที่ 2 หมายความว่า เมื่อพิจารณาจากข้อสนเทศใหม่ที่ได้รับจากการทอดลูกเต๋า 2 ครั้ง เรามีความเชื่อมั่น 80 % ว่าลูกเต๋าที่หยิบขึ้นมานั้นเป็นลูกเต๋าชนิดที่ 2 กล่าวอีกนัยหนึ่ง ถ้าเราจะพนันว่าลูกเต๋าที่ขึ้นหน้าเอี่ยว 2 ครั้งในการทอดลูกเต๋าลูกนั้นติดต่อกัน 2 ครั้ง เป็นลูกเต๋าชนิดที่ 2 แล้ว เราจะเป็นผู้ทายถูกเป็นจำนวนร้อยละ 80 ของจำนวนครั้งทั้งหมด ที่มีการหยิบลูกเต๋าขึ้นมา 1 ลูกและทอดลูกเต๋านั้น 2 ครั้ง

ต่อไปเป็นตัวอย่างเกี่ยวกับปัญหาในทางปฏิบัติตัวอย่างหนึ่ง สมมติว่า ผู้ผลิตคนหนึ่งมีเครื่องจักรอัตโนมัติอยู่เครื่องหนึ่ง ซึ่งใช้ในการผลิตลูกปืน ถ้าตั้งเครื่องจักรถูกต้อง (กล่าว

คือ ได้มีการปรับปรุงเครื่องจักรอย่างเหมาะสม) เครื่องจักรจะผลิตชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 90 % ถ้าตั้งเครื่องจักรไม่ถูกต้อง เครื่องจักรจะผลิตชิ้นส่วนที่ใช้ได้เพียง 40 % จากประสบการณ์ในอดีตปรากฏว่าร้อยละ 70 ของการตั้งเครื่องจักรได้กระทำไปอย่างถูกต้อง ในการตั้งเครื่องจักรครั้งหนึ่ง เครื่องจักรผลิตชิ้นส่วนที่ใช้ได้ติดต่อกัน 3 ชิ้นแรก ความน่าจะเป็นที่ได้แก้ไขแล้วที่ว่าได้มีการตั้งเครื่องจักรอย่างถูกต้องแล้วเท่ากับเท่าไร ? ดูตาราง 3—8

ต่อไป เราจะคำนวณความน่าจะเป็นที่ได้แก้ไขแล้ว สำหรับการตั้งเครื่องจักรอย่างถูกต้องโดยดัดแปลงสูตรทั่วไป $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ ให้เป็น

$$P\ (\text{ถูกต้อง} \mid \text{ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น}) = \frac{P\ (\text{ถูกต้อง, ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น})}{P\ (\text{ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น})} = \frac{.5103}{.5295} = .9637$$

ความน่าจะเป็นของการตั้งเครื่องจักรอย่างถูกต้องเท่ากับ .9637 หรือ 96.37 % ดังนั้น เราได้แก้ไขความน่าจะเป็นของการตั้งเครื่องจักรอย่างถูกต้อง จากเดิม 70 % มาเป็น 96.37 % โดยอาศัยชิ้นส่วนสามชิ้นแรกที่ผลิตได้

ผู้ที่ริเริ่มแนวความคิดเกี่ยวกับความน่าจะเป็นที่ได้แก้ไขแล้ว คือ พระโธมัส เบยส์ (Reverend Thomas Bayes) (ศตวรรษที่ 18) ดังนั้นเราจึงเรียกสูตรมูลฐานของความน่าจะ

ตาราง 3—8

เหตุการณ์	P(เหตุการณ์)	P(ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 1 ชิ้น | เหตุการณ์)	P(ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น | เหตุการณ์)	P(เหตุการณ์, ชิ้นส่วนที่ใช้ได้3ชิ้น)
ถูกต้อง	.70	.90	.729	.5103
ไม่ถูกต้อง	.30	.40	.064	.0192
	1.00			.5295

หัวข้อต่าง ๆ ที่ปรากฏในตารางอาจตีความได้ดังนี้

P (เหตุการณ์) หมายถึงความน่าจะเป็นของการตั้งเครื่องจักรถูกต้องหรือไม่ถูกต้อง กล่าวคือ P (ถูกต้อง) = .70 (ตามที่กำหนดไว้ในโจทย์) และ P (ไม่ถูกต้อง) = .30 = 1.00 — P (ถูกต้อง) = 1.00—.70

P (ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 1 ชิ้น | เหตุการณ์) หมายถึงความน่าจะเป็นที่จะได้ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 1 ชิ้น โดยกำหนดให้การตั้งเครื่องจักรได้กระทำไปอย่างถูกต้อง หรือไม่ถูกต้อง เราได้กำหนดความน่าจะเป็นทั้งสองนี้ไว้ในโจทย์

P (ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น | เหตุการณ์) คือความน่าจะเป็นที่จะได้ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น จากการทดลองที่ติดต่อกัน 3 ครั้ง โดยกำหนดเหตุการณ์อย่างหนึ่งให้ (กล่าวคือ ตั้งเครื่องจักรถูกต้อง หรือไม่ถูกต้อง) ความน่าจะเป็นที่ปรากฏในช่องนี้คำนวณได้ ดังนี้

P (ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น | ถูกต้อง) = .9 × .9 × .9 = .729

P (ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น | ไม่ถูกต้อง) = .4 × .4 × .4 = .064

P (เหตุการณ์, ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น) คือความน่าจะเป็นร่วมของเหตุการณ์ (ตั้งเครื่องจักรถูกต้อง หรือไม่ถูกต้อง) และได้ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น ความน่าจะเป็นที่ปรากฏในช่องนี้คำนวณได้ดังนี้

P (ถูกต้อง, ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น) = .729 × .70 = .5103

P (ไม่ถูกต้อง, ชิ้นส่วนที่ใช้ได้ 3 ชิ้น) = .064 × .30 = .0192

จะสังเกตได้ว่า ความน่าจะเป็นทั้งสองนี้ คำนวณตามสูตรทั่วไปทางคณิตศาสตร์สำหรับความน่าจะเป็นร่วม ภายใต้สภาวะการพึ่งพิง $P(AB) = P(A|B) \times P(B)$

เป็นที่มีเงื่อนไขภายใต้การพึ่งพิง $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ ว่าเป็นทฤษฎีของเบยส์ (Bayes' theorem)

ทฤษฎีของเบยส์ก่อให้เกิดวิธีการทางสถิติ เกี่ยวกับการประเมินข้อสนเทศที่ได้รับเข้ามาใหม่ และการแก้ไขความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ตามที่ได้กะประมาณไว้แต่เดิมโดยอาศัยข้อสนเทศที่มีอยู่อย่างจำกัดเพียงจำนวนหนึ่ง ถ้านำทฤษฎีของเบยส์มาใช้อย่างถูกต้องแล้วเราก็ไม่ต้องรวบรวมข้อมูลจำนวนมาก ซึ่งต้องใช้ระยะเวลาที่ค่อนข้างจะยาวนาน เพื่อใช้ในการตัดสินใจโดยอาศัยความน่าจะเป็น การค้นพบนี้ทำให้เบยส์เองรู้สึกตื่นเต้นมากถึงกับปฏิเสธไม่ยอมให้เผยแพร่ผลงานของเขาในระหว่างที่เขายังมีชีวิตอยู่

แบบฝึกหัด

3–1 จงทำให้การแจกแจงของจำนวนนักเรียนชั้นปีที่ 1 ถึงปีที่ 7 อยู่ในลักษณะปกติ

ชั้นปีที่	จำนวนนักเรียน
1	35
2	24
3	41
4	27
5	33
6	19
7	21

3–2 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลต่าง ๆ ดังนี้

สีแดงล้วน	3 ลูก
สีแดงลายขาว	1 ลูก
สีแดงจุดขาว	1 ลูก
สีเขียวจุดขาว	1 ลูก
สีเขียวลายขาว	4 ลูก

สมมติว่าเราหยิบลูกบอลจากกล่องครั้งละลูก แต่ก่อนที่จะหยิบลูกบอลครั้งถัดไปเราจะคืนลูกบอลลูกที่หยิบขึ้นมาก่อนทุกครั้ง

ก. ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอลสีแดงลายขาวเท่ากับเท่าไร ?
ข. ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอลที่มีลายเท่ากับเท่าไร ?
ค. ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอลที่มีสีเขียวเท่ากับเท่าไร ?

3—3 กำหนดเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่งให้

ก. ถ้าโยนเหรียญนี้ติดต่อกัน 2 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวทั้ง 2 ครั้งเท่ากับเท่าไร ?

ข. ความน่าจะเป็นที่จะออกก้อย 2 ครั้งเท่ากับเท่าไร ?

3—4 กำหนดเหรียญไม่เที่ยงธรรมอันหนึ่งซึ่งมี P(H) = .7 และ P(T) = .3 ให้

ก. ความน่าจะเป็นที่จะออกหัว 2 ครั้ง และออกก้อย 1 ครั้ง ตามลำดับเท่ากับเท่าไร ?
ข. ความน่าจะเป็นที่จะออกก้อย 2 ครั้งเท่ากับเท่าไร ?

3—5 ในการโยนเหรียญเที่ยงธรรมอันหนึ่ง 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะออกหัวอย่างน้อยที่สุด 1 ครั้ง เท่ากับเท่าไร ?

3—6 ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกบอลต่าง ๆ ดังนี้

		ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
สีแดงจุดขาว	5 ลูก	.25
สีแดงลายขาว	3 ลูก	.15
สีแดงล้วน	4 ลูก	.20
สีเขียวจุดขาว	2 ลูก	.10
สีเขียวลายขาว	3 ลูก	.15
สีเขียวล้วน	3 ลูก	.15
รวม	20 ลูก	1.00

ก. กำหนดให้ลูกบอลที่หยิบขึ้นมามีจุดขาว ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลเป็นลูกบอลสีแดงเท่ากับเท่าไร ?

ข. กำหนดให้ลูกบอลที่ท่านหยิบขึ้นมาเป็นลูกบอลสีเขียว ความน่าจะเป็นที่ลูกบอลจะมีลายขาวเท่ากับเท่าไร ?

3–7 ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกเต๋าที่ถูกถ่วงน้ำหนักจำนวนหลายลูก ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้าเอี่ยวของลูกเต๋าจำนวนครึ่งหนึ่ง (ชนิดที่ 1) เท่ากับ .4 และความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหน้าเอี่ยวสำหรับลูกเต๋าอีกครึ่งหนึ่ง (ชนิดที่ 2) เท่ากับ .7 เราหยิบลูกเต๋าขึ้นมาลูกหนึ่งและทอด 3 ครั้ง ปรากฏว่าขึ้นหน้าเอี่ยวเพียงครั้งเดียว ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าลูกนี้เป็นลูกเต๋าชนิดที่ 2 เท่ากับเท่าไร ?

3–8 ความน่าจะเป็นในการตั้งเครื่องจักรอย่างถูกต้องเท่ากับ .9 ถ้าตั้งเครื่องจักรถูกต้อง ความน่าจะเป็นที่จะได้ชิ้นส่วนที่ดีเท่ากับ .95 แต่ถ้าตั้งเครื่องจักรไม่ถูกต้อง ความน่าจะเป็นที่จะได้ชิ้นส่วนที่ดีเท่ากับ .3

นำชิ้นส่วนชิ้นแรกที่เครื่องจักรผลิตได้ไปทำการทดสอบ ปรากฏว่า ไม่เป็นที่น่าพอใจ ณ จุดนี้ ความน่าจะเป็นที่มีการตั้งเครื่องจักรอย่างถูกต้องเท่ากับเท่าไร ?

3–9 โดยอาศัยข้อสนเทศที่ให้ไว้ในข้อ 3–8 สมมติว่าชิ้นส่วนที่ 2 เป็นชิ้นส่วนที่ดีน่าจะเป็นที่มีการตั้งเครื่องจักรอย่างถูกต้องเท่ากับเท่าไร ?

3–10 การตั้งเครื่องผสมเคมีของบริษัทผลิตปุ๋ยแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าในอดีตร้อยละ 30 ใช้ไม่ได้ ถ้าตั้งขบวนการผสมถูกต้อง เครื่องจักรจะผลิตปุ๋ยที่ใช้ได้ร้อยละ 90 ถ้ามีข้อผิดพลาดเกิดขึ้นในการตั้งเครื่องจักร เครื่องจักรจะผลิตปุ๋ยที่ใช้ได้เพียงร้อยละ 20 เท่านั้น บริษัทได้ปรับปรุงขบวนการผสมและนำปุ๋ยที่ผลิตได้ 5 ถุงแรกไปทดสอบ ปรากฏว่า ถุงที่ 1 ใช้ไม่ได้ ถุงที่ 2 ใช้ได้ ถุงที่ 3 ใช้ได้ ถุงที่ 4 ใช้ไม่ได้ และถุงที่ 5 ใช้ได้ บริษัทควรจะทำการผลิตต่อไปหรือไม่ ?

บทที่ 4

การทำการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอน
(DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTY)

แม้ว่าการตัดสินใจทางธุรกิจบางอย่างอาจทำไปภายใต้สภาพการณ์ที่เกือบแน่นอนก็ตาม แต่โดยทั่วไป ปัจจัยความไม่แน่นอนยังคงเข้ามาพัวพันกับการตัดสินใจซึ่งเป็นหน้าที่อย่างหนึ่งของผู้จัดการอยู่เสมอ นักธุรกิจไม่อาจทราบล่วงหน้าได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าการขายและต้นทุน (รวมตลอดถึงกำไร) ในอนาคตจะเป็นอย่างไร ด้วยเหตุนี้นักธุรกิจจึงต้องทำการกะประมาณ หรือพยากรณ์ที่ดีที่สุดเท่าที่เขาจะทำได้เกี่ยวกับตัวแปรผันขั้นมูลฐานทั้งสองดังกล่าว และทำการตัดสินใจโดยอาศัยการกะประมาณหรือการพยากรณ์ที่ตนได้ทำไว้

เราอาจนำความน่าจะเป็นเข้ามาใช้ในการกะประมาณดังกล่าวได้ วิธีการทำการตัดสินใจโดยอาศัยความน่าจะเป็นอาจนำเข้ามาใช้ในเรื่องต่าง ๆ เป็นต้นว่าการขายตามวิธีนี้เราจะต้องวิเคราะห์พฤติกรรมของการขายในอดีต และกำหนดความน่าจะเป็นของปริมาณการขายที่อาจเกิดขึ้นได้ในระดับต่าง ๆ ในงวดถัดไป ผู้ทำการตัดสินใจจะต้อง :

1. พิจารณาปริมาณการขายที่อาจเกิดขึ้นได้ในระดับต่าง ๆ ในงวดถัดไป
2. กำหนดความน่าจะเป็นของค่าที่อาจเกิดขึ้นได้แต่ละค่า
3. จัดทำพยากรณ์การขายสำหรับงวด

ตัวแปรผันเชิงสุ่ม (Random Variable)

ตัวแปรผันเชิงสุ่ม คือค่าหรือจำนวนที่วัดได้ที่เปลี่ยนแปลงอยู่เสมอจากปรากฏการณ์หนึ่งไปยังอีกปรากฏการณ์หนึ่ง จากเหตุการณ์หนึ่งไปยังอีกเหตุการณ์หนึ่งในลักษณะที่ไม่อาจคาดหมายลำดับที่ค่าเหล่านั้นจะเกิดขึ้นก่อนหลังอย่างใด ตัวอย่างเช่น การขายในวันพรุ่งนี้ของโรงงานผลิตนม (จำนวนหีบที่ขายได้) เป็นตัวแปรผันเชิงสุ่มอย่างหนึ่ง (เพราะไม่มีทางที่จะทราบได้แน่นอนว่า การขายในวันพรุ่งนี้จะเป็นจำนวนเท่าใด)

ค่าต่าง ๆ ของตัวแปรผันเชิงสุ่มอาจถือได้ว่าเป็นค่าที่เป็นตัวเลข (numerical values) ของผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ของเหตุการณ์อย่างหนึ่ง ในกรณีที่เป็นโรงงานผลิตนม สมมติว่าจากบันทึกการขายในอดีตปรากฏว่า ค่าของตัวแปรผันเชิงสุ่มอยู่ในช่วงของการขาย 200 หีบ ถึง 210 หีบต่อวัน

สมมติว่าโรงงานผลิตนมได้บันทึกจำนวนหีบที่ขายได้ในระหว่าง 100 วันที่ผ่านไปดังปรากฏในตาราง 4 – 1 จากบันทึกนี้ เราอาจกำหนดความน่าจะเป็นให้แก่ระดับการขายที่อาจเกิดขึ้นได้แต่ละระดับ (ซึ่งเป็นตัวแปรผันเชิงสุ่ม) โดยทำให้การแจกแจงอยู่ในลักษณะปกติดังปรากฏในตาราง 4–2

ตาราง 4–1

จำนวนหีบที่ขายได้ในระหว่าง 100 วัน

ปริมาณขาย	จำนวนวันที่ขายได้ปริมาณนี้
200	2
201	3
202	4
203	7
204	9
205	13
206	15
207	21
208	16
209	9
210	1
	100

เราไม่สามารถทราบค่าของตัวแปรผันเชิงสุ่มจนกว่าเหตุการณ์นั้นได้เกิดขึ้นแล้ว กล่าวคือ จนกว่าจะคำนวณจำนวนหีบที่ขายได้ในวันนั้น แต่อย่างไรก็ดี จากข้อสนเทศตามที่ปรากฏในตาราง 4–2 โรงงานผลิตนมอาจคำนวณปริมาณที่คาดไว้หรือปริมาณถัวเฉลี่ยได้โดยคูณค่าของตัวแปรผันเชิงสุ่มแต่ละตัวด้วยความน่าจะเป็นของค่านั้น ๆ ดูตาราง 4–3

ค่าที่คาดไว้ของตัวแปรผันเชิงสุ่มเท่ากับ 205.89 หีบต่อวัน จะสังเกตได้ว่าค่าที่คาดไว้ของตัวแปรผันเชิงสุ่มนี้เป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก ไม่ใช่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตอย่างง่าย หมายความว่าเป็นค่าของตัวแปรผันเชิงสุ่มที่ถ่วงน้ำหนัก (หรือคูณ) ด้วยความน่าจะเป็นของค่าของตัวแปรผันเชิงสุ่มนั้น ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักจึงเท่ากับ 205.89 แต่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 205

$$\frac{200 + 201 + 202 + 203 + 204 + 205 + 206 + 207 + 208 + 209 + 210}{11} = 205$$

ตาราง 4—2

การทำให้การแจกแจงอยู่ในลักษณะปกติ	
ค่าของตัวแปรผันเชิงสุ่ม	ความน่าจะเป็นที่ตัวแปรผันเชิงสุ่มจะปรากฏตามค่านี้
หีบ 200	.02
201	.03
202	.04
203	.07
204	.09
205	.13
206	.15
207	.21
208	.16
209	.09
210	.01
	1.00

สิ่งสำคัญที่ควรสังเกต คือ การที่ค่าของจำนวนหีบที่คำนวณได้เท่ากับ 205.89 (ค่ากลางหรือค่าถัวเฉลี่ยของตัวแปรผันเชิงสุ่ม) ไม่ได้หมายความว่าการขายในวันพรุ่งนี้จะเท่ากับ 205.89 หีบ แต่หมายความว่า การขายถัวเฉลี่ยของงวดระยะเวลาหนึ่งจะเท่ากับ 205.89 หีบ

ในการทำการตัดสินใจภายใต้สภาพการณ์ที่ไม่แน่นอน ผู้จัดการได้รับประโยชน์มากจากแนวความคิดเกี่ยวกับตัวแปรผันเชิงสุ่มและแนวความคิดเกี่ยวกับค่ากลางของตัวแปรผันเชิงสุ่ม เมื่อมีปัญหาที่คล้ายคลึงกับปัญหาที่เกิดขึ้นกับโรงงานผลิตนม กล่าวคือ เมื่อไม่อาจทราบว่าการขายในวันพรุ่งนี้จะเท่ากับเท่าใด ฝ่ายจัดการของโรงงานผลิตนมอาจทำการตัดสินใจโดยอาศัยค่ากลางของตัวแปรผันเชิงสุ่ม (205.89 หีบ) การทำการตัดสินใจในลักษณะเช่นนี้จะถูกต้องมากกว่ากรณีที่ฝ่ายจัดการพยายามที่จะ “เดา” ว่า การขายในวันพรุ่งนี้จะเท่ากับเท่าไร ถ้าใช้วิธีการนี้ ฝ่ายจัดการอาจจะกะประมาณการขายในวันพรุ่งนี้ผิดพลาดบ้าง

ตาราง 4 — 3

การหาปริมาณที่คาดไว้		
(1) ค่าของตัว แปรผันเชิงสุ่ม	(2) ความน่าจะเป็นตัวแปรผัน เชิงสุ่มจะปรากฏตามค่านี้	(3) (1) × (2)
หีบ 200	.02	4.00
201	.03	6.03
202	.04	8.08
203	.07	14.21
204	.09	18.36
205	.13	26.65
206	.15	30.90
207	.21	43.47
208	.16	33.28
209	.09	18.81
210	.01	2.10
	1.00	205.89

แต่ในระยะยาวการตัดสินใจของฝ่ายจัดการจะใกล้เคียงกับผลงานที่ดีที่สุด มากกว่าการเดาไปวันหนึ่ง ๆ

ต่อมา ถ้าฝ่ายจัดการมีเหตุผลพอที่จะเชื่อได้ว่า สภาพการณ์ต่าง ๆ ได้เปลี่ยนแปลงไป ผู้บริหารควรจะคำนวณค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักหรือค่ากลางของตัวแปรผันเชิงสุ่มใหม่ และใช้ตัวเลขที่แก้ไขแล้วเพื่อประโยชน์ในการทำการตัดสินใจต่อไป

ปัญหาเกี่ยวกับความไม่แน่นอน (A Problem Involving Uncertainty)

ตัวอย่างการตัดสินใจทางธุรกิจที่ต้องกระทำภายใต้สภาพการณ์ที่ไม่แน่นอน ได้แก่การตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดซื้อของพ่อค้า ธุรกิจบางแห่งซื้อและเก็บรักษาผลิตภัณฑ์ที่อาจเสื่อมประโยชน์ไปโดยสิ้นเชิงหรือบางส่วน ถ้าไม่สามารถขายในวันที่ได้รับผลิตภัณฑ์นั้น โดยปกติผู้ค้าปลีกที่ขายผลิตภัณฑ์ที่มีลักษณะดังกล่าว ไม่อาจทราบได้ว่าในวันหนึ่ง ๆ จะมีลูกค้ามาซื้อ

ผลิตภัณฑ์นั้นเป็นจำนวนเท่าไร แต่ก็ต้องสั่งซื้อไว้จำนวนหนึ่งเป็นการล่วงหน้าเพื่อขายในวันนั้น

ตัวอย่างเช่น ผู้ขายหนังสือพิมพ์คนหนึ่งซื้อหนังสือพิมพ์มาในราคาฉบับละ 60 สตางค์ และจำหน่ายออกไปในราคาฉบับละ 1.00 บาท สมมติว่าหนังสือพิมพ์ของวันใดวันหนึ่งที่ขายไม่ได้ในวันนั้นจะไม่มีค่าสำหรับผู้ขายคนนี้เลย ปัญหาที่ผู้ขายเผชิญอยู่ คือ ควรจะสั่งซื้อหนังสือพิมพ์อย่างสูงที่สุดวันละเท่าไร ในวันที่เขามีหนังสือพิมพ์มากกว่าจำนวนที่ขายได้ ต้นทุนของหนังสือพิมพ์ที่ขายไม่ได้จะทำให้กำไรที่ได้รับลดน้อยลง แต่ถ้ามีคนต้องการหนังสือพิมพ์มากกว่าจำนวนที่เขามีอยู่ ผลที่ได้รับคือการขายที่พลาดไปและกำไรที่ได้รับจริงน้อยกว่าจำนวนที่ควรจะเป็น

สมมติว่า ผู้ขายหนังสือพิมพ์คนนี้ได้บันทึกการขายสำหรับระยะเวลา 100 วันที่ผ่านไปดังปรากฏในตาราง 4–4 ข้อสนเทศนี้เป็นการแจกแจงเชิงสุ่มและเป็นการแจกแจงที่ไม่ต่อเนื่องของการขายในอดีต ที่ว่าเป็นการแจกแจงเชิงสุ่มเพราะผู้ขายไม่มีทางที่จะทราบได้ว่าในวันหนึ่งวันใดจะมีคนซื้อเป็นจำนวนเท่าใด (300, 500 หรือ 600 ฉบับ) และที่ว่าเป็นการแจกแจงที่ไม่ต่อเนื่องนั้นเพราะปริมาณการขายจะปรากฏออกมาเป็นค่าเพียงบางค่าเท่านั้น เช่น เราได้ตั้งข้อสมมติว่า การขายในวันใดวันหนึ่งจะไม่ปรากฏออกมาเป็น 550, 625 หรือ 475 ฉบับ และเรายังได้สมมติต่อไปว่า ผู้ขายเชื่อว่าปริมาณการขายในอนาคตจะไม่ปรากฏออกมาเป็นค่าอื่นนอกจากที่ได้แสดงไว้ในตาราง 4–4 เท่านั้น

ตาราง 4 – 4

การแจกแจงของการขายหนังสือพิมพ์

การขายต่อวัน	จำนวนวันที่ขายได้จำนวนนี้	ความน่าจะเป็นของจำนวนที่ขายได้
300	15	.15
400	20	.20
500	45	.45
600	15	.15
700	5	.05
	100	1.00

ข้อสนเทศนี้ทำให้ผู้ขายทราบกระสวนของการขายในอดีต ข้อสนเทศนี้แม้จะไม่ได้บอกให้เขาทราบว่าจำนวนคนที่จะมาซื้อในวันพรุ่งนี้จะเป็นเท่าใดก็ตาม แต่ก็ได้ชี้ให้เห็นว่า โอกาสที่ปริมาณการขายจะเท่ากับ 500 ฉบับมีอยู่ถึง 45 ครั้งใน 100 ครั้ง ดังนั้น เราจึงกำหนดความน่าจะเป็นของระดับการขาย 500 ฉบับให้เท่ากับ .45 ช่องความน่าจะเป็นในตาราง 4–4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการสังเกตการขายทั้งสิ้น (100 วัน) กับจำนวนครั้งที่ค่าของการขายต่อวันที่อาจเกิดขึ้นได้ที่ปรากฏในการสังเกต 100 ครั้ง เมื่อหารจำนวนครั้งที่ค่าแต่ละค่าที่ปรากฏในการสังเกต 100 ครั้งด้วยจำนวนครั้งของการสังเกตทั้งสิ้น เราจะได้ความน่าจะเป็นของระดับการขายที่เกิดขึ้นแต่ละระดับดังนี้ 15/100, 20/100, 45/100, 15/100 และ 5/100 เราจะแสดงการทำการตัดสินใจขั้นสุดท้ายเกี่ยวกับการซื้อในตอนหลัง

ตัวอย่างอีกตัวอย่าง สมมติว่าผู้ค้าปลีกคนหนึ่งซื้อสินค้าชนิดหนึ่งมาในราคาหีบละ 2 บาท และขายในราคาหีบละ 5 บาท สินค้าชนิดนี้เป็นสินค้าที่เสียหายง่ายและมีความเสี่ยงภัยสูงมาก จำนวนที่บวกเพิ่ม (mark up) จึงสูงถึง 60% ถ้านำสินค้านี้ออกขายในวันใดและขายไม่ได้ สินค้าที่เหลือจะไม่มีค่าแต่อย่างใด ผู้ค้าปลีกคนนี้จึงต้องเผชิญกับปัญหาว่า ควรจะสั่งซื้อสินค้าชนิดนี้เป็นจำนวนเท่าใดในวันนี้ เพื่อขายในวันพรุ่งนี้

จากการสังเกตการขายในอดีต ผู้ค้าปลีกได้รับข้อสนเทศตามที่ปรากฏในตาราง 4–5 การคำนวณความน่าจะเป็นคงเป็นไปในลักษณะเดียวกันกับที่คำนวณในตาราง 4–4 จากการสังเกตการขาย 90 วัน การขายอยู่ในระดับ 10 หีบเป็นจำนวน 9 วัน ความน่าจะเป็นจึงเท่ากับ 9/90 ของจำนวนวันที่ขาย = 1/10 ของจำนวนวันที่ขาย = .10 ของจำนวนวันที่ขาย

ตาราง 4—5

จำนวนหีบที่ขายในระหว่าง 90 วัน

การขายต่อวัน	จำนวนวันที่ขายได้จำนวนนี้	ความน่าจะเป็นของจำนวนที่ขายได้
10	9	.10
11	18	.20
12	36	.40
13	27	.30
	90	1.00

การแจกแจงนี้ก็เป็นการแจกแจงที่ไม่ต่อเนื่องกัน และเป็นการแจกแจงเชิงสุ่ม ค่าของปริมาณการขายที่อาจเกิดขึ้นได้มีอยู่เพียง 4 ค่าเท่านั้น และไม่อาจทราบได้ว่า มูลค่าทั้งสี่นี้จะเกิดขึ้นโดยมีลำดับก่อนหลังอย่างใด

สมมติว่า ผู้ค้าปลีกเชื่อว่าปริมาณการขายในอนาคต คงไม่แตกต่างไปจากการขายในอดีต ปัญหาจึงมีอยู่ว่าควรจะสั่งซื้อในวันนี้เพื่อขายในวันพรุ่งนี้เป็นจำนวนเท่าใด ถ้าในวันรุ่งขึ้นผู้ซื้อต้องการสินค้าชนิดนี้มากกว่าจำนวนที่มีอยู่ กำไรที่ผู้ค้าปลีกได้รับจะมีจำนวนน้อยกว่าที่ควรจะเป็น 3 บาท ต่อการขายหนึ่งหน่วยที่พลาดไป (ราคาขายหักต้นทุน) ในทางตรงกันข้ามถ้าจัดให้มีสินค้าไว้มากเกินไปในวันใดก็มีต้นทุนเกิดขึ้นเช่นกัน สมมติว่า วันหนึ่งผู้ค้าปลีกมีสินค้าอยู่ 13 หีบ แต่ขายได้เพียง 10 หีบ เขาจะได้กำไร 30 บาทจาก 10 หีบที่ขายได้หีบละ 3 บาท แต่ต้นทุนของสินค้าที่ขายไม่ได้ 3 หีบและไม่มีค่าเลย จะทำให้กำไรจำนวนดังกล่าวลดลงไป 6 บาท

กำไรตามเงื่อนไข (Conditional Profits)

การอธิบายปัญหาของผู้ค้าปลีกคนนี้ เราจะต้องสร้างตารางแสดงผลที่คิดเป็นตัวเงินที่เกิดจากส่วนผสมระหว่างการซื้อและการขายที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งสิ้น ค่าของการซื้อและการขายที่เราจะต้องนำมาพิจารณาได้แก่ 10, 11, 12 และ 13 หีบ ค่าเหล่านี้เป็นการขายที่วัดได้ ผู้ค้าปลีกจึงไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงการซื้อที่น้อยกว่า 10 หีบ หรือมากกว่า 13 หีบ

ตาราง 4–6 เรียกว่าตารางกำไรตามเงื่อนไข เป็นตารางแสดงกำไรที่เกิดจากส่วนผสมระหว่างอุปสงค์กับอุปทานที่อาจเกิดขึ้นได้ กำไรที่ได้รับอาจจะเป็นบวกหรือลบก็ได้ และเป็นกำไรตามเงื่อนไขในฐานะที่เป็นกำไรที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าไว้จำนวนหนึ่ง (การสั่งซื้อ 10, 11, 12 หรือ 13 หีบ) และขายสินค้าได้จำนวนหนึ่ง (10, 11, 12 หรือ 13 หีบ)

การคำนวณกำไรตามเงื่อนไขตามที่ปรากฏในตาราง 4–6 ได้รวมขาดทุนที่เกิดจากสินค้าที่ขายไม่ได้ในวันหนึ่ง ๆ แต่ไม่ได้แสดงกำไรที่ผู้ค้าปลีกไม่ได้รับเนื่องจากไม่สามารถสนองคำขอซื้อของผู้ซื้อได้หมดทุกคนในกรณีที่มีสินค้าน้อยกว่าความต้องการ

จะสังเกตได้ว่า ถ้าจัดให้มีสินค้าวันละ 10 หีบ ผู้ค้าปลีกได้กำไรวันละ 30 บาทเสมอ แม้ในบางวันจะมีผู้ต้องการซื้อถึง 13 หีบ ผู้ค้าปลีกก็จะขายได้เพียง 10 หีบเท่าที่ตนมีอยู่เท่านั้น

ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 11 หีบ ผู้ค้าปลีกจะได้กำไร 33 บาท ถ้าผู้ซื้อต้องการ 11, 12 หรือ 13 หีบ แต่ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้ 11 หีบในวันใด และผู้ซื้อต้องการเพียง 10 หีบ

ตาราง 4–6

อุปสงค์ที่อาจเกิดขึ้นได้ (ขาย)	ตารางกำไรตามเงื่อนไข ระดับสินค้าที่อาจจัดหาไว้			
	10 หีบ	11 หีบ	12 หีบ	13 หีบ
10 หีบ	บาท 30	บาท 28	บาท 26	บาท 24
11 หีบ	30	33	31	29
12 หีบ	30	33	36	34
13 หีบ	30	33	36	39

กำไรที่ได้รับในวันนั้นจะลดลงเหลือ 28 บาท ซึ่งได้มาจากกำไรที่ได้รับจาก 10 หีบที่ขายได้ 30 บาท หักด้วยต้นทุนของสินค้าที่ขายไม่ได้ 1 หีบ 2 บาท

การจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 12 หีบ จะทำให้กำไรต่อวันเพิ่มเป็น 36 บาทเฉพาะวันที่ผู้ซื้อต้องการ 12 หรือ 13 หีบ ถ้าผู้ซื้อต้องการเพียง 10 หีบ กำไรที่ได้รับจะลดลงเหลือ 26 บาท ซึ่งได้มาจากกำไรที่ได้รับจาก 10 หีบที่ขายได้ 30 บาท หักด้วยต้นทุนของสินค้าที่ขายไม่ได้ 2 หีบ 4 บาท

การจัดให้มีสินค้าวันละ 13 หีบ จะทำกำไรได้ 39 บาท ถ้าผู้ซื้อต้องการ 13 หีบ กำไรต่อหีบที่ขายได้เท่ากับ 3 บาทและไม่มีสินค้าที่ขายไม่ได้เลย แต่ถ้าผู้ซื้อต้องการน้อยกว่า 13 หีบ การจัดให้มีสินค้าไว้ในจำนวนดังกล่าวจะทำให้กำไรที่ได้รับน้อยกว่า 39 บาท ตัวอย่างเช่น ถ้ามีสินค้าอยู่ 13 หีบและขายได้เพียง 11 หีบ กำไรที่ได้รับจะเท่ากับ 29 บาท ซึ่งได้มาจากกำไรที่ได้รับจาก 11 หีบที่ขายได้ 33 บาท หักด้วยต้นทุนของสินค้าที่ขายไม่ได้ 2 หีบ 4 บาท

ตารางกำไรตามเงื่อนไขข้างต้นไม่ได้ชี้ให้ผู้ค้าปลีกทราบว่า ในวันหนึ่ง ๆ เขาควรจะจัดให้มีสินค้าเป็นจำนวนเท่าใดจึงจะได้กำไรสูงสุด ตารางนี้เพียงแต่แสดงให้เห็นว่า ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้จำนวนหนึ่งและขายไปได้จำนวนหนึ่งแล้ว ผลลัพธ์จะเป็นเช่นใด ภายใต้ความไม่แน่นอน ผู้ค้าปลีกไม่อาจทราบขนาดของตลาดของวันใดวันหนึ่งล่วงหน้า แต่เขาจะต้องตัดสินใจว่าควรจะจัดให้มีสินค้าไว้วันละเท่าใด จึงจะทำให้กำไรที่ได้รับในระยะยาวอยู่ในระดับสูงสุด

กำไรที่คาดไว้ (Expected Profits)

งานขั้นถัดไปในการคำนวณหาจำนวนหีบที่ดีที่สุดที่ควรจัดให้มีไว้ ได้แก่การกำหนดความน่าจะเป็นของผลลัพธ์หรือกำไรที่อาจเกิดขึ้นได้ จากตาราง 4–5 เราจะเห็นได้ว่า ความน่าจะเป็นของค่าของการขายที่อาจเกิดขึ้นได้ มีดังต่อไปนี้

	ความน่าจะเป็น
10 หีบ	.10
11 หีบ	.20
12 หีบ	.40
13 หีบ	.30

โดยอาศัยความน่าจะเป็นเหล่านี้ประกอบกับข้อสนเทศตามที่ปรากฏในตาราง 4–6 เราสามารถคำนวณกำไรที่คาดไว้ที่เป็นตัวเงิน ซึ่งเกิดจากการจัดให้มีสินค้าไว้ในระดับต่าง ๆ

ดังที่ได้กล่าวไว้ในตอนแรกแล้วว่า เราอาจคำนวณค่ากลางของตัวแปรผันเชิงสุ่มได้โดยถ่วงน้ำหนักค่าแต่ละค่าที่อาจเกิดขึ้นได้ของตัวแปรผัน ด้วยความน่าจะเป็นของค่านั้น ถ้าใช้วิธีการดังกล่าวเราอาจคำนวณค่ากลางหรือกำไรต่อวันที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 10 หีบ ดังปรากฏในตาราง 4–7

ตาราง 4—7

กำไรที่คาดไว้เป็นตัวเงิน
จากการจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 10 หีบ

ขนาดตลาด	กำไรตามเงื่อนไข		ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด		กำไรที่คาดไว้
10 หีบ	บาท 30	×	.10	=	บาท 3.00
11 หีบ	30	×	.20	=	6.00
12 หีบ	30	×	.40	=	12.00
13 หีบ	30	×	.30	=	9.00
			1.00		30.00

ตัวเลขในช่องสุดท้ายของตาราง 4–7 ได้มาจากการถ่วงน้ำหนักกำไรตามเงื่อนไขของปริมาณการขายที่อาจเกิดขึ้นได้ (ช่อง 2) ด้วยความน่าจะเป็นของกำไรตามเงื่อนไขจำนวนนั้น (ช่อง 3) ผลรวมของช่องสุดท้ายคือค่ากลางหรือกำไรต่อวันที่คาดไว้ ซึ่งเป็นผลจากการจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 10 หีบ จะเห็นได้ว่ากำไรที่คาดไว้จะต้องเท่ากับ 30 บาท เพราะจากตาราง 4–6 ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 10 หีบ ผู้ค้าปลีกจะได้รับกำไรต่อวัน 30 บาทเสมอ ไม่ว่าผู้ซื้อต้องการ 10, 11, 12 หรือ 13 หีบ

การคำนวณในกรณีที่จัดให้มีสินค้าไว้วันละ 11 หีบ อาจทำได้ในลักษณะเดียวกันดังปรากฏในตาราง 4–8 การคำนวณนี้ชี้ให้เห็นว่า ถ้าผู้ค้าปลีกจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 11 หีบ ในระยะยาวเขาจะได้กำไรที่คาดไว้หรือกำไรถัวเฉลี่ย 32.50 บาทต่อวัน ร้อยละ 90 ของวันที่ทำการขาย ผู้ค้าปลีกจะได้รับกำไรวันละ 33 บาท ในวันต่าง ๆ ดังกล่าว ผู้ซื้อต้องการ 11, 12 หรือ 13 หีบ แต่ช่องที่ 3 ได้ชี้ให้เราเห็นว่า ร้อยละ 10 ของวันที่ทำการขาย ผู้ซื้อต้องการเพียง 10 หีบเท่านั้น ทำให้กำไรที่ผู้ค้าปลีกได้รับลดลงเหลือ 28 บาท และเป็นผลทำให้กำไรต่อวันที่คาดไว้ลดลงมาเป็น 32.50 บาท

การคำนวณกำไรต่อวันที่คาดไว้ในกรณีที่จัดให้มีสินค้าไว้วันละ 12 และ 13 หีบ ปรากฏในตาราง 4–9 และ 4–10 ตามลำดับ

ตาราง 4–8

กำไรที่คาดไว้ที่เป็นตัวเงิน
จากการจัดให้มีสินค้าไว้ 11 หีบ

ขนาดตลาด	กำไรตามเงื่อนไข		ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด		กำไรที่คาดไว้
10 หีบ	บาท 28	×	.10	=	บาท 2.80
11 หีบ	33	×	.20	=	6.60
12 หีบ	33	×	.40	=	13.20
13 หีบ	33	×	.30	=	9.90
			1.00		32.50

ตาราง 4—9

กำไรที่คาดไว้ที่เป็นตัวเงิน จากการจัดให้มีสินค้าไว้ 12 หีบ					
ขนาดตลาด	กำไรตามเงื่อนไข		ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด		กำไรที่คาดไว้
10 หีบ	บาท 26	×	.10	=	บาท 2.60
11 หีบ	31	×	.20	=	6.20
12 หีบ	36	×	.40	=	14.40
13 หีบ	36	×	.30	=	10.80
			1.00		34.00

ตาราง 4—10

กำไรที่คาดไว้ที่เป็นตัวเงิน จากการจัดให้มีสินค้าไว้ 13 หีบ					
ขนาดตลาด	กำไรตามเงื่อนไข		ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด		กำไรที่คาดไว้
10 หีบ	บาท 24	×	.10	=	บาท 2.40
11 หีบ	29	×	.20	=	5.80
12 หีบ	34	×	.40	=	13.60
13 หีบ	39	×	.30	=	11.70
			1.00		33.50

ผู้ค้าปลีกมีทางเลือกที่จะจัดให้มีสินค้าไว้ในระดับใดระดับหนึ่งของทั้ง 4 ระดับ เราได้คำนวณกำไรที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าไว้แต่ละระดับแล้ว โดยสรุปค่าที่คาดไว้ที่เกิดจากการกระทำแต่ละอย่าง ปรากฏดังนี้

ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 10 หีบ กำไรต่อวันที่คาดไว้เท่ากับ 30.00 บาท
ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 11 หีบ กำไรต่อวันที่คาดไว้เท่ากับ 32.50 บาท
ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 12 หีบ กำไรต่อวันที่คาดไว้เท่ากับ 34.00 บาท
ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 13 หีบ กำไรต่อวันที่คาดไว้เท่ากับ 33.50 บาท

การกระทำที่ดีที่สุด คือ การจัดให้มีสินค้าในระดับที่จะทำให้กำไรที่คาดไว้อยู่ในระดับสูงสุด และเป็นการกระทำที่ทำให้ได้รับกำไรต่อวันมากที่สุด และทำให้กำไรทั้งสิ้นที่ได้รับสำหรับงวดระยะเวลาหนึ่งมีจำนวนสูงที่สุดด้วย ตามตัวอย่างนี้ ผู้ค้าปลีกควรจะจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 12 หีบ เพราะภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ การจัดให้มีสินค้าไว้ในจำนวนนี้จะทำให้กำไรถัวเฉลี่ยต่อวันที่ได้รับอยู่ในระดับสูงสุด

เราไม่ได้ขจัดความไม่แน่นอนออกไปจากปัญหาที่ผู้ค้าปลีกต้องเผชิญอยู่ในขณะนี้ แต่เราได้ใช้ประโยชน์จากประสบการณ์ในอดีตของผู้ค้าปลีกคนนี้ ในการกำหนดการจัดหาสินค้าที่ดีที่สุดเท่าที่จะทำได้ภายใต้ความไม่แน่นอน ผู้ค้าปลีกยังคงไม่ทราบว่าความต้องการสินค้าในแต่ละวันจะเป็นจำนวนเท่าใด เราไม่อาจประกันได้ว่าเขาจะได้รับกำไร 34 บาทในวันพรุ่งนี้ แต่อย่างไรก็ดี ภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดไว้ ถ้าผู้ค้าปลีกคนนี้จัดให้มีสินค้าไว้วันละ 12 หีบ เขาจะได้กำไรถัวเฉลี่ยวันละ 34 บาท ซึ่งเป็นการกระทำที่ดีที่สุดที่เขาอาจทำได้ภายใต้ความไม่แน่นอน เพราะถ้าเลือกจัดให้มีสินค้าไว้ในระดับอื่น ๆ อีกสามระดับ จะทำให้กำไรถัวเฉลี่ยต่อวันต่ำกว่ากรณีที่จัดให้มีสินค้าวันละ 12 หีบ

กำไรที่คาดไว้ในกรณีที่มีข่าวสารที่สมบูรณ์
(Expected Profits with Perfect Information)

สมมติว่า ผู้ค้าปลีกตามตัวอย่างข้างต้นสามารถที่จะขจัดความไม่แน่นอนออกไปจากปัญหาของเขาได้ โดยอาศัยข่าวสารที่ได้รับเพิ่มเติมเข้ามา ข่าวสารที่ครบถ้วนและถูกต้องว่าอะไรจะเกิดขึ้นในอนาคต เรียกว่า "ข่าวสารที่สมบูรณ์" (Perfect Information) ข่าวสารที่สมบูรณ์จะขจัดความไม่แน่นอนทั้งหมดที่มีอยู่ออกไปจากปัญหาที่เกิดกับผู้ค้าปลีกดังกล่าว แต่ทั้งนี้ไม่ได้หมายความว่า การขายจะไม่ขึ้น ๆ ลง ๆ ระหว่าง 10 ถึง 13 หีบต่อวัน การขายยังคงเป็น 10 หีบต่อวัน ร้อยละ 10 ของวันที่ขาย 11 หีบต่อวัน ร้อยละ 20 ของวันที่ขาย 12 หีบต่อวัน ร้อยละ 40 ของวันที่ขาย และ 13 หีบต่อวัน ร้อยละ 30 ของวันที่ขาย แต่ถ้ามีข่าวสารที่สมบูรณ์ ผู้ค้าปลีกสามารถทราบล่วงหน้าว่าในวันพรุ่งนี้จะมีผู้ต้องการซื้อสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด

ในสภาพการณ์เช่นนี้ ผู้ค้าปลีกจะจัดให้มีสินค้าไว้เป็นจำนวนเท่ากับที่ผู้ซื้อต้องการในวันรุ่งขึ้นพอดี ในกรณีที่การขายจะมีจำนวน 10 หีบ ผู้ค้าปลีกจะจัดให้มีสินค้าไว้ 10 หีบ และทำกำไรได้ 30 บาท ถ้าทราบล่วงหน้าว่าการขายจะเท่ากับ 11 หีบ เขาก็จัดให้มีสินค้าไว้ 11 หีบพอดีและทำกำไรได้ 33 บาท

ตาราง 4–11 แสดงค่าของกำไรตามเงื่อนไขที่คำนวณได้จากปัญหาของผู้ค้าปลีกคนนี้ ในกรณีที่มีข่าวสารที่สมบูรณ์ ถ้ากำหนดขนาดตลาดของวันหนึ่งวันใดล่วงหน้า ผู้ค้าปลีกจะเลือกจัดหาสินค้าในระดับที่จะทำให้เขาได้รับกำไรสูงสุด หมายความว่า เขาจะซื้อและจัดหาสินค้าไว้เพื่อหลีกเลี่ยงขาดทุนทั้งหมดที่เกิดจากสินค้าล้าสมัย เพราะมีสินค้ามากกว่าจำนวนที่อาจขายได้ และโอกาสที่สูญเสียไปเนื่องจากมีสินค้าน้อยกว่าความต้องการทำให้ไม่ได้รับกำไรที่ตนควรได้รับ

ตาราง 4—11

ตารางกำไรตามเงื่อนไขภายใต้ความแน่นอน

การขายที่อาจเกิดขึ้นได้	ระดับสินค้าที่อาจจัดหาไว้ 10 หีบ	11 หีบ	12 หีบ	13 หีบ
10 หีบ	บาท 30	บาท —	บาท —	บาท —
11 หีบ	—	33	—	—
12 หีบ	—	—	36	—
13 หีบ	—	—	—	39

ต่อไปเราอาจคำนวณกำไรที่คาดไว้ภายใต้ความแน่นอน ดังปรากฏในตาราง 4–12 วิธีการคงเหมือนกับกรณีคำนวณกำไรที่คาดไว้ภายใต้ความไม่แน่นอน แต่จะสังเกตได้ว่า ตัวเลขกำไรตามเงื่อนไขตามที่ปรากฏในช่องที่ 2 ของตาราง 4–12 เป็นกำไรสูงสุดที่ได้รับจากปริมาณการขายแต่ละระดับ ตัวอย่างเช่น เมื่อผู้ซื้อต้องการสินค้า 12 หีบภายใต้ความแน่นอน ผู้ค้าปลีกจะได้กำไร 36 บาทเสมอ โดยการจัดให้มีสินค้าไว้ 12 หีบพอดี ในกรณีที่มีข่าวสารที่สมบูรณ์ ผู้ค้าปลีกจะได้รับกำไรถัวเฉลี่ย 35.70 บาทต่อวันอย่างแน่นอน 35.70 บาทนี้เป็นตัวเลขที่สำคัญตัวหนึ่ง เพราะเป็นกำไรสูงสุดที่ผู้ค้าปลีกสามารถจะทำได้

ตาราง 4—12

กำไรที่คาดไว้ภายใต้ความแน่นอน					
ขนาดตลาด	กำไรตามเงื่อนไขภายใต้ความแน่นอน		ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด		กำไรที่คาดไว้ภายใต้ความแน่นอน
10 หีบ	บาท 30	×	.10	=	บาท 3.00
11 หีบ	33	×	.20	=	6.60
12 หีบ	36	×	.40	=	14.40
13 หีบ	39	×	.30	=	11.70
			1.00		35.70

วิธีการอีกอย่างหนึ่ง—ทำให้ขาดทุนอยู่ในระดับต่ำสุด
(An Alternative Approach-Minimizing Losses)

เราได้แก้ปัญหาของผู้ค้าปลีกแล้ว ด้วยวิธีการทำให้กำไรต่อวันที่คาดไว้อยู่ในระดับสูงสุด แต่มีวิธีการแก้ปัญหานี้อีกวิธีหนึ่งโดยคำนวณดูว่า ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้ในระดับต่าง ๆ จะทำให้กำไรที่อาจเกิดขึ้นได้สูงสุด (35.70 บาท) ลดลงไปเป็นจำนวนเท่าใด และเลือกการกระทำที่ทำให้จำนวนที่ลดลงหรือ "ขาดทุน" เหล่านี้อยู่ในระดับต่ำที่สุด

ขาดทุนที่กล่าวถึงนี้มีอยู่ 2 ชนิด (1) ขาดทุนที่เกิดจากการล้าสมัย (obsolescene losses) เนื่องจากมีสินค้ามากเกินไป (2) ขาดทุนที่เกิดจากโอกาสที่เสียไป (opportunity losses) ซึ่งเกิดจากการที่มีสินค้าน้อยกว่าจำนวนที่ผู้ซื้อต้องการ

ตาราง 4—13 เป็นตารางขาดทุนตามเงื่อนไขของผู้ค้าปลีกตามตัวอย่างข้างต้น ค่าแต่ละค่าที่ปรากฏในตารางนี้อยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า ผู้ค้าปลีกจัดให้มีสินค้าไว้จำนวนหนึ่ง และมีผู้ต้องการซื้อจำนวนหนึ่ง ค่าเหล่านี้ไม่เพียงแต่รวมขาดทุนที่เกิดจากการล้าสมัยในกรณีที่มีสินค้ามากกว่าจำนวนที่ผู้ซื้อต้องการเท่านั้น ยังรวมขาดทุนที่เกิดจากโอกาสที่เสียไปในเมื่อผู้ซื้อต้องการสินค้ามากกว่าจำนวนที่มีอยู่อีกด้วย

ถ้าจำนวนสินค้าที่มีอยู่ในวันใดวันหนึ่งเท่ากับจำนวนที่ผู้ซื้อต้องการ จะไม่เกิดขาดทุนทั้งสองชนิด สภาพการณ์เช่นนี้เป็นผลทำให้แถวทแยงมุมของตารางนี้เป็นค่าศูนย์ทั้งหมด ตัวเลขจำนวนเงินที่อยู่เหนือค่าศูนย์ แสดงขาดทุนที่เกิดจากการล้าสมัยในกรณีที่มีสินค้ามากกว่า

ตาราง 4—13

การขายที่อาจเกิดขึ้นได้	ตารางขาดทุนตามเงื่อนไข ระดับสินค้าที่อาจจัดหาไว้ 10 หีบ	11 หีบ	12 หีบ	13 หีบ
10 หีบ	บาท 0	บาท 2	บาท 4	บาท 6
11 หีบ	3	0	2	4
12 หีบ	6	3	0	2
13 หีบ	9	6	3	0

จำนวนที่ขายได้ ตัวอย่างเช่น ถ้ามีสินค้าอยู่ 13 หีบ แต่ขายได้เพียง 10 หีบ ขาดทุน 6 บาท เกิดจากต้นทุนของสินค้าที่ขายไม่ได้ 3 หีบ

ค่าต่าง ๆ ที่อยู่ทางซ้ายมือ และต่ำกว่าแถวทแยงมุมของค่าศูนย์ แสดงขาดทุนที่เกิดจากโอกาสที่เสียไป ในกรณีที่มีผู้ซื้อต้องการสินค้ามากกว่าจำนวนที่มีอยู่ ตัวอย่างเช่น ถ้ามีสินค้าอยู่เพียง 10 หีบ แต่ผู้ซื้อต้องการ 13 หีบ ขาดทุนที่เกิดจากโอกาสที่เสียไปเท่ากับ 9 บาท ขาดทุนจำนวนนี้แทนกำไรหีบละ 3 บาท ที่ผู้ค้าปลีกต้องพลาดไปจากการที่ผู้ซื้อต้องการอีก 3 หีบ แต่ไม่มีสินค้าพอที่จะขายให้

งานขั้นถัดไป คือการกำหนดความน่าจะเป็นของปริมาณต่าง ๆ ที่ผู้ซื้อต้องการ จากตาราง 4—5 ความน่าจะเป็นปรากฏดังนี้

	ความน่าจะเป็น
10 หีบ	.10
11 หีบ	.20
12 หีบ	.40
13 หีบ	.30

โดยอาศัยความน่าจะเป็นเหล่านี้ ประกอบกับข้อสนเทศตามที่ปรากฏในตาราง 4—13 เราสามารถคำนวณ "ขาดทุน" (จำนวนที่จะไปลดกำไรที่อาจเกิดขึ้นได้สูงสุด 35.70 บาท) ที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าไว้ในระดับต่าง ๆ ในการคำนวณขาดทุนที่คาดไว้ เราถ่วงน้ำหนักตัวเลขขาดทุนทั้ง 4 ตัว ตามที่ปรากฏในช่องต่าง ๆ ของตาราง 4—13 ด้วยความน่าจะเป็นจากตาราง 4—5 ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้ 10 หีบ ขาดทุนที่คาดไว้ที่คำนวณได้ปรากฏในตาราง 4—14

ตาราง 4—14

ขาดทุนที่คาดไว้ จากการจัดให้มีสินค้าไว้ 10 หีบ					
ขนาดตลาด	ขาดทุนตามเงื่อนไข		ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด		ขาดทุนที่คาดไว้
10 หีบ	บาท 0	×	.10	=	บาท 0.00
11 หีบ	3	×	.20	=	0.60
12 หีบ	6	×	.40	=	2.40
13 หีบ	9	×	.30	=	2.70
			1.00		5.70

ขาดทุนตามเงื่อนไขในตาราง 4—14 ได้มาจากช่องจัดให้มีสินค้าไว้ 10 หีบในตาราง 4—13 ผลรวมในช่องสุดท้าย แสดงให้เห็นว่าถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 10 หีบ ในระยะยาว ขาดทุนถัวเฉลี่ยหรือขาดทุนที่คาดไว้จะเท่ากับ 5.70 บาทต่อวัน แต่ไม่มีใครประกันได้ว่า ขาดทุนในวันพรุ่งนี้จะเท่ากับ 5.70 บาทพอดี

ตาราง 4—15 ถึง 4—17 แสดงการคำนวณขาดทุนที่คาดไว้ในกรณีที่จัดให้มีสินค้าไว้ 11, 12 หรือ 13 หีบตามลำดับ การจัดหาสินค้าที่ดีที่สุด คือการจัดให้มีสินค้าในจำนวนที่จะทำให้ขาดทุนที่คาดไว้อยู่ในระดับต่ำสุด การกระทำที่ดีที่สุดนี้ คือการจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 12 หีบ จะสังเกตได้จากตาราง 4—18 ว่าวิธีการใหม่ (ทำให้ขาดทุนอยู่ในระดับต่ำสุด) นี้กับวิธีการเดิม (ทำให้กำไรอยู่ในระดับสูงสุด) จะนำมาซึ่งข้อสรุปที่เหมือนกัน

ตาราง 4—15

ขาดทุนที่คาดไว้ จากการจัดให้มีสินค้าไว้ 11 หีบ					
ขนาดตลาด	ขาดทุนตามเงื่อนไข		ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด		ขาดทุนที่คาดไว้
10 หีบ	บาท 2	×	.10	=	บาท 0.20
11 หีบ	0	×	.20	=	0.00
12 หีบ	3	×	.40	=	1.20
13 หีบ	6	×	.30	=	1.80
			1.00		3.20

ตาราง 4—16

ขาดทุนที่คาดไว้ จากการจัดให้มีสินค้าไว้ 12 หีบ					
ขนาดตลาด	ขาดทุนตามเงื่อนไข		ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด		ขาดทุนที่คาดไว้
10 หีบ	บาท 4	×	.10	=	บาท 0.40
11 หีบ	2	×	.20	=	0.40
12 หีบ	0	×	.40	=	0.00
13 หีบ	3	×	.30	=	0.90
			1.00		1.70

ตาราง 4—17

ขาดทุนที่คาดไว้ จากการจัดให้มีสินค้าไว้ 13 หีบ					
ขนาดตลาด	ขาดทุนตามเงื่อนไข		ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด		ขาดทุนที่คาดไว้
10 หีบ	บาท 6	×	.10	=	บาท 0.60
11 หีบ	4	×	.20	=	0.80
12 หีบ	2	×	.40	=	0.80
13 หีบ	0	×	.30	=	0.00
			1.00		2.20

ตาราง 4—18

กำไรที่เป็นตัวเงินที่คาดไว้และขาดทุนที่คาดไว้
ภายใต้ความไม่แน่นอน

	การจัดให้มีสินค้าไว้			
	10 หีบ	11 หีบ	12 หีบ	13 หีบ
กำไรที่คาดไว้	บาท 30.00	บาท 32.50	บาท 34.00	บาท 33.50
ขาดทุนที่คาดไว้	5.70	3.20	1.70 ↑ การกระทำที่ดีที่สุด	2.20

ค่าที่คาดไว้ของข่าวสารที่สมบูรณ์ (Expected Value of Perfect Information)

สมมติว่า ผู้ค้าปลีกอาจซื้อเครื่องคาดคะเนที่ถูกต้องสมบูรณ์ ซึ่งจะช่วยขจัดความไม่แน่นอนทุกอย่างในอนาคตให้หมดไป เครื่องคาดคะเนนี้ควรจะมีค่าเท่าไรสำหรับเขา ผู้ค้าปลีกจะต้องเปรียบเทียบต้นทุนของข่าวสารที่ได้รับเพิ่มเติมนี้ กับกำไรที่จะได้รับเพิ่มเติมถ้ามีข่าวสารดังกล่าว

ผู้ค้าปลีกตามตัวอย่างข้างต้นสามารถทำกำไรถัวเฉลี่ย 35.70 บาทต่อวัน ถ้าเขามีข่าวสารที่ถูกต้องสมบูรณ์เกี่ยวกับอนาคต (ดูตาราง 4—12) ในกรณีที่ไม่มีเครื่องคาดคะเนนี้ กำไรต่อวันที่คาดไว้ที่สูงที่สุดเท่ากับ 34 บาท (ดูตาราง 4—7 ถึง 4—10) ผลต่าง 1.70 บาทนี้คือจำนวนเงินอย่างสูงที่สุดที่ผู้ค้าปลีกเต็มใจจะจ่ายต่อวัน สำหรับเครื่องคาดคะเนที่ถูกต้องสมบูรณ์ เพราะเป็นจำนวนเงินสูงสุดที่เขาสามารถเพิ่มกำไรต่อวันที่คาดไว้ ผลต่างนี้คือค่าที่คาดไว้ของข่าวสารที่สมบูรณ์ (expected value of perfect information) หรือที่เรียกว่า EVPI ไม่มีประโยชน์ใดที่ผู้ค้าปลีกจะจ่ายเงินสำหรับเครื่องคาดคะเนดังกล่าวเกินกว่า 1.70 บาท เพราะจะทำให้กำไรต่อวันที่คาดไว้ลดลง

ปัญหาสินค้าคงคลัง ในกรณีที่มีค่าซาก (An Inventory Problem with Salvage Value)

สำหรับตัวอย่างต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วทั้งหมด เราได้ตั้งข้อสมมติว่า ผลิตภัณฑ์ที่ขายถ้าขายไม่ได้หลังจากวันที่ได้รับสินค้า ซึ่งเรียกว่า “วันขาย” (selling day) จะไม่มีค่าแต่อย่างใด ข้อสมมติที่ว่า ผลิตภัณฑ์ที่ขายไม่ได้ไม่มีค่าซากเลยอาจจะไม่เป็นจริงเสมอไป ถ้าผลิตภัณฑ์มีค่าซาก การคำนวณกำไรตามเงื่อนไขที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าไว้ในระดับต่าง ๆ เราจะต้องนำเอาจำนวนค่าซากเข้ามาพิจารณาด้วย

สมมติว่า มีสินค้าชนิดหนึ่งซึ่งจะต้องสั่งซื้อและรับสินค้านั้น ในวันก่อนวันขายสินค้าชนิดนี้มีต้นทุนต่อหน่วย 5 บาท และขายในราคา 8 บาทต่อหน่วย หน่วยที่ขายไม่ได้ในตอนเย็นของวันใด อาจจำหน่ายออกไปในราคาหน่วยละ 2 บาท จากการสังเกตปรากฏว่า การขายในอดีตอยู่ในช่วง 10 ถึง 13 หน่วยต่อวัน เชื่อว่าปริมาณการขายในอนาคตคงจะอยู่ในช่วงดังกล่าวตามเดิม

โดยใช้วิธีการอย่างเดียวกับที่ใช้ในตาราง 4—5 เรากำหนดความน่าจะเป็นสำหรับค่าของการขายไว้ ดังนี้

	ความน่าจะเป็น
10 หน่วย	.10
11 หน่วย	.20
12 หน่วย	.40
13 หน่วย	.30
	1.00

ตารางกำไรตามเงื่อนไขที่คำนวณจากข้อมูลข้างต้น คือตาราง 4—19 ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 10 หน่วย กำไรที่ได้รับจะเท่ากับ 30 บาท ไม่ว่าอุปสงค์จะเท่ากับ 10, 11, 12 หรือ 13 หน่วยเราจะขายสินค้าที่มีอยู่ 10 หน่วยหมดเสมอ แต่การขายของแต่ละวันจะมีจำนวนไม่เกิน 10 หน่วย

ตาราง 4—19

ตารางกำไรตามเงื่อนไข				
อุปสงค์ที่อาจเกิดขึ้นได้	ระดับสินค้าที่อาจจัดหาไว้			
(ขาย)	10 หีบ	11 หีบ	12 หีบ	13 หีบ
10 หน่วย	บาท 30	บาท 27	บาท 24	บาท 21
11 หน่วย	30	33	30	27
12 หน่วย	30	33	36	33
13 หน่วย	30	33	36	39

ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 12 หน่วย กำไรที่ได้รับจะเท่ากับ 36 บาท ในวันที่อุปสงค์เท่ากับ 12 หรือ 13 หน่วย การคำนวณกำไรตามเงื่อนไขตามตัวอย่างนี้ คงเหมือนกับการคำนวณในตัวอย่างก่อน แต่ถ้าสินค้าที่มีอยู่มีจำนวนมากกว่าอุปสงค์ ในการคำนวณกำไรตามเงื่อนไขเราจะต้องนำเอาค่าซากเข้ามาพิจารณาด้วย เช่น ถ้ามีสินค้าอยู่ 12 หน่วย แต่ขายไปเพียง 10 หน่วย ในกรณีนี้กำไรตามเงื่อนไขที่คำนวณได้ปรากฏดังนี้

กำไรจาก 10 หน่วยที่ขาย	30 บาท
หัก ต้นทุนของ 2 หน่วยที่ขายไม่ได้	−10 บาท
	20 บาท
บวก ค่าซากของ 2 หน่วย	+ 4 บาท
กำไรตามเงื่อนไข	24 บาท

เราอาจจะถือว่า ค่าซากเป็นจำนวนที่จะนำไปหักออกจากต้นทุนของหน่วยที่ขายไม่ได้ก็ได้ ตามตัวอย่าง ต้นทุนสุทธิของหน่วยที่ขายไม่ได้เท่ากับหน่วยละ 3 บาท ซึ่งได้มาจากต้นทุนเดิม 5 บาท หักด้วยค่าซาก 2 บาท ดังนั้นถ้ามีสินค้าอยู่ 13 หน่วยแต่ขายไปเพียง 11 หน่วย กำไรตามเงื่อนไขจึงเท่ากับ 27 บาท กำไรตามเงื่อนไขนี้คำนวณจาก 11 หน่วยที่ขายได้ คูณด้วยกำไรต่อหน่วย 3 บาท แล้วหักด้วย 6 บาท ซึ่งเป็นต้นทุนสุทธิของอีก 2 หน่วยที่ขายไม่ได้

การที่มีค่าซากปรากฏในปัญหาสินค้าคงเหลือ ไม่ได้ทำให้การใช้หลักการต่าง ๆ ตามที่ได้อธิบายไว้ในตอนต้นของบทนี้เปลี่ยนแปลงไป แต่เราจะต้องนำเอาผลของค่าซากที่มีต่อกำไรตามเงื่อนไข และขาดทุนตามเงื่อนไขเข้ามาพิจารณาด้วย เราได้เห็นแล้วว่าค่าซากทำให้กำไรตามเงื่อนไขมีจำนวนเพิ่มขึ้น ทั้งนี้เพราะว่าค่าซากช่วยลดขาดทุนที่เกิดจากการมีสินค้าไว้มากเกินไป

ภายใต้สภาพการณ์ที่แน่นอนจะไม่เกิดปัญหาเรื่องค่าซาก เพราะเมื่อสิ้นงวดการขายหนึ่ง ๆ จะไม่มีสินค้าเหลืออยู่เลย

ต่อไปเราจะดำเนินการพิจารณาหาการกระทำที่ดีที่สุด เช่นเดียวกับที่เคยทำมาแล้ว งานขั้นถัดไปได้แก่การคำนวณกำไรที่เป็นตัวเงินที่คาดไว้ ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าแต่ละระดับด้วยความน่าจะเป็นของการขายแต่ละระดับ แล้วรวมผลลัพธ์ของการกระทำแต่ละอย่าง

ตาราง 4—20 แสดงตัวเลขกำไรตามเงื่อนไขที่คำนวณได้ การกระทำที่ดีที่สุดคือการจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 12 หน่วย เพราะในระยะยาวถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 12 หน่วย เราจะได้รับกำไรถัวเฉลี่ยและกำไรรวมในจำนวนสูงสุด ถึงแม้ว่าอุปสงค์ในบางวันจะเป็น 10, 11 หรือ 13 หน่วยก็ตาม

การใช้การวิเคราะห์ส่วนเพิ่มในปัญหาสินค้าคงคลัง
(Use of Marginal Analysis in Inventory Problems)

สำหรับปัญหาสินค้าคงคลังโดยทั่วไป การใช้ตารางกำไรตามเงื่อนไขและตารางกำไรที่คาดไว้มักจะมีความยุ่งยาก เพราะจะต้องมีการคำนวณมากมาย ตาราง 4–20 แสดงการจัดหาสินค้าที่อาจเกิดขึ้นได้ระดับต่าง ๆ 4 ระดับ และระดับการขายที่อาจเกิดขึ้นได้ 4 ระดับเช่นกัน ทำให้เราต้องสร้างตารางกำไรตามเงื่อนไขที่ประกอบขึ้นด้วยตัวเลขกำไรตามเงื่อนไขที่อาจเกิดขึ้นได้ถึง 16 ตัว สมมติว่าถ้าปริมาณการขายและการจัดหาสินค้าที่อาจเกิดขึ้นได้ต่างก็มีจำนวนถึง 200 ระดับ เราจะต้องคำนวณกำไรตามเงื่อนไขและกำไรที่คาดไว้ที่เกิดจากส่วนผสมของการจัดให้มีสินค้าไว้ และระดับการขายต่าง ๆ กันเป็นจำนวนมากมาย แต่ถ้าใช้วิธีการส่วนเพิ่ม (marginal approach) เราอาจหลีกเลี่ยงปัญหาความยุ่งยากทางด้านการคำนวณดังกล่าวได้

เมื่อซื้อสินค้าเพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วย ผลที่อาจเกิดขึ้นได้มีอยู่ 2 อย่าง กล่าวคือเราอาจขายสินค้าหน่วยนี้ไปได้ หรือขายไม่ได้ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทั้งสองนี้รวมกันเข้าจะต้องเท่ากับ 1 ตัวอย่างเช่น ถ้าความน่าจะเป็นของการขายหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติมได้เท่ากับ .4 ความน่าจะเป็นของการขายหน่วยนี้ไม่ได้ จะเท่ากับ .6 ผลรวมเท่ากับ 1

ถ้าให้ p แทนความน่าจะเป็นของการขายหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติมอีกหน่วยหนึ่งได้ 1–p ก็จะเป็นความน่าจะเป็นของการขายหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติมนั้นไม่ได้ ถ้าขายหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติมได้ เราจะได้รับกำไรตามเงื่อนไขเพิ่มขึ้น เท่ากับกำไรที่ได้รับจากหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติม เราเรียกกำไรนี้ว่า "กำไรส่วนเพิ่ม" (marginal profit) และใช้ตัวย่อว่า MP (ท่านคงจำได้ว่า ในวิชาเศรษฐศาสตร์หน่วยสุดท้ายที่บวกเข้าไป เราเรียกว่าหน่วยเพิ่ม) จากตัวอย่างข้างต้น กำไรส่วนเพิ่มจากการขายหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติมหนึ่งหน่วยเท่ากับ 3 บาท ซึ่งได้มาจากราคาขายหักต้นทุน

เราอาจอธิบายเรื่องนี้ให้กระจ่างยิ่งขึ้นโดยอาศัยตาราง 4–20 ถ้าเราจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 10 หน่วย และอุปสงค์ต่อวันเท่ากับหรือมากกว่า 10 หน่วย กำไรตามเงื่อนไขที่เราได้รับจะเท่ากับ 30 บาทต่อวัน ต่อไปเราตัดสินใจที่จะจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 11 หน่วย ถ้าขายหน่วยที่ 11 ได้ (ในกรณีที่อุปสงค์เท่ากับ 11, 12 หรือ 13 หน่วย) กำไรตามเงื่อนไขที่ได้รับจะเพิ่มขึ้นเป็น 33 บาทต่อวัน จะสังเกตได้ว่ากำไรตามเงื่อนไขไม่ได้เพิ่มขึ้นจากการที่จัดให้มีหน่วยที่ 11 ไว้เท่านั้น ภายใต้สภาพการณ์ที่ไม่แน่นอนตามที่เราได้สมมติไว้ในปัญหานี้ กำไรจะเพิ่มขึ้นต่อเมื่ออุปสงค์เท่ากับหรือมากกว่า 11 หน่วย ซึ่งมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้ร้อยละ 90 ของวันขาย

เราจะต้องนำเอาผลที่มีต่อกำไรที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งหน่วย และขายสินค้าหน่วยนั้นไม่ได้เข้ามาพิจารณาด้วย ถ้าขายสินค้าหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติมไม่ได้จะทำให้

ตาราง 4—20

ขนาดตลาด	ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด	ตารางกำไรที่เป็นตัวเงินที่คาดไว้							
		ระดับสินค้าที่อาจจัดหาไว้							
		10 หน่วย		11 หน่วย		12 หน่วย		13 หน่วย	
		กำไรตามเงื่อนไข	กำไรที่คาดไว้	กำไรตามเงื่อนไข	กำไรที่คาดไว้	กำไรตามเงื่อนไข	กำไรที่คาดไว้	กำไรตามเงื่อนไข	กำไรที่คาดไว้
10 หน่วย	.10	บาท 30	บาท 3.00	บาท 27	บาท 2.70	บาท 24	บาท 2.40	บาท 21	บาท 2.10
11 หน่วย	.20	30	6.00	33	6.60	30	6.00	27	5.40
12 หน่วย	.40	30	12.00	33	13.20	36	14.40	33	13.20
13 หน่วย	.30	30	9.00	33	9.90	36	10.80	39	10.80
	1.00		30.00		32.40		33.60		31.50
							↑ การกระทำที่ดีที่สุด		

กำไรตามเงื่อนไขลดลง จำนวนที่ลดลงนี้เรียกว่า "ขาดทุนส่วนเพิ่ม" (Marginal loss) หรือ ML ซึ่งเกิดจากการจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วยแต่ขายสินค้าหน่วยนี้ไม่ได้

เราจะใช้ตาราง 4–20 อีกครั้งหนึ่งในการอธิบายขาดทุนส่วนเพิ่ม สมมติอีกครั้งหนึ่งว่าเราจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 11 หน่วย และขายหน่วยที่ 11 (หน่วยเพิ่ม) ไม่ได้ คงขายได้เพียง 10 หน่วยเท่านั้น กำไรตามเงื่อนไขที่ได้รับจะเท่ากับ 27 บาท กำไรตามเงื่อนไขจากการจัดให้มีและขายสินค้าได้ 10 หน่วย 30 บาทจะลดลงไป 3 บาท จำนวน 3 บาทนี้คือต้นทุนของหน่วยที่ขายไม่ได้ (5 บาท) หักด้วยค่าซาก (2 บาท)

ตราบใดที่กำไรส่วนเพิ่มที่คาดไว้ (expected marginal profit) ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วย ยังมากกว่าขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้ (expected marginal loss) ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าหน่วยนั้น เราก็ควรจะจัดให้มีสินค้าหน่วยที่จะซื้อเพิ่มเติมนั้น ขนาดของการสั่งซื้อควรจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนถึงจุดที่กำไรส่วนเพิ่มที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งหน่วย ถ้าขายสินค้าหน่วยนั้นได้เท่ากับขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าหน่วยนั้นไว้แต่ขายไม่ได้

ตามตัวอย่าง ความน่าจะเป็นของอุปสงค์ปรากฏดังนี้ :

ขนาดตลาด	**ความน่าจะเป็นของขนาดตลาด**
10	.10
11	.20
12	.40
13	.30
	1.00

การแจกแจงนี้ชี้ให้เราเห็นว่าเมื่อมีสินค้ามากขึ้น ความน่าจะเป็นของการขายหน่วยที่จัดหาเพิ่มเติมหนึ่งหน่วย (ซึ่งได้แก่ p) จะลดลง ตัวอย่างเช่น ถ้าเราเพิ่มสินค้าที่มีอยู่จาก 10 หน่วยเป็น 11 หน่วย ความน่าจะเป็นของการขายทั้ง 11 หน่วยที่มีอยู่เท่ากับ .90 ตัวเลข .90 นี้คือความน่าจะเป็นของอุปสงค์จะเท่ากับหรือมากกว่า 11 หน่วย ซึ่งคำนวณได้ดังนี้ :

ความน่าจะเป็นที่อุปสงค์จะเท่ากับ 11 หน่วย	.20
ความน่าจะเป็นที่อุปสงค์จะเท่ากับ 12 หน่วย	.40
ความน่าจะเป็นที่อุปสงค์จะเท่ากับ 13 หน่วย	.30
ความน่าจะเป็นที่อุปสงค์จะเท่ากับหรือมากกว่า 11 หน่วย	.90

เมื่อเพิ่มหน่วยที่ 12 เข้าไป ความน่าจะเป็นของการขายทั้ง 12 หน่วยลดลงเหลือ .70 ซึ่งเป็นผลรวมของความน่าจะเป็นที่อุปสงค์จะเท่ากับ 12 หน่วยหรือ 13 หน่วย ในที่สุดถ้าเพิ่มหน่วยที่ 13 เข้าไปจะทำให้ความน่าจะเป็นที่จะขายทั้ง 13 หน่วยเท่ากับ .30 เพราะอุปสงค์จะเท่ากับ 13 หน่วย ร้อยละ 30 ของวันขาย

กำไรส่วนเพิ่มที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีและขายสินค้าเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งหน่วยคือผลคูณระหว่างกำไรส่วนเพิ่มของสินค้าหน่วยนั้นกับความน่าจะเป็นที่จะขายสินค้าหน่วยนั้นได้ ซึ่งได้แก่ p (MP) ขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งหน่วยแต่ขายสินค้าหน่วยนั้นไม่ได้ คือผลคูณระหว่างขาดทุนส่วนเพิ่มจากการขายสินค้าหน่วยนั้นไม่ได้กับความน่าจะเป็นที่จะขายสินค้าหน่วยนั้นไม่ได้ ซึ่งได้แก่ (1–p) (ML) ปริมาณสั่งซื้อที่ทำให้กำไรที่ได้รับอยู่ในระดับสูงสุดคือระดับที่

$$p\ (MP) = (1-p)\ (ML) \tag{4–1}$$

สมการนี้แสดงจุด ๆ หนึ่งที่ทำให้กำไรที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นอีกหน่วยหนึ่ง p(MP) เท่ากับขาดทุนที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าหน่วยนั้น (1–p)(ML) ถ้า p(MP) ยังเป็นจำนวนที่มากกว่า (1–p)(ML) เราควรจะจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เพราะกำไรที่คาดไว้ที่เกิดจากการตัดสินใจดังกล่าวยังสูงกว่าขาดทุนที่คาดไว้

สำหรับปัญหาสินค้าคงคลังที่กำหนดให้ไม่ว่าปัญหาใด ค่าของ p ซึ่งทำให้สมการที่ทำให้กำไรอยู่ในระดับสูงสุดข้างต้นเท่ากันมีอยู่เพียงค่าเดียว เราจะต้องคำนวณค่า p เพื่อที่จะได้กำหนดการกระทำที่ดีที่สุด เราอาจนำสมการที่ทำให้กำไรอยู่ในระดับสูงสุดมาหาค่าของ p ในลักษณะดังต่อไปนี้

$$p(MP) = (1-p)(ML) \tag{4–1}$$

เมื่อคูณค่าทั้งสองทางขวามือของสมการ เราจะได้

$$p(MP) = ML - p(ML)$$

รวบรวมค่าที่มี p อยู่ด้วยไว้ข้างเดียวกัน เราจะได้

$$p(MP) + p(ML) = ML$$

หรือ $p(MP + ML) = ML$

หารสมการทั้งสองข้างด้วย (MP + ML)

$$p = \frac{ML}{MP + ML} \tag{4–2}$$

อักษร p แทนความน่าจะเป็นอย่างต่ำที่สุดของการขายอย่างน้อยอีกหนึ่งหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติม จึงเป็นการสมควรที่จะจัดให้มีสินค้าหน่วยนั้นไว้ ถ้าความน่าจะเป็นของการขายอย่างน้อยอีกหนึ่งหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติมมีค่ามากกว่า p เราก็ควรจะจัดให้มีสินค้าที่จะซื้อเพิ่มเติมหน่วยนั้น

ต่อไปเราจะคำนวณค่าของ p สำหรับตัวอย่างข้างต้น กำไรส่วนเพิ่มต่อหน่วยเท่ากับ 3 บาท (ราคาขายหักด้วยต้นทุน) ขาดทุนส่วนเพิ่มต่อหน่วยเท่ากับ 3 บาท (ต้นทุนหักด้วยค่าซาก) เช่นกัน ดังนั้น

$$p = \frac{ML}{MP + ML} = \frac{3\text{ บาท}}{3\text{ บาท} + 3\text{ บาท}} = \frac{3\text{ บาท}}{6\text{ บาท}} = .5$$

ค่าของ p ที่เท่ากับ .5 นี้ หมายความว่า ในการที่จะจัดให้มีสินค้าเพิ่มเติมอีกหนึ่งหน่วย ความน่าจะเป็นสะสม (cumulative probability) ของการขายสินค้าหน่วยนั้นได้จะต้องไม่ต่ำกว่า .5 ในการคำนวณความน่าจะเป็นของการขายสินค้าที่จะซื้อเพิ่มเติมแต่ละหน่วยที่จะจัดหาไว้เราจะต้องคำนวณอนุกรมของความน่าจะเป็นสะสมดังปรากฏในตาราง 4—21

ตาราง 4—21

การขาย	ความน่าจะเป็นสะสมของการขาย ความน่าจะเป็นของระดับการขายนี้	ความน่าจะเป็นสะสมที่การขายจะเป็นระดับนี้หรือมากกว่า
10 หน่วย	.10	1.00
11 หน่วย	.20	.90
12 หน่วย	.40	.70
13 หน่วย	.30	.30

ความน่าจะเป็นสะสมในช่องขวามือของตาราง 4—21 แทนความน่าจะเป็นสะสมที่การขายจะเท่ากับหรือสูงกว่าระดับการขายแต่ละระดับของทั้ง 4 ระดับ ตัวอย่างเช่น 1.00 ที่ปรากฏข้างระดับการขาย 10 หน่วย หมายความว่าเราเชื่อมั่น 100 % ว่า เราจะขายได้เท่ากับหรือมากกว่า 10 หน่วย ข้อความนี้จะต้องเป็นจริงเพราะตามปัญหานี้เราได้ตั้งข้อสมมติไว้ว่าระดับการขายระดับใดระดับหนึ่งของทั้ง 4 ระดับจะต้องเกิดขึ้นเสมอ

ค่าความน่าจะเป็น .90 ที่ปรากฏข้างตัวเลขการขาย 11 หน่วย หมายความว่าเราเชื่อมั่นเพียง .90 ว่าเราจะขายได้เท่ากับหรือมากกว่า 11 หน่วย ความน่าจะเป็นนี้อาจคำนวณได้ 2 วิธี วิธีแรก เราอาจจะบวกโอกาสที่จะขายได้ 11, 12 และ 13 หน่วยเข้าด้วยกันดังนี้

11 หน่วย .20
12 หน่วย .40
13 หน่วย +.30

.90 ความน่าจะเป็นของการขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 11 หน่วย

หรือเราอาจจะให้เหตุผลว่า การขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 11 หน่วย รวมผลลัพธ์ทั้งหมดที่อาจเกิดขึ้นได้ยกเว้นการขาย 10 หน่วยซึ่งมีความน่าจะเป็น .10

ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 1.00
ความน่าจะเป็นของการขาย 10 หน่วย − .10

.90 ความน่าจะเป็นของการขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 11 หน่วย

ค่าความน่าจะเป็นสะสม .70 สำหรับการขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 12 หน่วย อาจคำนวณได้ในลักษณะเดียวกัน การขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 12 หน่วย หมายถึงการขาย 12 หน่วย หรือ 13 หน่วย เพราะฉะนั้น

ความน่าจะเป็นของการขาย 12 หน่วย .40
ความน่าจะเป็นของการขาย 13 หน่วย +.30

.70 ความน่าจะเป็นของการขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 12 หน่วย

และความน่าจะเป็นสะสมของการขาย 13 หน่วย ยังคงเท่ากับ .30 เพราะเราได้สมมติไว้แล้วว่าการขายจะไม่เกิน 13 หน่วย

ดังได้กล่าวไว้ในตอนก่อนว่า ค่าของ p จะลดลงเมื่อระดับของการขายเพิ่มขึ้น ระดับการขายที่เพิ่มขึ้นนี้ทำให้กำไรส่วนเพิ่มที่คาดไว้ลดลงและขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้เพิ่มขึ้น และเมื่อมาถึงจุด ๆ หนึ่งการจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งหน่วยจะไม่ทำกำไรให้แต่อย่างใด

เราได้กล่าวแล้วว่า เราควรจะจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ถ้าความน่าจะเป็นของการขายอย่างน้อยหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติมนั้นยังสูงกว่าค่า p เราอาจนำกฎนี้มาใช้กับการแจกแจงความน่าจะเป็นของการขายตามตัวอย่างข้างต้น และพิจารณาว่าควรจะจัดให้มีสินค้าไว้เป็นจำนวนกี่หน่วย

วิธีการนี้จะชี้ให้เห็นว่า เราควรจะจัดให้มีสินค้าหน่วยที่ 11 ไว้ เพราะความน่าจะเป็นของการขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 11 หน่วยมีค่าเท่ากับ .90 ซึ่งเป็นตัวเลขที่เห็นได้ชัดว่าสูงกว่าค่าของ p ที่เท่ากับ .50 การจัดให้มีสินค้าหน่วยที่ 11 ไว้ยังหมายความว่ากำไรส่วนเพิ่ม

ที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าหน่วยนี้มากกว่าขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้ที่เกิดจากการจัดให้มีสินค้าหน่วยนี้ ซึ่งเราอาจพิสูจน์ได้ดังนี้

p(MP) = .90 (3 บาท) = 2.70 บาท กำไรส่วนเพิ่มที่คาดไว้

(1–p) (ML) = .10 (3 บาท) = 0.30 บาท ขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้

เราควรจะจัดให้มีสินค้าหน่วยที่ 12 ไว้ด้วย เพราะความน่าจะเป็นของการขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 12 หน่วย (.70) สูงกว่าค่าของ p ที่ต้องการ .50 การกระทำนี้จะเป็นผลทำให้กำไรส่วนเพิ่มที่คาดไว้และขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้ ปรากฏดังนี้

p(MP) = .70 (3 บาท) = 2.10 บาท กำไรส่วนเพิ่มที่คาดไว้

(1–p) (ML) = .30 (3 บาท) = 0.90 บาท ขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้

12 หน่วยเป็นจำนวนสินค้าที่ควรจะมีไว้สูงสุด เพราะสินค้าหน่วยที่ 13 ที่เพิ่มเข้าไปมีความน่าจะเป็นที่จะขายได้เพียง .30 ซึ่งต่ำกว่าค่าของ p ที่ต้องการ .50 ตัวเลขข้างล่างนี้จะแสดงให้เห็นว่าทำไมจึงไม่ควรจัดให้มีสินค้าหน่วยที่ 13

p(MP) = .30 (3 บาท) = 0.90 บาท กำไรส่วนเพิ่มที่คาดไว้

(1–p) (ML) = .70 (3 บาท) = 2.10 บาท ขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้

การคำนวณนี้ชี้ให้เห็นว่า ถ้าเราจัดให้มีสินค้าหน่วยที่ 13 จะทำให้ขาดทุนที่คาดไว้เพิ่มมากกว่ากำไรที่คาดไว้

จะสังเกตได้ว่า การใช้วิธีการวิเคราะห์ส่วนเพิ่มจะนำเราไปสู่ข้อสรุปเหมือนกับการใช้ตารางกำไรตามเงื่อนไขและตารางกำไรที่คาดไว้ การวิเคราะห์ทั้งสองวิธีต่างทำให้มีการตัดสินใจที่จะจัดให้มีสินค้าไว้งวดละ 12 หน่วย

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ต่อเนื่องกัน
(The Continuous Probability Distribution)

สำหรับปัญหาทั้งหมดเท่าที่กล่าวมาแล้ว การแจกแจงของการขายในอดีตเป็นการแจกแจงที่ไม่ต่อเนื่อง กล่าวคือ การขายที่เกิดขึ้นเป็นค่าเพียงไม่กี่ตัว ในทางปฏิบัติที่แท้จริงกรณีดังกล่าวมักจะไม่ค่อยเกิดขึ้น สำหรับปัญหาสินค้าคงคลังส่วนมาก ตัวแปรผันเชิงสุ่มซึ่งได้แก่การขายอาจจะเป็นค่าตัวใดตัวหนึ่งของช่วงของค่าต่าง ๆ ที่ค่อนข้างกว้าง การแจกแจงชนิดนี้เรียกว่า "การแจกแจงที่ต่อเนื่องกัน" (continuous distribution) ในทางปฏิบัติเราจึงไม่อาจนำเอาตารางกำไรตามเงื่อนไขและตารางกำไรที่คาดไว้มาใช้กับกรณีเหล่านี้ได้

ตัวอย่าง ลองพิจารณากรณีของการขายผลิตภัณฑ์ชนิดหนึ่งในอดีตสำหรับงวดระยะเวลา 30 วันตามที่ปรากฏในตาราง 4–22 เราได้นำเอามูลค่าของการขายในอดีตทั้ง 30 ตัวนี้ไปเขียนไว้ในกราฟ ดังรูป 4–1

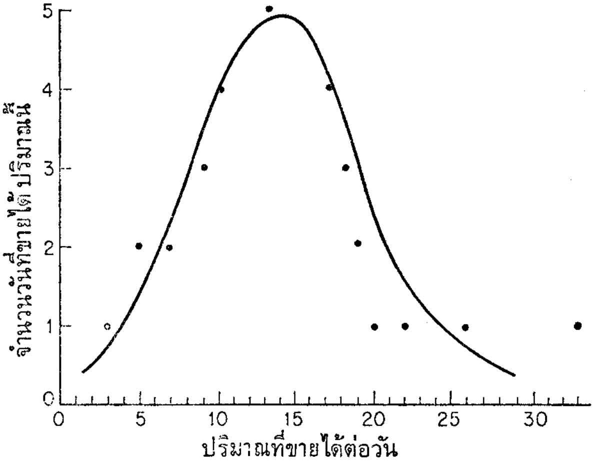
ตาราง 4—22

ปริมาณที่ขายได้					
26	5	18	20	13	13
13	7	9	19	19	22
33	10	9	5	18	9
10	3	10	18	10	7
13	13	17	17	17	17

เมื่อลากเส้นผ่านจุดต่าง ๆ เหล่านี้ เราจะพบว่าเส้นนี้มีรูปร่างใกล้เคียงกับเส้นที่เราเรียกเสมอว่าเป็นเส้นโค้ง “รูประฆัง”

เราสามารถคำนวณการขายถัวเฉลี่ยโดยการหารปริมาณการขายทั้งสิ้นระหว่างงวดระยะเวลา 30 วันด้วย 30 ดังนี้

$$\text{การขายถัวเฉลี่ยต่อวัน} = \frac{420}{30} = 14 \text{ หน่วยต่อวัน}$$

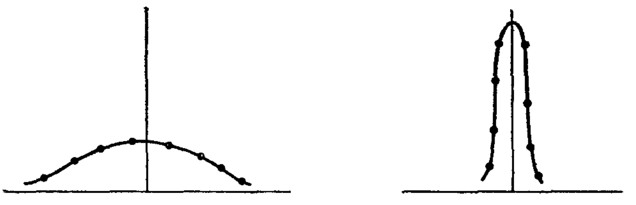


รูป 4–1 การแจกแจงที่ต่อเนื่องกันของการขายในอดีต : เส้นโค้งรูประฆัง

เส้นโค้งรูประฆังมีความสำคัญที่แท้จริงอย่างไร ? ถ้าจะอธิบายอย่างง่าย ๆ เราอาจกล่าวได้ว่า กลุ่มของข้อมูลในอดีตที่เก็บรวบรวมได้ (เช่น การขายต่อวันของสินค้าอย่างหนึ่งในอดีต) ส่วนมากมักจะมีค่าที่ต่ำมากและค่าที่สูงมากเพียงไม่กี่ตัว แต่ค่าส่วนใหญ่มีความโน้มเอียงที่จะจับกลุ่มหรือกระจัดกระจายอยู่รอบ ๆ ค่าเฉลี่ยในลักษณะอย่างเดียวกับที่ปรากฏในกราฟการขายต่อวันในอดีตข้างต้น ตัวอย่างเช่น คนบางคนอาจจะมีส่วนสูงไม่เกิน 3 ฟุต และบางคนก็มีส่วนสูงเกิน 8 ฟุต แต่คนส่วนมากจะมีส่วนสูงอยู่ในระหว่าง 5 ถึง 6 ฟุต สิ่งที่มีความ

สำคัญสำหรับการพิจารณาของเราในที่นี้คือข้อเท็จจริงที่ว่า เมื่อนำมาเขียนเป็นรูปกราฟ กลุ่มของข้อมูลเหล่านี้ส่วนมากมีความโน้มเอียงที่จะมีรูปร่างเป็นเส้นโค้งรูประฆัง เราจะตั้งข้อสมมติว่า ค่าที่แท้จริงของการขายต่อวันในอดีตมีการแจกแจงปกติรอบ ๆ ค่าเฉลี่ย 14 หน่วยต่อวัน เราตั้งข้อสมมตินี้เพราะว่าในหลาย ๆ กรณี การแจกแจงรูประฆังเป็นการกะประมาณที่สมเหตุสมผลเกี่ยวกับเหตุการณ์ทางธุรกิจ

นอกจากเส้นโค้งที่มีลักษณะดังกล่าวแล้ว ค่าต่าง ๆ ของเส้นโค้งบางเส้นอาจมีความโน้มเอียงที่จะกระจายห่างจากค่าเฉลี่ยมาก และค่าต่าง ๆ ของเส้นโค้งบางเส้นอาจมีความโน้มเอียงที่จะจับกลุ่มกันอย่างหนาแน่นรอบ ๆ ค่าเฉลี่ย เส้นโค้งที่มีลักษณะดังกล่าวทั้งสองปรากฏในรูป 4–2



รูป 4–2 เส้นโค้งที่แตกต่างกันอีก 2 ชนิด (ก) ค่าต่าง ๆ กระจายห่างจากค่าเฉลี่ยมาก (ข) ค่าต่าง ๆ จับกลุ่มกันอย่างหนาแน่นรอบ ๆ ค่าเฉลี่ย

มาตรการทางเชิงสถิติที่ใช้วัดความโน้มเอียงของข้อมูล ว่าข้อมูลเหล่านั้นจับกลุ่มหรือกระจายไปรอบ ๆ ค่าเฉลี่ย เรียกว่า "ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน" (standard deviation) เนื่องจากฝ่ายจัดการสามารถที่จะทำการอ้างอิงที่สำคัญ ๆ จากข้อมูลการขายในอดีตโดยอาศัยมาตรการนี้ เราจึงควรเรียนรู้ว่าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานคำนวณมาได้อย่างไร และควรเรียนรู้ต่อไปว่าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานหมายถึงอะไร

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานอาจคำนวณได้โดยปฏิบัติตามขั้นต่าง ๆ 5 ขั้น ดังนี้

1. หักค่าเฉลี่ยออกจากค่าแต่ละค่าของข้อมูลกลุ่มนั้น
2. นำเอาผลต่างที่ได้จากขั้นที่ 1 ยกกำลังสอง
3. นำเอาผลต่างที่ยกกำลังสองแล้วทั้งหมดบวกเข้าด้วยกัน
4. หารผลรวมของผลต่างที่ยกกำลังสองทั้งหมดด้วยจำนวนค่า
5. ถอดกรณฑ์สองของผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นที่ 4

เมื่อนำข้อมูลเดิมจากตาราง 4–22 มาดำเนินการตามงานขั้นต่าง ๆ ทั้ง 5 ขั้น ปรากฏดังนี้

การเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ขั้นที่ 1 หักค่าเฉลี่ยออกจากค่าแต่ละตัว	ขั้นที่ 2 นำเอาผลต่างยกกำลังสอง	ขั้นที่ 3 บวกผลต่างยกกำลังสองเข้าด้วยกัน
26 — 14 = 12	$(12)^2 = 144$	144
13 — 14 = −1	$(-1)^2 = 1$	1
33 — 14 = 19	$(19)^2 = 361$	361
10 — 14 = −4	$(-4)^2 = 16$	16
13 — 14 = −1	$(-1)^2 = 1$	1
5 — 14 = −9	$(-9)^2 = 81$	81
7 — 14 = −7	$(-7)^2 = 49$	49
10 — 14 = −4	$(-4)^2 = 16$	16
3 — 14 = −11	$(-11)^2 = 121$	121
13 — 14 = −1	$(-1)^2 = 1$	1
18 — 14 = 4	$(4)^2 = 16$	16
9 — 14 = −5	$(-5)^2 = 25$	25
9 — 14 = −5	$(-5)^2 = 25$	25
10 — 14 = −4	$(-4)^2 = 16$	16
17 — 14 = 3	$(3)^2 = 9$	9
20 — 14 = 6	$(6)^2 = 36$	36
19 — 14 = 5	$(5)^2 = 25$	25
5 — 14 = −9	$(-9)^2 = 81$	81
18 — 14 = 4	$(4)^2 = 16$	16
17 — 14 = 3	$(3)^2 = 9$	9
13 — 14 = −1	$(-1)^2 = 1$	1
19 — 14 = 5	$(5)^2 = 25$	25
18 — 14 = 4	$(4)^2 = 16$	16
10 — 14 = −4	$(-4)^2 = 16$	16
17 — 14 = 3	$(3)^2 = 9$	9
13 — 14 = −1	$(-1)^2 = 1$	1
22 — 14 = 8	$(8)^2 = 64$	64
9 — 14 = −5	$(-5)^2 = 25$	25
7 — 14 = −7	$(-7)^2 = 49$	49
17 — 14 = 3	$(3)^2 = 9$	9
		1,264

ขั้นที่ 4 หารผลรวมของผลต่างยกกำลังสองด้วยจำนวนค่า

$$\frac{1,264}{30} = 42.13$$

ขั้นที่ 5 ถอดกรณฑ์สองของผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นที่ 4

$$\sqrt{42.13} = 6.49$$

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงของการขายต่อวันในอดีตเท่ากับ 6.49 หน่วย ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานนี้มีความหมายอย่างไร ? อธิบายได้ดังนี้ : ในทางคณิตศาสตร์ได้มีการพิสูจน์แล้วว่า (1) ประมาณ 67% ของค่าทั้งหมดของการแจกแจงรูประฆังจะอยู่ห่างจากค่าเฉลี่ยเป็นจำนวนค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานหนึ่งค่า (บวกหรือลบ) (2) ประมาณ 95% ของค่าทั้งหมดจะอยู่ห่างจากค่าเฉลี่ยเป็นจำนวนค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานสองค่า (บวกหรือลบ) และ (3) กว่า 99% ของค่าทั้งหมดจะอยู่ห่างจากค่าเฉลี่ยเป็นจำนวนค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานสามค่า (บวกหรือลบ) เราจะนำเอาข้อพิสูจน์เหล่านี้มาใช้กับข้อมูลของเราต่อไป

ถ้าค่าเฉลี่ยของการขายต่อวันในอดีตเท่ากับ 14 หน่วย และเส้นโค้งเป็นรูประฆังโดยสมบูรณ์ ประมาณ 67% ของการขายในอนาคตจะอยู่ในช่วงระหว่าง 14 บวก 6.49 หน่วย และ 14 ลบ 6.49 หน่วย หรือระหว่าง 20.49 และ 7.51 หน่วย ในทำนองเดียวกันประมาณ 95% ของการขายในอนาคตจะอยู่ในช่วงระหว่าง $14 + (2 \times 6.49)$ หน่วยและ $14-(2 \times 6.49)$ หน่วย หรือระหว่าง 26.98 และ 1 หน่วย ตารางสถิติที่มีอยู่จะชี้ให้เห็นอัตราส่วนของค่าทั้งหมดของการแจกแจงที่อยู่ห่างจากค่าเฉลี่ยไปเป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจำนวนต่าง ๆ กัน ต่อไปเราจะใช้ประโยชน์จากค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานในการแก้ปัญหาการจัดให้มีสินค้าคงคลัง ในกรณีที่เป็นการแจกแจงที่ต่อเนื่องกัน

โดยอาศัยข้อมูลจากตาราง 4—22 เราจะเพิ่มข้อสนเทศเกี่ยวกับการตั้งราคาและต้นทุนเข้าไปในปัญหานี้ก่อน สมมติว่าผู้จัดการตามตัวอย่างนี้ ซื้อสินค้าชนิดนี้ในราคาหน่วยละ 4 บาทและขายในราคาหน่วยละ 9 บาท ถ้าขายสินค้านี้ไม่ได้ในวันที่ขายสินค้าที่เหลือจะไม่มีค่าซากแต่อย่างใด ถ้าใช้วิธีส่วนเพิ่มเพื่อคำนวณหาระดับการซื้อสินค้าที่ดีที่สุด เราสามารถที่จะคำนวณค่าที่ต้องการในลักษณะเดียวกัน ดังนี้

$$p = \frac{ML}{MP + ML} \qquad (4\text{—}2)$$

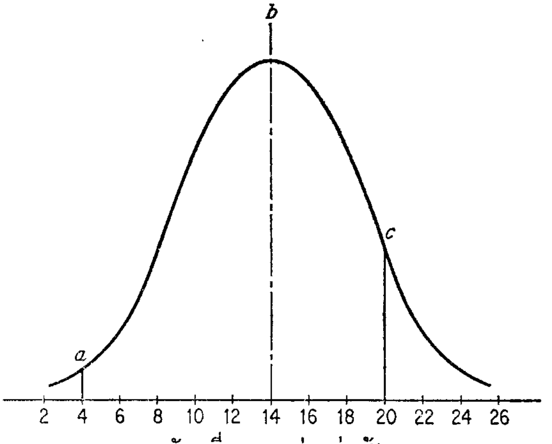
$$= \frac{4 \text{ บาท}}{5 \text{ บาท} + 4 \text{ บาท}}$$

$$= .44$$

เราคงจำได้ว่าค่าของ p ที่เท่ากับ .44 มีความหมายอย่างไร ตัวเลขนี้ชี้ให้เห็นว่าผู้จัดการจะต้องมีความเชื่อมั่น .44 ว่าจะขายสินค้าอย่างน้อยอีกหนึ่งหน่วยที่ซื้อเพิ่มเติมได้ จึงควรที่จะจัดให้มีสินค้าหน่วยนั้นไว้ ต่อไปเราจะสร้างเส้นโค้งการขายในอดีตใหม่ และพิจารณาว่าจะนำเอาวิธีส่วนเพิ่มเข้ามาใช้ร่วมกับการแจกแจงที่ต่อเนื่องกันของการขายต่อวันในอดีตได้อย่างไร

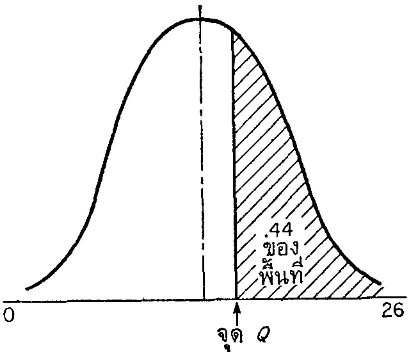
เส้นโค้งรูประฆังมีลักษณะอย่างหนึ่ง กล่าวคือ เราอาจคำนวณความน่าจะเป็นจากเส้นโค้งนี้ได้ พื้นที่ทั้งหมดภายใต้เส้นโค้งแทนความน่าจะเป็นที่มีค่าเท่ากับ 1.00 กล่าวอีกนัยหนึ่ง

เรามีความเชื่อมั่นว่าการขายจะต้องเป็นค่าใดค่าหนึ่งที่รวมอยู่ในการแจกแจงนั้น จากรูป 4—3 ถ้าเราลากเส้นตั้งฉาก b จากจุด 14 หน่วย เราจะเห็นได้ว่าพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งที่อยู่ทางด้านขวามือของเส้น b เท่ากับประมาณครึ่งหนึ่งของพื้นที่ทั้งสิ้น พื้นที่นี้ชี้ให้เราเห็นว่าความน่าจะเป็นของการขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 14 หน่วยเท่ากับประมาณ .5 *พื้นที่ที่อยู่ทางขวามือของเส้นตั้งฉากใด ๆ แทนความน่าจะเป็นของการขายที่เท่ากับหรือมากกว่าปริมาณนั้น ๆ* เมื่อพื้นที่ที่อยู่ทางขวามือของเส้นตั้งฉากใด ๆ ลดลง ความน่าจะเป็นที่จะขายได้เท่ากับหรือมากกว่าปริมาณนั้นก็จะลดลงเช่นกัน



รูป 4–3 การแจกแจงที่ต่อเนื่องกันของการขายต่อวันในอดีต

สมมติว่า ผู้จัดการตามตัวอย่างนี้กำลังพิจารณาที่จะจัดให้มีสินค้าไว้ 4 หน่วยตามเส้น a พื้นที่ส่วนใหญ่ของพื้นที่ทั้งหมดภายใต้เส้นโค้งจะอยู่ทางขวามือของเส้นตั้งฉากที่ลากจาก 4 ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ผู้จัดการจะขายได้เท่ากับหรือมากกว่า 4 หน่วยจึงมีค่าสูงมาก ถ้าเขาพิจารณาที่จะจัดให้มีสินค้าไว้ 14 หน่วย (ค่าเฉลี่ย) ประมาณครึ่งหนึ่งของพื้นที่ทั้งหมดภายใต้เส้นโค้งจะอยู่ทางขวามือของเส้นตั้งฉาก b ดังนั้นเขาจึงมีความเชื่อมั่นประมาณ .5 ว่าจะขายได้เท่ากับหรือมากกว่า 14 หน่วย สมมติว่าเขาพิจารณาที่จะจัดให้มีสินค้าไว้ 20 หน่วย พื้นที่ส่วนน้อยของพื้นที่ทั้งหมดภายใต้เส้นโค้งจะอยู่ทางขวามือของเส้น c ดังนั้นความน่าจะเป็นของการขายที่เท่ากับหรือมากกว่า 20 หน่วยจึงน้อยมาก ขอกล่าวซ้ำอีกครั้งหนึ่งว่า พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งที่อยู่ทางขวามือของเส้นตั้งฉากที่ลากจากระดับสินค้าใด ๆ จะกำหนดความน่าจะเป็นของการขายที่เท่ากับหรือมากกว่าปริมาณนั้น



รูป 4–4 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ต่อเนื่องกับพื้นที่ ภายใต้เส้นโค้งที่แรเงาไว้เท่ากับ .44

รูป 4–4 แสดงว่าความน่าจะเป็นจะต้องเท่ากับ .44 จึงเป็นการสมควรที่ผู้จัดการจะจัดให้มีสินค้าอีกหนึ่งหน่วย ผู้จัดการจะจัดให้มีสินค้าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงจุด Q ถ้าเขาจัดให้มีสินค้ามากกว่าปริมาณนี้ พื้นที่ที่แรเงาไว้ภายใต้เส้นโค้งจะน้อยกว่า .44 และความน่าจะเป็นที่จะขายอีกหนึ่งหน่วย หรือมากกว่าก็จะมีค่าน้อยกว่า .44 ตามที่ต้องการ เราจะหาตำแหน่งของจุด Q ได้อย่างไร ? ตำแหน่งของจุด Q อาจหาได้จากตารางสถิติ ถ้าใช้ตารางผนวก 1 เราจะสังเกตได้ว่าตารางนี้แสดงให้เราทราบว่า ในการหาพื้นที่ส่วนใด ๆ ภายใต้เส้นโค้งที่วัดไปทางขวามือจากปลายทางซ้ายมือของเส้นโค้ง จะเท่ากับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่าใดสำหรับกรณีที่เรากำลังพิจารณาอยู่นี้ เนื่องจากว่าพื้นที่ที่แรเงาไว้จะต้องเท่ากับ .44 ของพื้นที่ทั้งหมด พื้นที่ที่ทิ้งว่างไว้จึงต้องเท่ากับ .56 ของพื้นที่ทั้งหมดภายใต้เส้นโค้ง จากตารางผนวก 1 เราจะพบว่า .56 ของพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งจะอยู่ระหว่างปลายทางซ้ายมือ กับจุดที่อยู่ทางขวามือของค่าเฉลี่ยเท่ากับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน .15 เพราะฉะนั้นเราจึงทราบว่าจุด Q จะอยู่ทางขวามือของค่าเฉลี่ย (14) เท่ากับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน .15

เราได้คำนวณไว้ก่อนแล้ว สำหรับการแจกแจงนี้ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6.49 หน่วย ดังนั้น .15 คูณจำนวนนี้จะเท่ากับ

$$.15 \times 6.49 = .9735 \text{ ปัดเป็น } 1 \text{ หน่วย}$$

ในเมื่อจุด Q อยู่ทางขวามือของค่าเฉลี่ย (14 หน่วย) ไปเป็นจำนวน 1 หน่วย จุด Q จึงอยู่ที่ 15 หน่วย การสั่งซื้อที่ดีที่สุดจึงเท่ากับ 15 หน่วยต่อวัน

ต่อไปเป็นปัญหาอีกปัญหาหนึ่งที่ใช้ประโยชน์จากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ต่อเนื่องกัน ในตัวอย่างนี้เราจะสมมติว่าบันทึกการขายต่อวันซึ่งมีการแจกแจงปกติปรากฏดังนี้

การขายต่อวันถัวเฉลี่ยในอดีต	30 หีบ
ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงของการขายต่อวันในอดีต	5 หีบ
ต้นทุนต่อหีบ	10 บาท
ราคาขายต่อหีบ	16 บาท
ค่าที่ได้รับในกรณีที่ขายไม่ได้ในวันขาย	1 บาท

เช่นเดียวกับปัญหาแรก เราจะต้องคำนวณค่าของ p ที่ต้องการเพื่อที่จะได้จัดให้มีสินค้าชนิดนี้เพิ่มขึ้นอีกหนึ่งหีบก่อน ในกรณีนี้

$$P = \frac{ML}{MP + ML} \qquad (4\text{—}2)$$

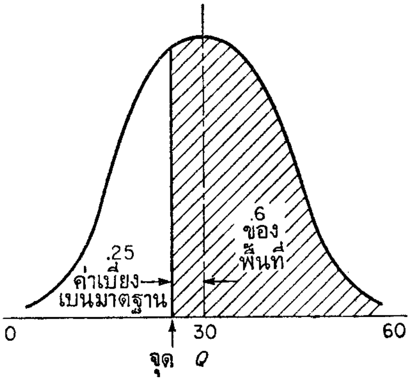
$$= \frac{9 \text{ บาท}}{6 \text{ บาท} + 9 \text{ บาท}}$$

(จะสังเกตได้ว่า ในการหาค่าของเราจะต้องนำค่าซาก 1 บาท ไปหักออกจากต้นทุน 10 บาท)

$$= \frac{9 \text{ บาท}}{15 \text{ บาท}}$$

$$= .6$$

เราอาจแสดงความน่าจะเป็นจากเส้นโค้งรูประฆัง โดยแบ่งพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งออกเป็น .6 โดยเริ่มจากปลายขวามือของเส้นโค้ง ตามที่ปรากฏในรูป 4—5



รูป 4-5 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ต่อเนื่องกัน พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งที่แรเงาไว้เท่ากับ .6

ผู้จัดการตามตัวอย่างนี้ จะเพิ่มขนาดของคำสั่งซื้อขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งมาถึงจุด Q จะสังเกตได้ว่าจุด Q อยู่ทางด้านซ้ายมือของค่าเฉลี่ย ในตัวอย่างก่อนจุด Q อยู่ทางขวามือของค่าเฉลี่ย เราจะหาตำแหน่งของจุด Q ได้อย่างไร ? ในเมื่อระดับสินค้าที่ดีที่สุดที่ควรจัดหาไว้อยู่ต่ำกว่าตัวเลขการขายถัวเฉลี่ย ระยะระหว่างจุด Q กับค่าเฉลี่ย (ซึ่งวัดโดยค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน) อาจอ่านได้โดยตรงจากตารางผนวก 1 เราหาค่า .6 จากตัวตาราง ค่าที่ใกล้ .6 ที่สุดคือ .5987 เราจะสังเกตได้ว่า .5987 ของพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง จะอยู่ระหว่างปลายขวามือของเส้นโค้งกับจุด Q และตารางนี้ได้ชี้ให้เห็นว่าจุด Q อยู่ห่างจากค่าเฉลี่ยเท่ากับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน .25 ต่อไปเราสามารถที่จะหาค่าของจุด Q ได้ดังนี้

.25 × ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน = .25 × 5 หีบ
= 1.25 หีบ
จุด Q = ค่าเฉลี่ยหักด้วย 1.25 หีบ
= 30 − 1.25 หีบ
= 28.75 หรือ 29 หีบ

จำนวนสินค้าที่ควรสั่งซื้อที่ดีที่สุดคือ 29 หีบต่อวัน

แนวความคิดในเรื่องการแจกแจงรูประฆังเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์มากต่อการตัดสินใจของฝ่ายจัดการในเมื่อต้องเผชิญกับความไม่แน่นอน แนวความคิดนี้ไม่ได้ให้หลักประกันว่าฝ่ายจัดการจะทำการตัดสินใจที่ดีที่สุดในวันหนึ่งวันใด แต่เป็นวิธีการที่ดีที่สุดในระยะยาวซึ่งจะทำให้กำไรอยู่ในระดับสูงสุด ในเมื่อกระสวนของการขายขึ้น ๆ ลง ๆ ในลักษณะเชิงสุ่มจากวันหนึ่งไปยังอีกวันหนึ่ง ในกรณีเช่นนี้ วิธีที่คล้ายคลึงกับที่เราได้อธิบายในบทนี้จะเป็นวิธีการที่ดีที่สุดที่อาจนำไปใช้ในการตัดสินใจได้ แต่สิ่งที่ท่านควรจะจดจำไว้ก็คือ เหตุการณ์ทางธุรกิจบางอย่างอาจจะไม่ได้แจกแจงในรูประฆัง

แบบฝึกหัด

4–1 ต่อไปนี้เป็นการขายในอดีตที่ไม่ต่อเนื่องกัน

ปริมาณที่ขายได้	จำนวนวันที่ขายได้ในปริมาณนี้	ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้	ความน่าจะเป็นสะสม
20 หน่วย	10	.10	1.00
25 หน่วย	30	.30	.90
40 หน่วย	50	.50	.60
60 หน่วย	10	.10	.10

ราคาขายต่อหน่วยเท่ากับ 10 บาท และต้นทุนต่อหน่วยเท่ากับ 6 บาท ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 25 หน่วย ในระยะยาว กำไรที่คาดไว้ต่อวันจะเท่ากับเท่าไร ?

4–2 โดยใช้ข้อสนเทศที่ให้ไว้ในข้อ 4–1 ถ้าจัดให้มีสินค้าไว้วันละ 60 หน่วยในระยะยาว กำไรที่คาดไว้ต่อวันจะเท่ากับเท่าไร ?

4–3 โดยใช้ข้อสนเทศที่ให้ไว้ในข้อ 4–1 เพื่อที่จะทำให้กำไรในระยะยาวอยู่ในระดับสูงสุด ควรจะซื้อสินค้าวันละเท่าไร ?

4–4 โดยใช้ข้อสนเทศที่ให้ไว้ในข้อ 4–1 ค่าที่คาดไว้ของข่าวสารที่สมบูรณ์เท่ากับเท่าไร ?

4–5 บริษัท อีแวนส์ จำกัด ซื้อผลไม้ชนิดหนึ่งในราคาหีบละ 180 บาท และขายในราคาหีบละ 300 บาท ถ้าขายผลไม้ชนิดนี้ไม่ได้ ผลไม้ที่เหลือจะมีค่าซาก 60 บาทต่อหีบ ความน่าจะเป็นต่ำสุดควรจะเป็นเท่าไร ?

4–6 การแจกแจงของการขายสินค้าชนิดหนึ่ง ซึ่งมีต้นทุนหน่วยละ 6 บาท และขายในราคาหน่วยละ 8 บาท ปรากฏดังนี้

ปริมาณที่ขายได้	จำนวนวันที่ขายได้ในปริมาณนี้	ความน่าจะเป็น
100	9	.1
101	18	.2
102	45	.5
103	18	.2

กำไรส่วนเพิ่มที่คาดไว้ และขาดทุนส่วนเพิ่มที่คาดไว้จากการจัดให้มีสินค้าหน่วยที่ 103 เท่ากับเท่าไร ? ควรจะจัดให้มีสินค้าหน่วยที่ 103 นี้ไว้หรือไม่ ?

4–7 โดยใช้ข้อสนเทศที่ให้ไว้ในข้อ 4–6 ระดับสินค้าที่ควรจะจัดให้มีไว้ ควรจะเป็นวันละเท่าไร ?

4–8 บริษัท อะเลกซานเดอร์ จำกัด มีการขายต่อวันถัวเฉลี่ย 60 หน่วย โดยมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 หน่วย สินค้าชนิดนี้ขายในราคาหน่วยละ 10 บาท และมีต้นทุนต่อหน่วย 5 บาท ไม่มีค่าซาก ระดับสินค้าที่ดีที่สุดที่บริษัทควรจะจัดหาไว้เท่ากับเท่าไร ?

4–9 บริษัท แมค–มอร์ จำกด ขายผลิตภัณฑ์ในราคาหน่วยละ 10 บาท โดยจ่ายต้นทุนหน่วยละ 3 บาท จากข้อมูลการขายในอดีตปรากฏว่า การขายถัวเฉลี่ยต่อวันเท่ากับ 50 หน่วย โดยมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 20 หน่วย ระดับสินค้าที่ดีที่สุดที่บริษัทควรจะจัดให้มีไว้เท่ากับเท่าไร ?

4–10 บริษัท โรเบิร์ตส์ จำกัด ได้ค้นพบว่า การขายถัวเฉลี่ยต่อวันเท่ากับ 100 หน่วย โดยมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 หน่วย สินค้าชนิดนี้ขายในราคาหน่วยละ 12 บาทและมีต้นทุนหน่วยละ 10 บาท ถ้าขายสินค้าชนิดนี้ไม่ได้จะมีค่าซาก 2 บาทต่อหน่วย ระดับสินค้าที่ดีที่สุดซึ่งควรจัดให้มีไว้เท่ากับเท่าไร ?

บทที่ 5

ตัวแบบของคงคลัง
(INVENTORY MODELS)

การควบคุมของคงคลังควรจะได้รับความเอาใจใส่จากฝ่ายจัดการในระดับสูง สำหรับธุรกิจหลายต่อหลายแห่ง ตัวเลขของคงคลังเป็นรายการที่ใหญ่ที่สุดในกลุ่มทรัพย์สินหมุนเวียน ความยุ่งยากที่เกิดจากของคงคลังมักจะนำมาซึ่งความล้มเหลวทางธุรกิจ ถ้าธุรกิจมีสินค้าไม่พอขายทั้ง ๆ ที่ไม่ตั้งใจที่จะให้เป็นเช่นนั้น ย่อมจะนำมาซึ่งผลที่ไม่น่าพอใจนัก ถ้าเป็นธุรกิจร้านค้าปลีก พ่อค้าอาจจะไม่ได้รับกำไรขั้นต้นที่ควรจะได้จากการขายสินค้านั้น และอาจจะเป็นที่ดูถูกของผู้ซื้ออีกด้วย ถ้าธุรกิจนั้นเป็นผู้ผลิต การที่วัตถุดิบขาดมือ (ไม่สามารถจัดวัตถุดิบให้ตามที่ขอเบิกจากของคงคลัง) ในกรณีรุนแรงอาจทำให้การผลิตหยุดชะงัก ข้อสรุปของเราจึงมีอยู่ว่า การจัดการของคงคลังที่ดีมีบทบาทสำคัญต่อการทำกำไรได้ของธุรกิจมาก

การตัดสินใจขั้นมูลฐานเกี่ยวกับของคงคลัง (Basic Inventory Decisions)

การตัดสินใจขั้นมูลฐานเกี่ยวกับของคงคลังมีอยู่ 2 อย่างด้วยกัน

1. จะสั่งซื้อครั้งละเท่าใด
2. จะสั่งซื้อจำนวนนี้เมื่อใด

ในการตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาทั้งสองนี้ ฝ่ายจัดการเกิดความรู้สึกที่ขัดแย้งกัน ถ้าจะให้ต้นทุนในการสั่งซื้ออยู่ในระดับต่ำสุด จะต้องสั่งซื้อแต่ละครั้งเป็นจำนวนมาก แต่ถ้าจะให้ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังอยู่ในระดับต่ำสุด จำนวนที่สั่งซื้อแต่ละครั้งจะต้องเป็นจำนวนน้อย ถ้าเน้นทางใดทางหนึ่งมากจนเกินไปย่อมจะก่อให้เกิดผลในทางที่ไม่ดีต่อกำไรที่ธุรกิจได้รับ วิธีที่ดีที่สุดคือนำเอาความต้องการทั้งสองเข้ามาประสานกัน โดยอาศัยเครื่องมือขั้นมูลฐานบางอย่างที่ได้มาจากการวิจัยการปฏิบัติงาน เราก็จะได้มาซึ่งตัวแบบที่จะใช้ในการกำหนดปริมาณการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุด (economic order quantity)

ต้นทุนของคงคลัง (Inventory costs)

เป้าหมายที่สำคัญของการจัดการของคงคลังที่ดี คือการทำให้ต้นทุนของคงคลังทั้งสิ้นอยู่ในระดับต่ำสุด ต้นทุนเหล่านี้อาจแยกออกเป็น 2 ชนิด คือ ต้นทุนในการสั่งซื้อ (ordering costs) และต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง (carrying costs) เราจะพิจารณาต้นทุนแต่ละชนิดต่อไปดังนี้

1. ต้นทุนในการสั่งซื้อ คือต้นทุนที่จ่ายไปเพื่อที่จะให้ได้มาซึ่งวัตถุดิบหรือสินค้าชนิดหนึ่งเข้ามาไว้ในของคงคลังของธุรกิจ ต้นทุนชนิดนี้จะเกิดขึ้นทุกครั้งที่มีการสั่งซื้อ เราคำนวณต้นทุนชนิดนี้ออกมาในรูปของจำนวนเงินต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง ต้นทุนในการสั่งซื้อเริ่มต้นด้วยการทำคำขอให้ซื้อส่งไปยังฝ่ายจัดซื้อ รวมตลอดไปถึงต้นทุนในการออกคำสั่งซื้อและติดตามคำสั่งซื้อ ต่อจากนั้นก็จะเป็นการรับและการจัดเรียงวัตถุดิบหรือสินค้าไว้ในของคงคลัง และสิ้นสุดลงเมื่อบริษัทผู้ซื้อจ่ายชำระเงินให้แก่ผู้ขาย ต้นทุนในการสั่งซื้อส่วนใหญ่มักจะประกอบขึ้นด้วยเงินเดือนและค่าเครื่องเขียนแบบพิมพ์

เนื่องจากว่าเราต้องการทราบต้นทุนส่วนเพิ่ม (incremental cost) ต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง เราจึงต้องมีตัวเลขกะประมาณเกี่ยวกับต้นทุนที่ได้มาจากแผนกจัดซื้อ จากคลังสินค้าซึ่งทำหน้าที่รับสินค้า และจากฝ่ายบัญชีสำหรับการปฏิบัติงานที่แตกต่างกัน 2 ระดับ ดังปรากฏในตาราง 5—1 จากตารางนี้เราจะเห็นได้ว่าการสั่งซื้อที่เพิ่มขึ้น 2,000 ครั้ง คาดว่าจะทำให้เราต้องจ่ายต้นทุนเพิ่มขึ้นอีก 38,500 บาท ต้นทุนส่วนเพิ่มต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้งจึงเท่ากับ 19.25 บาท

ตาราง 5—1

ต้นทุนในการสั่งซื้อ

ประเภทค่าใช้จ่าย	เงินเดือนต่อปี	สั่งซื้อ 3,000 ครั้งต่อปี จำนวนที่ต้องการ	สั่งซื้อ 3,000 ครั้งต่อปี ต้นทุนต่อปี	สั่งซื้อ 5,000 ครั้งต่อปี จำนวนที่ต้องการ	สั่งซื้อ 5,000 ครั้งต่อปี ต้นทุนต่อปี
	(บาท)	(คน)	(บาท)	(คน)	(บาท)
หัวหน้าแผนกจัดซื้อ	12,000	1	12,000	1	12,000
ผู้จัดซื้อ	7,000	3	21,000	5	35,000
ผู้ช่วยผู้จัดซื้อ	5,000	2	10,000	3	15,000
ผู้ติดตามงาน	4,000	1	4,000	2	8,000
เสมียน	3,000	3	9,000	4	12,000
พนักงานพิมพ์ดีด	2,800	2	5,600	3	8,400
วัสดุสิ้นเปลือง	—	—	1,500	—	2,500
เสมียนตรวจรับ	4,000	2	8,000	3	12,000
วัสดุสิ้นเปลืองในการตรวจรับ	—	—	300	—	500
เสมียนบัญชีเจ้าหนี้	4,200	3	12,600	4	16,800
วัสดุสิ้นเปลืองแผนกบัญชี	—	—	450	—	750
ค่าใช้จ่ายทั้งสิ้น			84,450		122,950

2. ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง หรือเรียกวา ตนทุนในการถือครองของคงคลัง (holding costs) คือต้นทุนที่เกิดขึ้นจากการที่ธุรกิจเป็นเจ้าของหรือดำรงไว้ซึ่งของคงคลังจำนวนหนึ่ง ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังรวม :

ดอกเบี้ยเงินลงทุนในของคงคลัง ต้นทุนนี้เป็นรายการสำคัญ

การล้าสมัย ต้นทุนนี้อาจจะเป็นรายการสำคัญก็ได้

ค่าเช่าสถานที่เก็บสินค้า ต้นทุนนี้อาจจะรวมแสงสว่าง ความร้อน หรือการทำความเย็น ต้นทุนนี้ก็เช่นเดียวกัน อาจเป็นรายการสำคัญก็ได้

การดำเนินงานทางด้านการเก็บรักษา ซึ่งรวมการเก็บบันทึก การตรวจนับของคงคลังและการป้องกันรักษา

ค่าภาษี ค่าประกัน และค่าเสื่อมราคา ต้นทุนเหล่านี้โดยปกติเป็นรายการย่อย

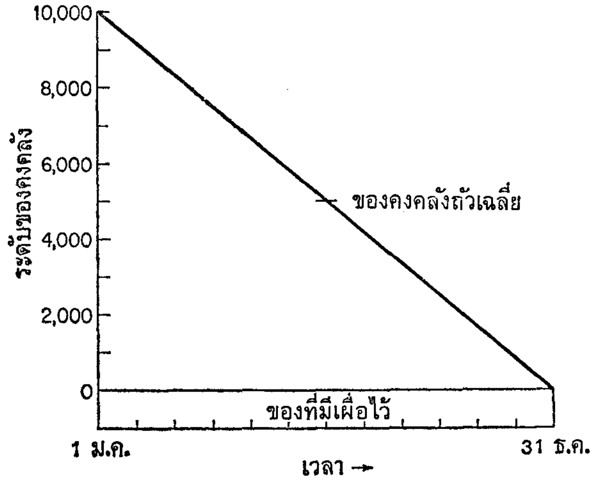
การเสื่อมสภาพในวัตถุดิบหรือสินค้า อาจจะเป็นต้นทุนรายการสำคัญหรือต้นทุนย่อยก็ได้

ต้นทุนในการเก็บรักษาเป็นตัวเลขต่อปี และคำนวณออกมาเป็นอัตราร้อยละของมูลค่าของคงคลังถัวเฉลี่ย การคำนวณอัตราร้อยละนี้คงเป็นไปในลักษณะเดียวกับการหาต้นทุนส่วนเพิ่มต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง กล่าวคือ โดยการกะประมาณต้นทุนในการเก็บรักษาทั้งสิ้นสำหรับระดับของคงคลังที่แตกต่างกัน 2 ระดับ ต้นทุนในการเก็บรักษาโดยปกติอยู่ในช่วง 10 ถึง 50% แต่ส่วนมากมักจะอยู่ในระหว่าง 15 ถึง 25%

แนวความคิดเกี่ยวกับของคงคลังถัวเฉลี่ย (Concept of average inventory)

ถ้าธุรกิจแห่งหนึ่งซื้อสินค้าหรือวัตถุดิบที่จะใช้ในปีถัดไปเพียงครั้งเดียวและการใช้สินค้าหรือวัตถุดิบชนิดนี้เป็นไปอย่างสม่ำเสมอ และใช้หน่วยสุดท้ายในวันสิ้นปีพอดี ของคงคลังของธุรกิจนี้จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของจำนวนที่ซื้อ หรือถ้าจะกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ครึ่งหนึ่งของของคงคลังต้นงวดนั่นเอง รูป 5–1 แสดงของคงคลังถัวเฉลี่ยภายใต้สภาพการณ์ที่มีการใช้อย่างสม่ำเสมอ

ถ้าการใช้ของคงคลังไม่ได้เป็นไปอย่างสม่ำเสมอ ของคงคลังถัวเฉลี่ยสำหรับปีอาจมากหรือน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของของคงคลังต้นงวดก็ได้ รูป 5–2 แสดงของคงคลังถัวเฉลี่ยภายใต้สภาพการณ์ที่มีการใช้ตามฤดูกาล (ไม่สม่ำเสมอ)



รูป 5–1 ของคงคลังถัวเฉลี่ยในกรณีที่มีการใช้อย่างสม่ำเสมอ

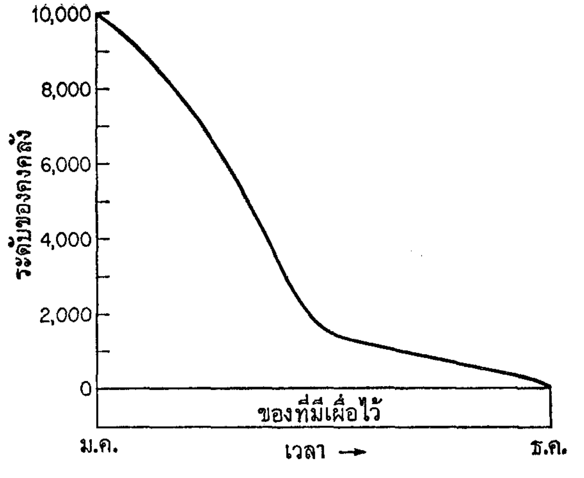
	ของที่มีอยู่
1 ม.ค.	10,000
1 ก.พ.	9,167
1 มี.ค.	8,335
1 เม.ย.	7,499
1 พ.ค.	6,667
1 มิ.ย.	5,833
1 ก.ค.	4,499
1 ส.ค.	4,167
1 ก.ย.	3,333
1 ต.ค.	2,500
1 พ.ย.	1,667
1 ธ.ค.	833
31 ธ.ค.	0
	65,000

ของคงคลังถัวเฉลี่ย $= \frac{65,000}{13}$

$= 5,000$

= 1/2 ของของคงคลังต้นงวด

วิธีที่ง่ายที่สุด (แต่อาจจะไม่ใช่วิธีที่ดีที่สุด) ในการคำนวณหาตัวเลขของคงคลังถัวเฉลี่ยคือบวกของคงคลังต้นงวด 1 มกราคม กับของคงคลังปลายงวด 31 ธันวาคมเข้าด้วยกัน แล้วหารด้วย 2 วิธีที่ดีกว่านี้คือบวกตัวเลขของคงคลัง 3 ตัว คือของคงคลังวันที่ 1 มกราคม 1 กรกฎาคม และ 31 ธันวาคมเข้าด้วยกัน แล้วหารด้วย 3



รูป 5-2 ของคงคลังถัวเฉลี่ยในกรณีที่มีการใช้ตามฤดูกาล

	ของที่มีอยู่
1 ม.ค.	10,000
1 ก.พ.	9,000
1 มี.ค.	8,000
1 เม.ย.	6,600
1 พ.ค.	5,000
1 มิ.ย.	3,000
1 ก.ค.	1,600
1 ส.ค.	1,200
1 ก.ย.	1,000
1 ต.ค.	750
1 พ.ย.	500
1 ธ.ค.	400
31 ธ.ค.	0
	47,050

ของคงคลังถัวเฉลี่ย $= \dfrac{47,050}{13}$

$= 3,619$

$= 0.362$ ของของคงคลังต้นงวด

ตาราง 5—2

การกำหนดปริมาณการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุด									
(1)	ที่มา	จำนวนการสั่งซื้อต่อปี	1	2	3	4	5	10	20
			บาท	บาท	บาท	บาท	บาท	บาท	บาท
(2)	10,000 บาท / (1)	จำนวนเงินต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง	10,000	5,000	3,333	2,500	2,000	1,000	500
(3)	(2) / 2	วัตถุดิบคงคลังถัวเฉลี่ย	5,000	2,500	1,666	1,250	1,000	500	250
(4)	(3) × $12\frac{1}{2}$%	ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง	625	313	208	156	125	63	31
(5)	(1) × 25 บาท	ต้นทุนในการสั่งซื้อ	25	50	75	100	125	250	500
(6)	(4) + (5)	ต้นทุนทั้งสิ้นต่อปี	650	363	283	256	250 ↑ ดีที่สุด	313	531

วิธีที่ถือปฏิบัติกันมากที่สุดคือบวกของคงคลังต้นงวดของทั้ง 12 เดือนและของคงคลังปลายงวดของเดือนธันวาคมเข้าด้วยกัน แล้วหารด้วย 13

การคำนวณปริมาณการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุด
(Solving for Economic Order Quantity)

เพื่อให้ต้นทุนของคงคลังอยู่ในระดับต่ำสุด ฝ่ายจัดการจะต้องพยายามทำให้ต้นทุนในการสั่งซื้อและต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังอยู่ในระดับต่ำสุด หลังจากที่เราได้ทำความเข้าใจเกี่ยวกับการคำนวณต้นทุนส่วนเพิ่มในการสั่งซื้อ ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังและของคงคลังถัวเฉลี่ยแล้ว เราก็สามารถที่จะคำนวณหาปริมาณการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุด (economic order quantity) EOQ คือขนาดของคำสั่งซื้อที่ทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นต่อปีในการสั่งซื้อและการจัดให้มีของคงคลังอยู่ในระดับต่ำสุด แต่ทั้งนี้เราจะต้องตั้งข้อสมมติว่าเราอยู่ภายใต้สภาพการณ์ที่แน่นอน กล่าวคือ เราจะต้องทราบจำนวนที่ต้องการต่อปี

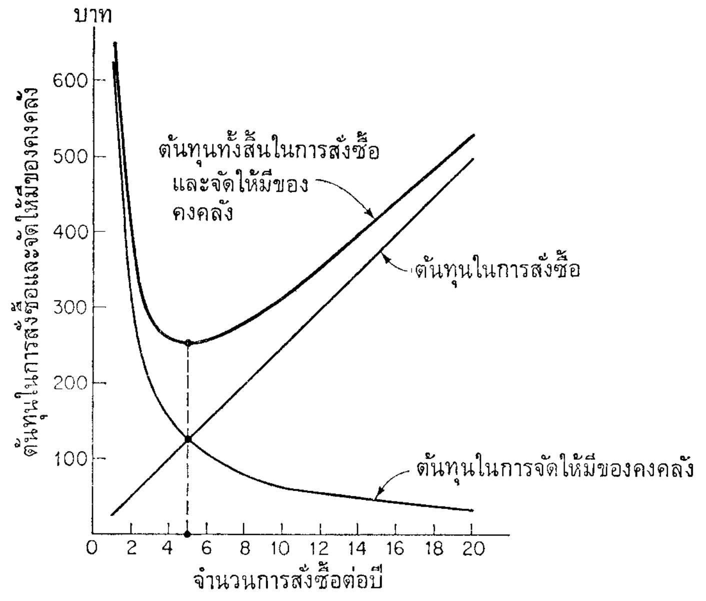
การหา EOQ โดยใช้ตาราง (Tabular solution for EOQ)

สมมติว่าผู้ผลิตคนหนึ่งจะต้องใช้วัตถุดิบชนิดหนึ่งเป็นมูลค่า 10,000 บาทต่อปี จากการคำนวณของนักบัญชีปรากฏว่าต้นทุนในการสั่งซื้อเท่ากับ 25 บาทต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง และต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับ 12 1/2% ของวัตถุดิบคงคลังถัวเฉลี่ย วิธีการกำหนดปริมาณการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุดวิธีหนึ่งได้แก่การสร้างตารางตามที่ปรากฏในตาราง 5–2

จะสังเกตได้ว่า เมื่อต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังลดลง ต้นทุนในการสั่งซื้อจะเพิ่มขึ้น นอกจากนั้นเราจะสังเกตได้ว่าเมื่อต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับต้นทุนในการสั่งซื้อ ตัวเลขต้นทุนทั้งสิ้นจะอยู่ในระดับต่ำสุด เราจะต้องคำนวณหาจุดที่ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับต้นทุนในการสั่งซื้อเสมอ ทั้งนี้เพราะว่าจุดนี้จะเป็นจุดที่ต้นทุนของคงคลังทั้งสิ้นต่อปีอยู่ในระดับต่ำสุด จากตาราง 5–2 ผู้ผลิตควรจะสั่งซื้อ 5 ครั้งในระหว่างปี

การนำเสนอ EOQ โดยใช้กราฟ
(Graphic presentation of EOQ)

รูป 5–3 แสดงจุด ๆ เดียวกับที่คำนวณได้ในตาราง 5–2 โดยใช้กราฟ



รูป 5–3 การกำหนดปริมาณการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุด

ที่มาของสูตร 3 สูตร

(Derivation of three formulas)

1. **จำนวนการสั่งซื้อที่ดีที่สุดต่อปี (Optimum number of orders per year)** เพื่อที่จะให้ได้มาซึ่งสูตรที่จะใช้ในการคำนวณจำนวนการสั่งซื้อที่ดีที่สุด

ให้ N = จำนวนการสั่งซื้อต่อปีที่ดีที่สุดที่ทำให้ต้นทุนของคงคลังทั้งสิ้นอยู่ในระดับต่ำสุด

A = มูลค่าทั้งสิ้นที่ใช้ต่อปี

P = ต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง

C = ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง คิดเป็นอัตราร้อยละของของคงคลังถัวเฉลี่ย

เราทราบแล้วว่า จุดที่ต้นทุนของคงคลังทั้งสิ้นอยู่ในระดับต่ำสุด คือจุดที่ต้นทุนในการสั่งซื้อมีจำนวนเท่ากับต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง เพราะฉะนั้น เราอาจจะหาค่าของ N โดยให้

ต้นทุนในการสั่งซื้อทั้งสิ้นต่อปี = ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังต่อปี

ต้นทุนในการสั่งซื้อทั้งสิ้นต่อปี = $N \times P = NP$

ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังต่อปี $= \dfrac{A}{N} \times \dfrac{1}{2} \times C$

$\frac{A}{N}$	$\frac{1}{2}$	C
มูลค่าที่ใช้ต่อปี / จำนวนการสั่งซื้อต่อปี = มูลค่าของการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง	ของคงคลังถัวเฉลี่ยในกรณีที่มีการใช้อย่างสม่ำเสมอ	% ของต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง

เมื่อนำมาเข้าสมการ เราจะได้

$$NP = \frac{AC}{2N}$$

$$2N^2P = AC$$

$$N^2 = \frac{AC}{2P}$$

$$N = \sqrt{\frac{AC}{2P}} \qquad (5\text{—}1)$$

โดยอาศัยสูตรที่คำนวณได้ข้างต้น เราสามารถที่จะหาค่าของ N โดยใช้ข้อมูลในตาราง 5—2 และรูป 5—3 ดังนี้

$$\sqrt{\frac{10{,}000 \text{ บาท} \times 0.125}{2 \times 25 \text{ บาท}}} = \sqrt{\frac{1{,}250 \text{ บาท}}{50 \text{ บาท}}} = \sqrt{25} = 5$$

สั่งซื้อ 5 ครั้งต่อปี
หรือสั่งซื้อทุก ๆ 73 วัน

2. **จำนวนหน่วยที่ดีที่สุดต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง** **(Optimum number of units per order)** เราอาจคำนวณหาสูตรอีกสูตรหนึ่ง สูตรนี้จะช่วยให้เราสามารถกำหนดจำนวนหน่วยที่สั่งซื้อที่ดีที่สุดทุกครั้งที่เราออกคำสั่งซื้อ

ให้
- R = ราคาต่อหน่วย
- N = จำนวนหน่วยที่ดีที่สุดต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง
- A = จำนวนหน่วยที่ใช้ทั้งสิ้นต่อปี
- P = ต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง
- C = ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง คิดเป็นอัตราร้อยละของของคงคลังถัวเฉลี่ย

ต่อไปเราสามารถหาค่าของ N โดยกำหนดให้
ต้นทุนในการสั่งซื้อทั้งสิ้นต่อปี = ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังต่อปี

$\frac{A}{N}$	x	P	= ต้นทุนในการสั่งซื้อทั้งสิ้น
จำนวนหน่วยที่ใช้ต่อปี / จำนวนหน่วยต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง = จำนวนการสั่งซื้อต่อปี		ต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง	

$\frac{AR}{A/N}$	x	$\frac{1}{2}$	x	C	= ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังต่อปี
จำนวนหน่วยที่ใช้ต่อปี x ราคาต่อหน่วย / จำนวนการสั่งซื้อต่อปี = มูลค่าที่สั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง		ของคงคลังถัวเฉลี่ยในกรณีที่มีการใช้อย่างสม่ำเสมอ		% ของต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง	

$$\frac{AP}{N} = \frac{ARC}{2A/N}$$

$$\frac{AP}{N} = \frac{RCN}{2}$$

$$N^2RC = 2AP$$

$$N^2 = \frac{2AP}{RC}$$

$$N = \sqrt{\frac{2AP}{RC}} \qquad (5-2)$$

จากตัวอย่างเดิม สมมติว่าบริษัทใช้วัตถุดิบ 10,000 หน่วยต่อปี ในราคาหน่วยละ 1 บาท ต้นทุนในการสั่งซื้อหนึ่งครั้งเท่ากับ 25 บาท และต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับ 12 1/2 % เมื่อแทนค่าเหล่านี้ในสูตร เราจะได้

$$\sqrt{\frac{2 \times 10{,}000 \times 25 \text{ บาท}}{1 \text{ บาท} \times 0.125}} = \sqrt{\frac{500{,}000}{0.125}} = \sqrt{4{,}000{,}000} = 2{,}000 \text{ หน่วยต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง}$$

จากสูตรที่หนึ่ง เราจะต้องสั่งซื้อปีละ 5 ครั้ง จากสูตรที่สอง เราจะต้องสั่งซื้อ 2,000 หน่วยต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง เมื่อคูณตัวเลขทั้งสองนี้เข้าด้วยกัน จะเท่ากับ 10,000 หน่วย ซึ่งเป็นตัวเลขการใช้วัตถุดิบต่อปี

3. **จำนวนวันที่มีของคงคลังไว้ใช้ที่ดีที่สุดต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง (Optimum number of day's supply per order)** สูตรที่สามจะชี้ให้เราทราบว่าทุกครั้งที่มีการสั่งซื้อ จำนวนที่สั่งซื้อจะคลุมหรือเผื่อไว้สำหรับการใช้กี่วัน

ให้ N = จำนวนวันที่มีของคงคลังไว้ใช้ที่ดีที่สุด ต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง

A = จำนวนหน่วยที่ใช้ทั้งสิ้นต่อปี

P = ต้นทุนในการสั่งซื้อ ต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง

C = ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง คิดเป็นอัตราร้อยละของของคงคลังถัวเฉลี่ย

R = ราคาต่อหน่วย

365 = จำนวนวันต่อปีปฏิทิน

เราให้

ต้นทุนในการสั่งซื้อทั้งสิ้นต่อปี = ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังต่อปี

$\frac{365}{N}$ x P = ต้นทุนในการสั่งซื้อทั้งสิ้น

จำนวนวันต่อปี / จำนวนวันต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง = จำนวนการสั่งซื้อต่อปี	ต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง

$\frac{AR}{365/N}$ x $\frac{1}{2}$ x C = ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังต่อปี

จำนวนหน่วยที่ใช้ต่อปี × ราคาต่อหน่วย / จำนวนการสั่งซื้อต่อปี = มูลค่าสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง	ของคงคลังถัวเฉลี่ยในกรณีที่มีการใช้อย่างสม่ำเสมอ	% ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง

$$\frac{365P}{N} = \frac{ARC}{730/N}$$

$$\frac{365P}{N} = \frac{ARCN}{730}$$

$$N^2ARC = 266{,}450P$$

$$N^2 = \frac{266{,}450P}{ARC}$$

$$N = \sqrt{\frac{266{,}450P}{ARC}}$$

เมื่อนำตัวเลขจากตัวอย่างข้างต้นมาแทนค่า เราจะได้

$$N = \sqrt{\frac{266{,}450 \times 25 \text{ บาท}}{10{,}000 \times 1 \text{ บาท} \times 0.125}}$$

$$= \sqrt{5{,}321}$$

= มีวัตถุดิบไว้ใช้ประมาณ 73 วัน ต่อการสั่งซื้อที่ดีที่สุดหนึ่งครั้ง

การเลือกใช้สูตร EOQ
(Selective use of EOQ formulas)

สูตร EOQ เป็นเพียงเครื่องมืออย่างหนึ่งที่ใช้ในการตัดสินใจเท่านั้น และคำตอบที่คำนวณจากสูตรเหล่านี้ย่อมขึ้นอยู่กับความถูกต้องเชื่อถือได้ของข้อมูลที่ใช้แทนค่าในสูตรเหล่านี้ บริษัทจะไม่ใช้สูตร EOQ ในการวิเคราะห์การจัดซื้อสินค้าหรือวัตถุดิบทุกชนิดที่บริษัทต้องการ แต่จะแยกรายการที่ประกอบขึ้นเป็นของคงคลังที่มีมูลค่าสูง ออกจากรายการที่มีความสำคัญน้อย ดังเช่นตาราง 5—3

ตาราง 5—3

ความสำคัญของรายการในของคงคลัง			
ประเภทของคงคลัง	ขนาดความสำคัญในแง่เงินลงทุน	% ของรายการในของคงคลัง	% ของมูลค่าการใช้ต่อปี
ก	มาก	10	80
ข	ปานกลาง	20	15
ค	น้อย	70	5
		100	100

ในกรณีนี้ เราอาจจะนำสูตร EOQ เข้ามาใช้ในฐานะที่เป็นเครื่องมือในการควบคุมของคงคลังประเภท ก เพราะเป็นรายการที่ฝ่ายจัดการให้ความสนใจเป็นพิเศษ ส่วนประเภท ข

และ ค นั้น เราอาจนำเครื่องมือที่ไม่ต้องใช้หลักวิชามากนักเข้ามาใช้ เช่น ฝ่ายจัดการอาจกำหนดระดับของคงคลังสูงสุดและต่ำสุดไว้ตามที่ตนเห็นสมควร ไม่จำเป็นจะต้องมีการควบคุมรายการ ข และ ค อย่างใกล้ชิด เพราะรายการทั้งสองนี้เท่ากับ 20% ของมูลค่าการใช้ต่อปีเท่านั้น

ส่วนลดปริมาณ (Quantity Discounts)

เท่าที่ได้อธิบายมาถึงจุดนี้ เรายังไม่ได้กล่าวถึงส่วนลดปริมาณที่ผู้ซื้อจะได้รับจากผู้ขาย ในการวิเคราะห์ส่วนลดปริมาณ เราจะต้องทำความเข้าใจหลักมูลฐานของสูตรปริมาณการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุดก่อน จึงสามารถประเมินข้อเสนอของผู้ขายเกี่ยวกับส่วนลดปริมาณได้อย่างถูกต้อง

ในขั้นแรกนี้ เราจะพิจารณาข้อดีและข้อเสียของนโยบายการซื้อเป็นปริมาณมากก่อน ถัดจากนั้นจึงพิจารณาวิธีการที่ใช้ในการวิเคราะห์ส่วนลดปริมาณทั้ง 2 วิธี ซึ่งได้แก่วิธีการเปรียบเทียบต้นทุน (cost comparison approach) และวิธีการเปลี่ยนแปลงด้านราคา (price change approach)

ข้อดีและข้อเสียของการซื้อในปริมาณมาก (Advantages and disadvantages of quantity buying)

ผู้ซื้อที่ซื้อในปริมาณมาก อาจได้รับประโยชน์บางอย่างจากการดำเนินการตามนโยบายนี้ ดังนี้

- ต้นทุนต่อหน่วยที่ต่ำกว่า
- ค่าขนส่งที่ถูกกว่า
- ผู้ค้าปลีกมีสินค้าแสดงแก่ลูกค้ามาก
- ต้นทุนในการสั่งซื้อที่ต่ำกว่า
- ของคงคลังขาดมือน้อยลง
- ได้รับการปฏิบัติเป็นพิเศษจากผู้ขาย

แต่การซื้อปริมาณมากก็อาจมีข้อเสียเหล่านี้

- ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังที่สูงกว่า
- อัตราหมุนของสินค้าช้าลง
- ความยืดหยุ่นน้อยลง
- สินค้าที่เก่าเก็บ
- ต้องการเงินลงทุนมาก
- การเสื่อมสภาพและการเสื่อมราคา

ต่อไปเราจะศึกษาวิธีการประเมินส่วนลดปริมาณทั้ง 2 วิธี

วิธีการเปรียบเทียบต้นทุน (Cost comparison approach)

วิธีการที่ง่ายและมีผู้นำไปใช้มากที่สุด ได้แก่การเปรียบเทียบต้นทุนทั้งสิ้นในการสั่งซื้อและการจัดให้มีของคงคลังถ้าสั่งซื้อตาม EOQ กับต้นทุนทั้งสิ้นในการสั่งซื้อและการจัดให้มีของคงคลัง ถ้าสั่งซื้อในจำนวนที่ทำให้ผู้ซื้อได้รับส่วนลดปริมาณ

ตัวอย่าง บริษัท ซันฮีท จำกัด เป็นบริษัทผลิตเครื่องทำความร้อน บริษัทต้องซื้อเครื่องบังคับความร้อนจำนวน 2,000 เครื่องต่อปี เพื่อใช้ในการผลิตเครื่องทำความร้อนโดยจ่ายต้นทุนเครื่องละ 20 บาท ต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้งเท่ากับ 50 บาท และต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับ 25% ของมูลค่าของคงคลัง บริษัท เธอโม จำกัด ซึ่งเป็นผู้ขายเครื่องบังคับความร้อนเสนอส่วนลด 3% จากการซื้อให้แก่บริษัท ซันฮีท จำกัด ถ้าสั่งซื้อครั้งละไม่ต่ำกว่า 1,000 หน่วย ในการประเมินข้อเสนอนี้ เราจะต้องคำนวณต้นทุนทั้งสิ้นที่เกิดจากการสั่งซื้อตาม EOQ และไม่ได้รับส่วนลด 3% ถ้าใช้สมการ (5–2) จำนวนหน่วยที่ดีที่สุดต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้งจะเท่ากับ

$$N = \sqrt{\frac{2AP}{RC}} = \sqrt{\frac{2\,(2{,}000) \times 50 \text{ บาท}}{20 \text{ บาท} \times 0.25}} = \sqrt{\frac{200{,}000 \text{ บาท}}{5 \text{ บาท}}} = \sqrt{40{,}000}$$

$$= 200 \text{ หน่วยต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง}$$

เนื่องจากจำนวนหน่วยที่ดีที่สุดในการสั่งซื้อแต่ละครั้งเท่ากับ 200 หน่วย และต้นทุนต่อหน่วยเท่ากับ 20 บาท ต้นทุนทั้งสิ้นต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้งจึงเท่ากับ 4,000 บาท ถ้าการใช้เครื่องบังคับความร้อนเป็นไปอย่างสม่ำเสมอ ของคงคลังถัวเฉลี่ยจะเท่ากับ 4,000 บาท / 2 หรือ 2,000 บาท ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับ 25% และ 25% ของ 2,000 บาทเท่ากับ 500 บาท ในแต่ละปีจะต้องมีการสั่งซื้อ 10 ครั้ง (ครั้งละ 200 หน่วย) เพื่อที่จะได้เครื่องบังคับความร้อน 2,000 หน่วยตามที่ต้องการ ดังนั้น ต้นทุนในการสั่งซื้อจึงเท่ากับ 10 คูณ 50 บาท หรือ 500 บาท

เราอาจสรุปตัวเลขเกี่ยวกับต้นทุนต่าง ๆ ได้ดังนี้

ต้นทุนเครื่องบังคับความร้อน (20 บาท × 2,000)	40,000 บาท
ต้นทุนในการสั่งซื้อ (10 × 50 บาท)	500 บาท
ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง (25% × 2,000 บาท)	500 บาท
ต้นทุนทั้งสิ้นต่อปีของเครื่องบังคับความร้อนที่ซื้ออยู่ในขณะนี้	41,000 บาท

เราต้องนำตัวเลขนี้ไปเปรียบเทียบกับต้นทุนทั้งสิ้นต่อปี ในกรณีที่ซื้อตามข้อเสนอของบริษัท เธอโม จำกัด

ถ้าซื้อครั้งละ 1,000 หน่วยตามที่บริษัท เธอโม จำกัด เสนอ ต้นทุนของจำนวนที่ซื้อแต่ละครั้งจะเท่ากับ

ต้นทุนเครื่องบังคับความร้อน (1,000 × 20 บาท × 0.97) (ตัวคูณ 0.97 เป็นผลจากส่วนลด 3%)	19,400 บาท

ในเมื่อต้นทุนของจำนวนที่สั่งซื้อแต่ละครั้งเท่ากับ 19,400 บาท ของคงคลังถัวเฉลี่ยจึงเท่ากับครึ่งหนึ่งของตัวเลขนี้ หรือ 9,700 บาท ถ้าสั่งซื้อปีละ 2 ครั้ง ต้นทุนทั้งสิ้นต่อปีคำนวณได้ดังนี้

ต้นทุนเครื่องบังคับความร้อน (2 × 19,400 บาท)	38,800 บาท
ต้นทุนในการสั่งซื้อ (2 × 50 บาท)	100 บาท
ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง (25% × 9,700 บาท)	2,425 บาท
ต้นทุนทั้งสิ้นต่อปีของเครื่องบังคับความร้อนถ้าได้รับส่วนลด	41,325 บาท

เพราะฉะนั้น บริษัท ซันฮีท จำกัด จะไม่ซื้อในจำนวนที่ทำให้บริษัทมีสิทธิได้รับส่วนลด เพราะการซื้อในลักษณะเช่นนี้จะทำให้ต้นทุนเพิ่มขึ้น 325 บาท

วิธีการเปลี่ยนแปลงด้านราคา (Price change approach)

วิธีการประเมินส่วนลดปริมาณอีกวิธีหนึ่ง คือ การคำนวณปริมาณการสั่งซื้อที่สูงที่สุดที่ควรสั่งซื้อในราคาที่ได้รับส่วนลด ตามวิธีนี้ จุดที่ดีที่สุดคือ จุดที่ต้นทุนในการสั่งซื้อและต้นทุนต่อหน่วยที่ลดลงเท่ากับต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังที่เพิ่มขึ้น อันเนื่องมาจากการซื้อในปริมาณมาก

ให้ X = ปริมาณการสั่งซื้อที่สูงที่สุดที่ควรสั่งซื้อในราคาต่อหน่วยที่ต่ำกว่า (คิดเป็นจำนวนเงิน)

D = ส่วนลด คิดเป็นอัตราร้อยละของ A

A = จำนวนที่ต้องการต่อปี คิดเป็นจำนวนเงินก่อนได้รับส่วนลด

P = ต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง

Q = EOQ เป็นจำนวนเงินก่อนได้รับส่วนลด

C = ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง คิดเป็นอัตราร้อยละของของคงคลังถัวเฉลี่ย

ในการหาค่าของ X ขั้นแรก เราจะต้องคำนวณต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังที่เพิ่มขึ้น เมื่อเริ่มมีการซื้อในปริมาณมาก

ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังตามข้อเสนอ อาจคำนวณได้ในลักษณะดังต่อไปนี้

$$\frac{\text{ปริมาณการสั่งซื้อที่สูงที่สุดที่ควรสั่งซื้อในราคาที่ลดลง}}{2} \times \text{ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง} = \frac{X}{2}C$$

(ของคงคลังถัวเฉลี่ยใหม่) (คิดเป็น % ของของคงคลังถัวเฉลี่ย)

ต่อไป เรานำต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังที่เป็นอยู่ในขณะนี้ ไปหักออกจากต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังตามข้อเสนอใหม่ ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังที่เป็นอยู่ในขณะนี้คำนวณจาก EOQ ก่อนได้รับส่วนลดดังนี้

$$\frac{\text{EOQ เป็นจำนวนเงินก่อนได้รับส่วนลด}}{2} \times \text{ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง} = \frac{Q}{2}C$$

ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังที่เพิ่มขึ้นจึงเท่ากับ

$$\frac{X}{2}C - \frac{Q}{2}C = \text{ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังที่เพิ่มขึ้น}$$

งานขั้นถัดไปคือการคำนวณต้นทุนในการสั่งซื้อที่ลดลง เมื่อนำต้นทุนในการสั่งซื้อใหม่ (ในกรณีที่ได้รับส่วนลดปริมาณ) ไปหักออกจากต้นทุนในการสั่งซื้อก่อนมีสิทธิได้รับส่วนลด เราจะได้ต้นทุนในการสั่งซื้อที่ลดลง

$$\begin{aligned}
\begin{matrix}\text{ต้นทุนในการสั่งซื้อ}\\\text{ก่อนส่วนลด}\end{matrix} &= \begin{matrix}\text{จำนวนการสั่งซื้อ}\\\text{ต่อปี}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{ต้นทุนในการซื้อ}\\\text{ต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง}\end{matrix}\\
&= \frac{\text{จำนวนที่ใช้ต่อปีคิดเป็นจำนวนเงินก่อนส่วนลด}}{\text{ขนาดของการสั่งซื้อคิดเป็นจำนวนเงินก่อนส่วนลด}} \times P\\
&= \frac{A}{Q} \times P\\
&= \frac{A}{Q} P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{matrix}\text{ต้นทุนในการสั่งซื้อ}\\\text{หลังส่วนลด}\end{matrix} &= \begin{matrix}\text{จำนวนการสั่งซื้อ}\\\text{ต่อปี}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{ต้นทุนในการสั่งซื้อ}\\\text{ต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง}\end{matrix}\\
&= \frac{\text{จำนวนที่ใช้ต่อปีคิดเป็นจำนวนเงินหลังส่วนลด}}{\text{ขนาดของการสั่งซื้อคิดเป็นจำนวนเงินหลังส่วนลด}} \times P\\
&= \frac{A(1-D)}{X} \times P\\
&= \frac{A(1-D)}{X} P
\end{aligned}$$

ต้นทุนในการสั่งซื้อก่อนส่วนลด − ต้นทุนในการสั่งซื้อหลังส่วนลด = ต้นทุนในการสั่งซื้อที่ลดลง

$$\frac{A}{Q}P - \left[\frac{A(1-D)}{X}\right]P = \text{ต้นทุนในการสั่งซื้อที่ลดลง}$$

และ

ส่วนลด × จำนวนที่ต้องการต่อปีคิดเป็นจำนวนเงินก่อนได้รับส่วนลด

$= D \times A$

$= DA$

= ต้นทุนทั้งสิ้นที่ลดลงอันเนื่องมาจากการจ่ายต้นทุนต่อหน่วยที่ต่ำกว่า

เมื่อนำต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังที่เพิ่มขึ้นกับราคาซื้อทั้งสิ้นที่ลดลง บวกด้วยต้นทุนในการสั่งซื้อที่ประหยัดได้มาเข้าสมการ เราจะได้สมการที่ใช้ในการหาค่าของ X ดังนี้:

$$\frac{XC}{2} - \frac{QC}{2} = DA + \frac{AP}{Q} - \frac{A(1-D)\,P}{X}$$

ในการหาค่าของ X เราคูณสมการทั้งสองข้างด้วย X:

$$\frac{X^2C}{2} - \frac{XQC}{2} = XDA + \frac{XAP}{Q} - A\,(1-D)\,P$$

ต่อไป เราจะแปลงสมการข้างต้นให้เป็นรูปสมการกำลังสอง $(ax^2 + bx + c = 0)$ ซึ่งเป็นรูปพีชคณิตโดยทั่วไป ดังนี้

$$\frac{X^2C}{2} - \frac{XQC}{2} - XDA\ \frac{XAP}{Q} + A(1-D)\ P = 0$$

$$X^2\,\frac{C}{2} + X\left(-\frac{QC}{2} - DA - \frac{AP}{Q}\right) + A(1-D)\ P = 0$$

จากสมการนี้ เรามี

$$a = \frac{C}{2} \qquad b = -\left(\frac{QC}{2} + DA + \frac{AP}{Q}\right) \qquad c = A\,(1-D)\ P$$

ต่อไป เราสามารถหาค่าจากสูตรกำลังสองได้ ดังนี้

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4AC}}{2A}$$

$$= \frac{\frac{QC}{2} + DA + \frac{AP}{Q} \pm \sqrt{\left[-\left(\frac{QC}{2} + DA + \frac{AP}{Q}\right)\right]^2 - 4\frac{C}{2}\left[A\,(1-D)\,P\right]}}{2\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\frac{QC}{2} + DA + \frac{AP}{Q} + \sqrt{\left[-\left(\frac{QC}{2} + DA + \frac{AP}{Q}\right)\right]^2 - 2CAP\ (1-D)}}{C} \qquad (5-4)$$

สูตรนี้ ใช้ในการคำนวณปริมาณการสั่งซื้อที่สูงที่สุดที่ควรซื้อโดยได้รับส่วนลด

เราจะอธิบายโดยใช้ข้อมูลของบริษัท ซันฮีท จำกัด ในหน้า 133 จะสังเกตได้ว่า ถ้าจะถือเอาประโยชน์จากส่วนลดที่ผู้ขายเสนอให้บริษัท ซันฮีท จำกัด จะต้องจ่ายต้นทุนเพิ่มขึ้นปีละ 325 บาท คำถามต่อไปจึงมีอยู่ว่า เมื่อพิจารณาจากส่วนลด 3 % ที่ผู้ขายเสนอให้ บริษัท ซันฮีท ควรสั่งซื้อครั้งละเท่าใด ในการหาค่าของจำนวนดังกล่าว เราอาจใช้สูตรวิธีการประเมินการเปลี่ยนแปลงด้านราคา ดังนี้

ให้ D = ส่วนลดที่ผู้ขายเสนอให้ (3 %)

Q = ปริมาณการสั่งซื้อที่ดีที่สุด (10 ครั้งต่อปี ครั้งละ 4,000 บาท)

A = จำนวนที่ต้องการต่อปีคิดเป็นจำนวนเงิน (40,000 บาท)

P = ต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง

C = ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง

X = ปริมาณสูงสุดที่ซื้อแต่ละครั้งเพื่อที่จะได้รับส่วนลด (3 %)

$$X = \frac{\frac{QC}{2} + DA + \frac{AP}{Q} + \sqrt{\left[-\left(\frac{QC}{2} + DA + \frac{AP}{Q}\right)\right]^2 - 2\,CAP\,(1-D)}}{C}$$

$$= \frac{4{,}000 \text{ บาท} \times 25\,\%}{2} + (3\,\% \times 40{,}000 \text{ บาท}) + \frac{40{,}000 \text{ บาท} \times 50 \text{ บาท}}{4{,}000 \text{ บาท}}$$

$$+\sqrt{\left[-\left(\frac{4{,}000 \text{ บาท} \times 25\,\%}{2} + (3\,\% \times 40{,}000 \text{ บาท} + \frac{40{,}000 \text{ บาท} \times 50 \text{ บาท}}{4{,}000 \text{ บาท}}\right)\right]^2}$$

$$\frac{-2\,(25\,\% \times 4{,}000 \text{ บาท} \times 50 \text{ บาท})\,(100\,\% - 3\,\%)}{25\,\%}$$

$$= \frac{500 \text{ บาท} + 1{,}200 \text{ บาท} + 500 \text{ บาท} + \sqrt{\left[-(500 \text{ บาท} + 1{,}200 \text{ บาท} + 500 \text{ บาท})\right]^2 - 1{,}000{,}000 \text{ บาท } (97\,\%)}}{25\,\%}$$

$$= \frac{2{,}200 \text{ บาท} + \sqrt{\left[-(2{,}200)\right]^2 - 970{,}000 \text{ บาท}}}{25\,\%}$$

$$= \frac{2{,}200 \text{ บาท} + \sqrt{4{,}840{,}000 \text{ บาท} - 970{,}000 \text{ บาท}}}{25\,\%}$$

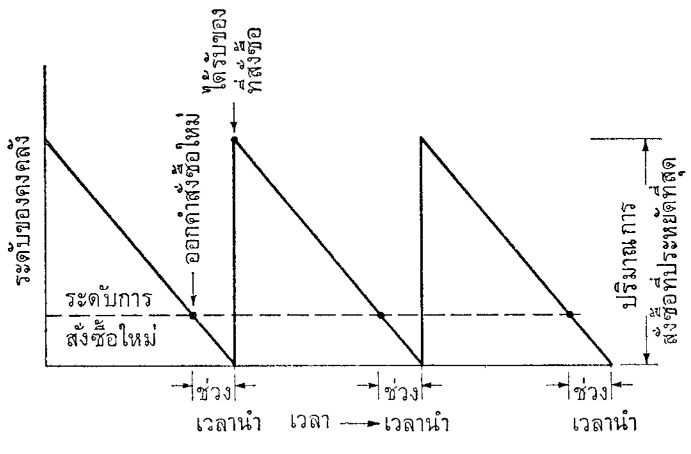
$$= \frac{2{,}200 \text{ บาท} + \sqrt{3{,}870{,}000 \text{ บาท}}}{25\,\%} = 16{,}700 \text{ บาท}$$

เพื่อที่จะได้ส่วนลดปริมาณ 3 % ตามข้อเสนอบริษัท ซันฮีท จำกัด ควรสั่งซื้อเครื่องบังคับความร้อนแต่ละครั้งเป็นปริมาณอย่างสูงที่สุด 16,700 บาท แต่ 16,700 บาทน้อยกว่า 20,000 บาท ซึ่งเป็นปริมาณการซื้อที่ทำให้บริษัทมีสิทธิได้รับส่วนลดตามข้อเสนอ บริษัทจึงไม่ควรที่จะถือประโยชน์จากข้อเสนอนี้

วิธีวิเคราะห์ส่วนลดทั้งสองวิธีดังกล่าวข้างต้น จะเป็นวิธีที่ดีต่อเมื่อได้นำไปใช้อย่างถูกต้อง ข้อสำคัญคือ เราต้องเข้าใจว่าวิธีวิเคราะห์ส่วนลดทั้งสองเป็นเพียงเครื่องมืออย่างหนึ่งที่ฝ่ายจัดการอาจนำไปใช้ในการประกอบการตัดสินใจ ดังเช่น เทคนิคเชิงปริมาณอื่น ๆ ในการใช้เครื่องมือเหล่านี้ฝ่ายจัดการจะต้องอาศัยดุลพินิจ จะต้องคอยสังเกตปัจจัยทุกอย่างที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการได้มาซึ่งสูตร EOQ อย่างใกล้ชิด เพราะปัจจัยเหล่านี้มักจะเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ และการเปลี่ยนแปลงเหล่านี้อาจกระทบกระเทือนมากต่อผลลัพธ์ที่คำนวณได้

ปัญหาการสั่งซื้อใหม่ (The Reorder Problem)

ในการพิจารณาปริมาณการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุด เราได้ดำเนินไปภายใต้ข้อสมมติ 2 อย่าง กล่าวคือ (1) การใช้ การบริโภค อุปสงค์ หรือการขายเป็นไปอย่างสม่ำเสมอ และ (2) ระยะเวลาระหว่างการสั่งซื้อกับการรับสินค้า ที่เรียกว่า “ช่วงเวลานำ” (lead time) คงที่ เราได้ตั้งข้อสมมติไว้ว่า เราทราบอัตราการใช้และอัตราการใช้นี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เรายังได้ตั้งข้อสมมติไว้อีกว่า เราทราบช่วงเวลานำและช่วงเวลานำนี้จะไม่เปลี่ยนแปลงเช่นเดียวกัน รูป 5—4 แสดงระดับของคงคลังภายใต้ข้อสมมติทั้งสองดังกล่าว

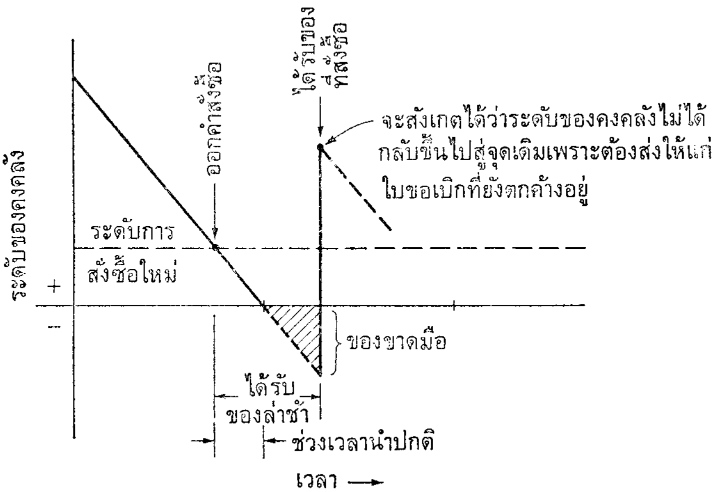


รูป 5–4 ระดับของคงคลังในกรณีที่การใช้และช่วงเวลานำคงที่ (ไม่มีของที่มีเผื่อไว้)

แต่ข้อสมมติเหล่านี้อาจไม่เป็นจริงเสมอไป เป็นต้นว่า การใช้ชิ้นส่วนในการผลิตอาจจะไม่ได้เป็นไปตามแผนที่ได้วางไว้ ทั้งนี้ อาจจะเนื่องมาจากปริมาณการขายที่สูงกว่าปริมาณที่ได้คาดไว้ การนัดหยุดงาน เครื่องกำเนิดพลังงานขัดข้อง หรืออากาศเปลี่ยนแปลง ช่วงเวลานำระหว่างการสั่งซื้อและการรับวัตถุดิบ มักจะเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ อาจจะเป็นเพราะว่าผู้ขายประสบความยุ่งยาก (เช่น เกิดไฟไหม้ เครื่องจักรขัดข้อง) หรือความล่าช้าทางด้านเส้นทางขนส่ง (เช่น น้ำท่วม อุบัติเหตุ) เป็นต้น

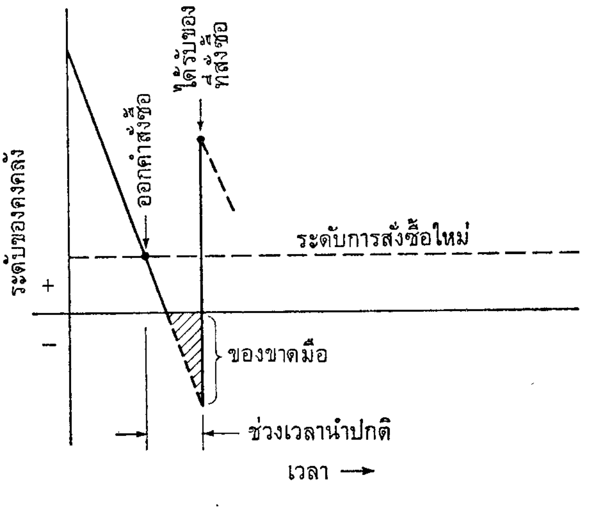
ของขาดมือ (Stockouts)

ของขาดมือเกิดขึ้น เมื่อแผนกพัสดุไม่สามารถจัดวัตถุดิบหรือสินค้าอย่างใดอย่างหนึ่งให้ตามใบขอเบิก ซึ่งโดยปกติบริษัทควรจะจัดให้มีวัตถุดิบหรือสินค้ารายการนั้น ๆ ไว้ ปัญหาของขาดมือเกิดจากอัตราการใช้ และช่วงเวลานำที่เปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ การเปลี่ยนแปลงนี้ทำให้การดำเนินงานของธุรกิจต้องเผชิญกับความไม่แน่นอนมากขึ้น รูป 5—5 แสดงของขาดมือในกรณีที่อุปสงค์ (การใช้) เป็นไปโดยปกติ แต่ได้รับของที่สั่งซื้อ (การส่งสินค้า) ช้ากว่าที่คาดไว้ รูป 5—6 แสดงของขาดมือในกรณีที่ได้รับของที่สั่งซื้อตามกำหนด แต่มีการใช้มากกว่าที่คาดไว้



รูป 5–5 ระดับของคงคลังในกรณีที่การใช้คงที่แต่ช่วงเวลานำยาวนานมาก (ไม่มีของที่มีเผื่อไว้)

ของขาดมือเป็นภาวการณ์ที่ไม่พึงปรารถนา เพราะทำให้เกิดต้นทุนขึ้นกับธุรกิจนั้น ๆ และต้นทุนที่เกิดจากของขาดมืออาจจะเป็นจำนวนเงินที่สูงมากก็ได้ ตัวอย่างเช่น การพลาดโอกาสการขาย และการสูญเสียลูกค้า เป็นตัวอย่างของต้นทุนภายนอก เครื่องจักรที่อยู่ว่างเปล่า และความรู้สึกในทางไม่ดีที่เกิดขึ้นกับพนักงานเป็นตัวอย่างของต้นทุนภายใน ถ้าต้องการที่จะหลีกเลี่ยงไม่ให้ของขาดมือ ฝ่ายจัดการจะต้องพิจารณาต่อไปว่าควรจะสั่งซื้อเมื่อใดและสั่งซื้อใหม่เมื่อใด



รูป 5–6 ระดับของคงคลัง ในกรณีที่มีการใช้มาก
แต่ช่วงเวลานำคงที่ (ไม่มีของที่มีเผื่อไว้)

จุดสั่งซื้อใหม่ (Reorder point)

จุดสั่งซื้อใหม่เป็นภาวการณ์ที่ชี้ให้ผู้ที่รับผิดชอบเกี่ยวกับการจัดซื้อทราบว่า ถึงเวลาแล้วที่จะต้องออกคำสั่งซื้อเพื่อชดเชยวัตถุหรือสินค้าที่มีอยู่ เพราะฉะนั้นจุดสั่งซื้อใหม่จึงขึ้นอยู่กับตัวแปรผันทั้งสองดังที่ได้กล่าวมาแล้ว คือ อัตราการใช้และช่วงเวลานำ ในการคำนวณจุดสั่งซื้อใหม่เราคูณการใช้ (จำนวนหน่วยที่ใช้ต่อวัน) ด้วยช่วงเวลานำ (คิดเป็นจำนวนวัน)

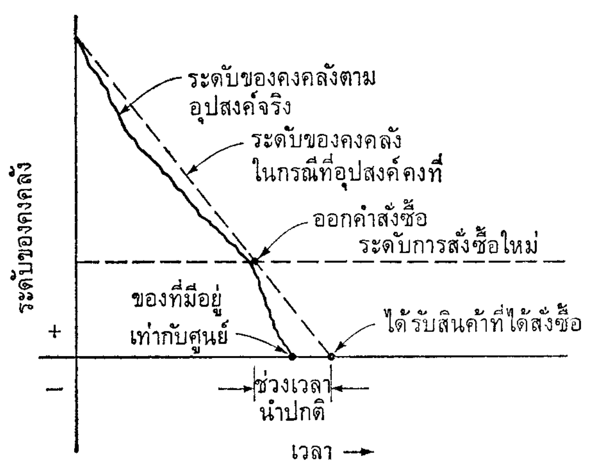
สมมติว่า บริษัท แดชเชอร์ เป็นบริษัทผลิตเครื่องซักผ้า และมีอัตราการผลิตถัวเฉลี่ย 50 เครื่องต่อวัน บริษัทซื้อเครื่องมอเตอร์ไฟฟ้าเพื่อใช้ในการประกอบเครื่องซักผ้าที่บริษัทผลิตจำหน่าย ช่วงเวลานำถัวเฉลี่ยสำหรับการสั่งซื้อปกติเท่ากับ 6 วัน $50 \times 6 = 300$ 300 เป็นจุดสั่งซื้อเครื่องมอเตอร์ไฟฟ้าใหม่ บริษัทจะสั่งซื้อเครื่องมอเตอร์เพิ่มเติมทุกครั้งที่ระดับของคงคลังลดลงมาเหลือ 300 ซึ่งเป็นจำนวนที่พอเพียงสำหรับการใช้ถัวเฉลี่ย 6 วัน แต่รูป 5—5 และ 5—6 จะเป็นเครื่องเตือนให้บริษัททราบว่า ไม่ควรที่จะเสี่ยงต่อหมายกำหนดเวลาที่รัดตัวเช่นนั้น บริษัทควรจะจัดให้มีส่วนเกินเพื่อความปลอดภัย (margin of safety) ไว้บ้าง

ของที่มีเผื่อไว้ (Safety stocks)

คำว่า ของที่มีเผื่อไว้ (safety stocks) หมายถึง ของคงคลังส่วนเกินที่มีไว้เพื่อหลีกเลี่ยงหรือป้องกันของขาดมือที่อาจเกิดขึ้น ของที่มีเผื่อไว้มีผลต่อต้นทุนของธุรกิจ 2 ประการ กล่าวคือ ของที่มีเผื่อไว้ทำให้ต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือลดลง แต่ทำให้ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังเพิ่มขึ้น ต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือ คูณด้วยจำนวนครั้งของของขาดมือที่ป้องกันได้

โดยการจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้ คือ ตัวเลขต้นทุนที่ลดลง ผลคูณระหว่างมูลค่าของของที่มีเผื่อไว้กับอัตราร้อยละของต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง คือ ตัวเลขต้นทุนที่เพิ่มขึ้น จะสังเกตได้ว่าต้นทุนที่เพิ่มขึ้นนี้มีลักษณะต่อเนื่องกัน หรือเป็นการถาวรด้วยซ้ำไป ทั้งนี้เพราะว่าของที่มีเผื่อไว้เป็นส่วนหนึ่งของของคงคลังทั้งสิ้นตลอดเวลา นอกจากนี้จะสังเกตได้อีกว่าจำนวนของที่มีเผื่อไว้เป็นจำนวนที่คงที่ ดังนั้นเราจึงไม่ต้องหารของที่มีเผื่อไว้ด้วย 2 ดังเช่นในกรณีที่คำนวณของคงคลังถัวเฉลี่ยภายใต้สภาพการณ์ที่มีการใช้อย่างสม่ำเสมอ

จำนวนของที่มีเผื่อไว้ที่ดีที่สุด กำหนดโดยพิจารณาจากจุดมุ่งหมายที่ค่อนข้างจะขัดแย้งซึ่งกันและกัน 2 ประการ กล่าวคือ (1) ทำให้ต้นทุนที่เกิดจากของขาดมืออยู่ในระดับต่ำสุด แต่ในขณะเดียวกันก็ (2) ทำให้ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังในส่วนที่เป็นของที่มีเผื่อไว้อยู่ในระดับต่ำสุดด้วย การตัดสินใจว่าควรจะจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้เป็นจำนวนเท่าใดไม่ใช่เป็นเรื่องง่าย ๆ วิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหานี้แต่ละวิธีต่างก็มีข้อจำกัดในตัวของมันเอง ในตอนต่อไปเราจะได้พิจารณาถึงการตัดสินใจเกี่ยวกับของที่มีเผื่อไว้ของบริษัท แดชเชอร์ การตัดสินใจเกี่ยวกับของที่มีเผื่อไว้นี้ เราจะใช้วิธีการความน่าจะเป็น ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเป็นวิธีที่ดีที่สุดเท่าที่ได้มีการคิดค้นมาจนถึงปัจจุบันนี้ เราจะตั้งข้อสมมติว่าช่วงเวลานำคงที่และได้รับของที่สั่งซื้อแต่ละรุ่นในเวลาเดียวกัน ภายใต้ข้อสมมติเหล่านี้ ของขาดมือจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่ออุปสงค์ (การใช้) เพิ่มขึ้นหลังจากที่ผ่านจุดสั่งซื้อใหม่ไปแล้ว รูป 5–7 แสดงให้เห็นสถานการณ์ดังกล่าว จะสังเกตได้ว่าของขาดมือเป็นผลที่เกิดจากอุปสงค์ที่เพิ่มขึ้นหลังจากที่ได้ออกคำสั่งซื้อเพื่อชดเชยของคงคลังไปแล้ว ถ้าอุปสงค์เพิ่มขึ้นก่อนที่จะถึงจุดสั่งซื้อใหม่ บริษัทก็ควรที่จะได้ออกคำสั่งซื้อไปแล้วในขณะที่ระดับของคงคลังลดลงมาสู่ระดับจุดสั่งซื้อใหม่



รูป 5–7 ระดับของคลัง แสดงผลของการเพิ่มขึ้นของอุปสงค์หลังจากที่ได้ออกคำสั่งซื้อไปแล้ว

ของที่มีเผื่อไว้ที่ดีที่สุดสำหรับบริษัทแดชเชอร์

บริษัท แดชเชอร์ ได้คำนวณโดยใช้สูตร EOQ ปรากฏว่าจำนวนมอเตอร์ไฟฟ้าที่ดีที่สุดต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้งเท่ากับ 3,600 เครื่อง โดยมีการใช้ถัวเฉลี่ย 50 เครื่องต่อวัน นอกจากนี้ฝ่ายจัดการยังได้คำนวณช่วงเวลานำปกติ ปรากฏว่าเท่ากับ 6 วัน บริษัทต้องการทราบว่าควรจะจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้เป็นจำนวนเท่าไร

ในขั้นแรก บริษัทจะต้องวิเคราะห์บัตรบันทึกของคงคลังเกี่ยวกับมอเตอร์เหล่านี้ โดยสังเกตการใช้ในระหว่างงวดการสั่งซื้อใหม่ในอดีตติดต่อกันหลาย ๆ งวด บริษัทสามารถกำหนดความน่าจะเป็นของระดับการใช้ต่าง ๆ ดังปรากฏในตาราง 5–4

ตาราง 5–4

ความน่าจะเป็นของการใช้ระหว่างงวดการสั่งซื้อใหม่		
การใช้ระหว่างงวดการสั่งซื้อใหม่	จำนวนครั้งที่ใช้ตามจำนวนนี้	ความน่าจะเป็นของการใช้
150 หน่วย	3	3/100 หรือ .03
200 „	4	4/100 „ .04
250 „	6	6/100 „ .06
300 „	68	68/100 „ .68
350 „	9	9/100 „ .09
400 „	7	7/100 „ .07
450 „	3	3/100 „ .03
	100	1.00

ถ้าบริษัท แดชเชอร์ สั่งซื้อใหม่เมื่อระดับของคงคลังลดลงมาเหลือ 300 หน่วย บริษัทจะไม่ประสบปัญหามีมอเตอร์ไม่พอใช้ 81 % (.68 + .06 + .04 + .03) แต่โอกาสที่จะเกิดมอเตอร์ขาดมือ 19 % ตัวเลข 19 % นี้เป็นที่สนใจของฝ่ายจัดการมาก

บริษัทอาจจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้จำนวนหนึ่ง เพื่อลดหรือหลีกเลี่ยงการที่มีมอเตอร์ไม่พอใช้ในการผลิต ฝ่ายจัดการอาจพิจารณาจากของที่มีเผื่อไว้ในระดับต่าง ๆ และเลือกระดับที่จะทำให้ (1) ต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือ บวก (2) ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังในส่วน

ที่เป็นของที่มีเผื่อไว้มียอดรวมต่ำที่สุด ดังนั้น บริษัทอาจพิจารณาจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้ในระดับต่าง ๆ กันดังนี้

1. 50 หน่วย ของที่มีเผื่อไว้จำนวนนี้จะคลุมการใช้ 350 หน่วยในระหว่างงวดการสั่งซื้อใหม่ บริษัทจะมีของขาดมือต่อเมื่อการใช้ในระหว่างงวดเท่ากับ 400 หรือ 450 หน่วยซึ่งมีโอกาสเกิดขึ้นได้ .07 + .03 = .1

2. 100 หน่วย ของที่มีเผื่อไว้จำนวนนี้จะคลุมการใช้ 350 หรือ 400 หน่วยในระหว่างงวดการสั่งซื้อใหม่ บริษัทจะมีของไม่พอใช้ต่อเมื่อการใช้ในระหว่างงวดเท่ากับ 450 หน่วยซึ่งมีโอกาสเกิดขึ้นได้ 3 %

3. 150 หน่วย ของที่มีเผื่อไว้จำนวนนี้จะคลุมการใช้ 350, 400 หรือ 450 หน่วยในระหว่างงวดการสั่งซื้อใหม่ บริษัทจะไม่ประสบกับภาวะของขาดมือเลย ถ้าจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้ในจำนวนนี้

สมมติว่า บริษัท แดชเชอร์ ได้คำนวณแล้วปรากฏว่าต้นทุนที่เกิดจากการที่ของขาดมือเท่ากับ 50 บาทต่อหน่วย เมื่อของที่มีอยู่ลดลงมาใกล้จุดต่ำสุดซึ่งเป็นจุดสั่งซื้อใหม่ อันตรายที่เกิดจากการที่ของขาดมือก็จะตามมา ดังนั้น เราจึงต้องนำจำนวนครั้งที่บริษัททำการสั่งซื้อใหม่ในระหว่างปีเข้ามาพิจารณาด้วย สมมติว่า เมื่อคำนวณจากสูตร EOQ สูตรหนึ่งทำให้ฝ่ายจัดการทราบว่า การสั่งซื้อที่ดีที่สุดคือ 5 ครั้งต่อปี เพราะฉะนั้น บริษัทจะต้องเผชิญกับอันตรายที่เกิดจากมอเตอร์ขาดมือ 5 ครั้งในระหว่างปี EOQ จึงมีผลกระทบกระเทือนต่อจุดสั่งซื้อใหม่

ตาราง 5–5 แสดงต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือ ที่เกิดจากการจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้ในระดับต่าง ๆ 4 ระดับ (ไม่มีของที่เผื่อไว้เลย ของที่มีเผื่อไว้เท่ากับ 50 หน่วย 100 หน่วย และ 150 หน่วย)

ถ้านักบัญชีของบริษัท แดชเชอร์ ได้คำนวณต้นทุนต่อปีในการจัดให้มีมอเตอร์ไว้ในของที่มีเผื่อไว้หนึ่งหน่วยเท่ากับ 10 บาท ต้นทุนทั้งสิ้นต่อปีของการจัดให้มีเผื่อไว้ทั้ง 4 ระดับ (ต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือบวกต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังในส่วนที่เป็นของที่มีเผื่อไว้) ปรากฏในตาราง 5–6 ดังนี้

ตาราง 5—5

ต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือ				
ของที่มีเผื่อไว้	ความน่าจะเป็นที่ของจะขาดมือ	จำนวนที่มีไม่พอ	ต้นทุนที่คาดไว้ต่อปี (จำนวนที่มีไม่พอ × ความน่าจะเป็นที่จะมีของไม่พอในจำนวนนี้ × ต้นทุนของขาดมือต่อหน่วย × จำนวนการสั่งซื้อต่อปี)	ต้นทุนของขาดมือทั้งสิ้นต่อปี
0	.09 ถ้าการใช้เท่ากับ 350 หน่วย	50	50 × .09 × 50 บาท × 5 = 1,125 บาท	
	.07 ,, 400 ,,	100	100 × .07 × 50 บาท × 5 = 1,750 บาท	
	.03 ,, 450 ,,	150	150 × .03 × 50 บาท × 5 = 1,125 บาท	4,000 บาท
50	.07 ,, 400 ,,	50	50 × .07 × 50 บาท × 5 = 875 บาท	
	.03 ,, 450 ,,	100	100 × .03 × 50 บาท × 5 = 750 บาท	1,625 บาท
100	.03 ,, 450 ,,	50	50 × .03 × 50 บาท × 5 = 375 บาท	375 บาท
150	0	0	0	0

ตาราง 5—6

ต้นทุนในการจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้ในระดับต่าง ๆ			
ของที่มีเผื่อไว้	ต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือ	ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังต่อปี (จำนวนที่มีอยู่ × ต้นทุนต่อปี)	ต้นทุนทั้งสิ้นต่อปี (ต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือ + ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง)
0	4,000 บาท	0	4,000 บาท
50	1,625 บาท	50 × 10 บาท = 500 บาท	2,125 บาท
100	375 บาท	100 × 10 บาท = 1,000 บาท	1,375 บาท *
150	0	150 × 10 บาท = 1,500 บาท	1,500 บาท

* ต้นทุนทั้งสิ้นต่อปีที่ต่ำที่สุดเท่ากับ 1,375 บาท ปริมาณของที่มีเผื่อไว้ที่ดีที่สุดจึงเท่ากับ 100 หน่วย

การจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้จะทำให้จุดสั่งซื้อใหม่เปลี่ยนแปลงไป ถ้าจะจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้ 100 หน่วย การคำนวณจุดสั่งซื้อใหม่ปรากฏดังนี้

จุดสั่งซื้อใหม่ = การใช้ถัวเฉลี่ยต่อวัน × ช่วงเวลานำคิดเป็นจำนวนวัน + ของที่มีเผื่อไว้

= 50 × 6 + 100 = 400 หน่วย

แนวความคิด EOQ เมื่อนำมาปรับใช้กับการผลิต
(EOQ Concept as Applied to Production Runs)

แนวความคิดที่ว่า ลักษณะของการสั่งซื้อที่ดีที่สุดเพื่อที่จะทำให้ต้นทุนของคงคลังรายปีอยู่ในระดับต่ำสุดมีอยู่เพียงแบบเดียวนั้น อาจนำมาปรับใช้กับกระบวนการผลิตได้ ตัวอย่างเช่น บริษัทหลายแห่งผลิตสินค้าบางอย่างที่อยู่ในสายผลิตภัณฑ์ของตนครั้งละจำนวนมาก ๆ แทนที่จะผลิตในอัตราที่สม่ำเสมอตลอดปี การผลิตในลักษณะเช่นนี้ได้เป็นที่ถือปฏิบัติกันโดยทั่วไป เพราะยอดขายรายปีของสินค้าชนิดนั้น ๆ อาจมีจำนวนไม่มากพอที่จะทำการผลิตสินค้าชนิดนั้นแต่เพียงอย่างเดียวในลักษณะที่ต่อเนื่องกันตลอดปี

บริษัทเหล่านี้จะต้องจ่ายต้นทุนในการเริ่มงาน (set-up cost) จำนวนหนึ่งทุกครั้งที่จะมีการผลิตสินค้า ต้นทุนในการเริ่มงานเทียบเคียงได้คร่าว ๆ กับต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้งตามที่ได้กล่าวมาแล้วในบทนี้ ต้นทุนในการเริ่มงานประกอบด้วย

1. ต้นทุนวิศวกรรมในการจัดวางสายการผลิตหรือตั้งเครื่องจักร

2. ต้นทุนในการจัดเตรียมเอกสารเกี่ยวกับคำสั่งงานและการอนุมัติการผลิต

3. ต้นทุนในการสั่งซื้อวัตถุดิบเพื่อใช้ในการผลิตสินค้านั้น ๆ

นอกจากต้นทุนในการเริ่มงานเหล่านี้ บริษัทจะต้องจ่ายต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังสำหรับผลิตภัณฑ์สำเร็จรูปโดยเริ่มตั้งแต่ผลิตสำเร็จจนถึงขาย ค่าใช้จ่ายในการจัดให้มีของคงคลังสำหรับสินค้าสำเร็จรูปประกอบด้วยรายการต่าง ๆ เช่นเดียวกับที่ปรากฏในต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังในรูปวัตถุดิบ ยกเว้นแต่ว่าสินค้าสำเร็จรูปมีมูลค่าสูงกว่าเพราะได้รวมต้นทุนในการผลิต (ค่าแรงงานและโสหุ้ยอุปกรณ์) ไว้ด้วย เราจะเห็นได้ว่า แนวความคิดขั้นมูลฐานเกี่ยวกับจำนวนรุ่นหรือจำนวนครั้งของการผลิตที่ดีที่สุด (กล่าวคือ เป็นจำนวนที่จะทำให้ต้นทุนรายปีทั้งสิ้นสำหรับการผลิตที่มีลักษณะไม่ต่อเนื่องกันอยู่ในระดับต่ำสุด) คล้ายคลึงกับแนวความคิดที่ใช้สำหรับของคงคลังในรูปวัตถุดิบมาก

ขนาดของการผลิตแต่ละรุ่นที่ดีที่สุด : การผลิตเพื่อเก็บไว้
(Optimum production lot size: production for stock)

เราอาจคำนวณขนาดของการผลิตแต่ละรุ่นที่ดีที่สุดสำหรับกรณีที่ผลิตสินค้าสำเร็จรูปจำนวนหนึ่งเพื่อเก็บไว้ และขายออกไปในอัตราที่สม่ำเสมอจนกว่าสินค้านั้นจะลดลงมาสู่ระดับต่ำระดับหนึ่ง เมื่อถึงเวลานั้นแล้วเราจึงเริ่มผลิตสินค้าอีกรุ่นหนึ่ง วิธีการคำนวณจำนวนครั้งของการผลิตที่ดีที่สุดต่อปีคงเหมือนกับกรณีการควบคุมของคงคลังในรูปวัตถุดิบ ตาราง 5—7 แสดงสัญลักษณ์ที่ใช้ร่วมกัน ดังนี้

ตาราง 5—7

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการคำนวณการผลิตเพื่อเก็บไว้		
	วัตถุดิบ (จำนวนการสั่งซื้อที่ดีที่สุด)	**จำนวนครั้งในการผลิต (จำนวนที่ดีที่สุดต่อปี)**
A	การใช้ต่อปี คิดเป็นจำนวนเงิน	การขายต่อปี (ต้นทุนโรงงาน)
C	ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง คิดเป็น % ของวัตถุดิบ	ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง คิดเป็น % ของสินค้าสำเร็จรูป
P	ต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง	ต้นทุนในการเริ่มงานต่อการผลิตหนึ่งครั้ง
N	จำนวนการสั่งซื้อที่ดีที่สุดต่อปี	จำนวนครั้งที่ดีที่สุดต่อปี

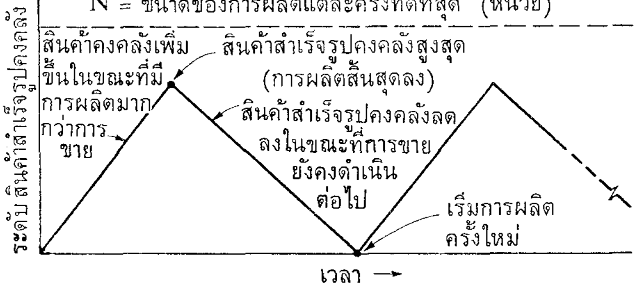
ตัวอย่างเช่น ถ้า (1) บริษัท XYZ ขายเกียร์ชนิดพิเศษชนิดหนึ่งซึ่งมีต้นทุนโรงงานปีละ 40,000 บาท (2) ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังสำหรับสินค้าสำเร็จรูปเท่ากับ 20% ต่อปี และ (3) ต้นทุนในการเริ่มงานต่อการผลิตหนึ่งครั้งเท่ากับ 80 บาท จำนวนครั้งของการผลิตที่ดีที่สุดต่อปีของสินค้ารายการนี้จะเท่ากับ

$$N = \sqrt{\frac{AC}{2P}} = \sqrt{\frac{40{,}000 \text{ บาท} \times 0.20}{2 \times 80}} = \sqrt{\frac{8{,}000 \text{ บาท}}{160 \text{ บาท}}} = \sqrt{50} = \text{ประมาณ 7 ครั้งต่อปี}$$

กล่าวอีกนัยหนึ่ง เพื่อให้ต้นทุนทั้งสิ้นต่อปีในการเริ่มงานการผลิตเกียร์เหล่านี้และต้นทุนในการเก็บรักษาเกียร์เหล่านี้จนกว่าจะขายได้อยู่ในระดับต่ำสุด บริษัท XYZ ควรแบ่งการผลิตสินค้าชนิดนี้เพื่อให้พอเพียงกับการขายรายปีออกเป็น 7 ครั้งหรือ 7 รุ่นต่อปี เราอาจใช้สูตร EOQ อื่น ๆ ในการคำนวณจำนวนหน่วยที่ดีที่สุดต่อการผลิตหนึ่งครั้ง หรือคำนวณออกมาในรูปจำนวนเดือนที่มีสินค้าไว้ขายที่ดีที่สุดในการผลิตแต่ละครั้ง

ขนาดของการผลิตแต่ละรุ่นที่ดีที่สุด : การผลิตและการขายที่ดำเนินไปพร้อมๆ กัน
(Optimum production lot size: simultaneous production and sales)

เราอาจนำแนวความคิดเกี่ยวกับขนาดของการผลิตแต่ละรุ่นที่ดีที่สุด เข้าไปปรับใช้กับกรณีที่มีการขายสินค้าสำเร็จรูปไปพร้อม ๆ กับที่การผลิตสินค้าแต่ละรุ่นยังดำเนินการอยู่ ในกรณีนี้ของคงคลังในรูปสินค้าสำเร็จรูป จะไม่เพิ่มขึ้นเป็นจำนวนสูงสุดทันทีดังเช่นในกรณีที่มีการรับวัตถุดิบตามจำนวนสั่งซื้อที่ดีที่สุดทั้งจำนวน แต่สินค้าสำเร็จรูปที่มีอยู่จะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นเมื่อการผลิตสินค้าเป็นไปเร็วกว่าการขาย ต่อจากนั้นสินค้าสำเร็จรูปที่มีอยู่จะค่อย ๆ ลดลงจนถึงจุดต่ำสุดในขณะที่การผลิตสินค้ารุ่นหนึ่งรุ่นใดได้สิ้นสุดลงแล้ว แต่การขายยังคงดำเนินต่อไป แนวความคิดเกี่ยวกับเรื่องนี้ปรากฏอยู่ในรูป 5–8



รูป 5–8 สินค้าสำเร็จรูปคงคลังในระหว่างที่การผลิตและการขายดำเนินไปพร้อม ๆ กัน

ตาราง 5–8 แสดงให้เห็นว่า สัญลักษณ์ที่ใช้ในกรณีนี้ตรงกับที่ใช้ในการคำนวณวัตถุดิบคงคลังอย่างไร

ตาราง 5—8

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการคำนวณการผลิตสำหรับการขายที่ดำเนินไปพร้อม ๆ กัน		
	วัตถุดิบ (จำนวนที่ดีที่สุดต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง)	การผลิต (จำนวนที่ดีที่สุดต่อการผลิตหนึ่งครั้ง)
A	จำนวนหน่วยที่ต้องการต่อปี	จำนวนหน่วยที่ขายต่อปี
P	ต้นทุนในการสั่งซื้อต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง	ต้นทุนในการเริ่มงานต่อการผลิตหนึ่งครั้ง
R	ราคาต่อหน่วย	ต้นทุนโรงงานต่อหน่วย
C	ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังคิดเป็น % ของวัตถุดิบ	ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังคิดเป็น % ของสินค้าสำเร็จรูป
N	จำนวนหน่วยที่ดีที่สุดต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง	จำนวนหน่วยที่ดีที่สุดต่อการผลิตหนึ่งครั้ง

เราอาจแสดงต้นทุนในการเริ่มงานทั้งสิ้น และต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังทั้งสิ้นได้ดังนี้

ถ้าให้ N = การผลิตที่ดีที่สุดคิดเป็นหน่วย

v = อัตราการผลิตคิดเป็นหน่วยที่ผลิตได้ต่อวัน

เพราะฉะนั้น $\frac{N}{v}$ = จำนวนวันที่ใช้ไปในการผลิตแต่ละครั้งที่ดีที่สุด

ถ้าให้ d = อัตราการขายคิดเป็นหน่วยที่ขายได้ต่อวัน

เพราะฉะนั้น $\frac{N}{v}d$ = จำนวนหน่วยที่ขายได้ในระหว่างเวลาที่ทำการผลิตแต่ละครั้งที่ดีที่สุด

และ $N-\frac{N}{v}d$ = จำนวนสินค้าสำเร็จรูปคงคลังที่สูงสุดที่อาจสะสมได้คิดเป็นหน่วย

สินค้าสำเร็จรูปคงคลังถัวเฉลี่ยเป็นจำนวนหน่วย (การขายที่สม่ำเสมอ)

= 1/2 ของสินค้าสำเร็จรูปคงคลังสูงสุด

$$= \frac{1}{2}\left(N-\frac{N}{v}d\right)$$

$$= \frac{1}{2}N\left(1-\frac{d}{v}\right)$$

สินค้าสำเร็จรูปคงคลัง
ถัวเฉลี่ยเป็นจำนวนหน่วย $= \frac{N}{2}\left(1 - \frac{d}{v}\right)$

ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง = สินค้าสำเร็จรูปคงคลังถัวเฉลี่ยเป็นจำนวนหน่วย × ต้นทุนโรงงานต่อหน่วย × ต้นทุน ในการจัดให้มีของคงคลัง (%)

$$= \frac{N}{2}\left(1 - \frac{d}{v}\right) \times R \times C$$

$$= \frac{RCN}{2}\left(1 - \frac{d}{v}\right)$$

จำนวนครั้งที่ผลิตต่อปี $= \frac{A}{N}$

ต้นทุนในการเริ่มงาน $= \frac{A}{N}P$

จากการหาสูตร EOQ ในตอนแรกของบทนี้ เราทราบแล้วว่าการผลิตจะสิ้นเปลืองค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดเมื่อต้นทุนในการเริ่มงานทั้งสิ้นต่อปี เท่ากับต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังทั้งสิ้นสำหรับสินค้าสำเร็จรูปคงคลัง โดยอาศัยสัญลักษณ์ที่ใช้ในการหาต้นทุนในการเริ่มงานและต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลัง เราอาจนำต้นทุนทั้งสองมาเข้าสมการดังนี้

$$\frac{AP}{N} = \frac{RCN}{2}\left(1 - \frac{d}{v}\right)$$

หาค่า N โดยการคูณไขว้ดังนี้

$$RCN^2\left(1 - \frac{d}{v}\right) = 2AP$$

$$N^2 = \frac{2AP}{RC\,(1 - d/v)}$$

$$N = \sqrt{\frac{2AP}{RC\,(1 - d/v)}} \qquad 5\text{—}5$$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างเกี่ยวกับการใช้สูตรที่คำนวณได้ข้างต้นนี้ : บริษัท ABC จำกัด ผลิตและขายตลับชนิดพิเศษปีละ 5,000 หน่วย ต้นทุนในการเริ่มงานต่อการผลิตหนึ่งครั้งเท่ากับ 90 บาท ต้นทุนโรงงานเท่ากับหน่วยละ 5 บาท ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังสำหรับสินค้าสำเร็จรูปเท่ากับ 20% อัตราการผลิตเท่ากับ 100 หน่วยต่อวัน และขายได้ 14 หน่วยต่อวัน บริษัทควรจะผลิตตลับครั้งละเท่าไร ?

$$N = \sqrt{\frac{2 \times 5{,}000 \times 90 \text{ บาท}}{5 \text{ บาท} \times 0.20 \times (1 - 14/100)}}$$

$$= \sqrt{\frac{900{,}000 \text{ บาท}}{1 \text{ บาท}\ (1 - 0.14)}}$$

$$= \sqrt{\frac{900{,}000 \text{ บาท}}{0.86 \text{ บาท}}}$$

$$= \sqrt{1{,}046{,}000}$$

$$= 1{,}023$$

= จำนวนหน่วยต่อการผลิตหนึ่งครั้งที่ดีที่สุด

แบบฝึกหัด

5–1 ให้ใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้ สร้างสูตรที่จะใช้ในการคำนวณหาจำนวนสัปดาห์ที่ดีที่สุดที่มีของคงคลังไว้ใช้ต่อการซื้อแต่ละครั้งได้โดยตรง

P = ต้นทุนในการบริหารต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง

C = ค่าใช้จ่ายในการจัดให้มีของคงคลังคิดเป็นร้อยละของของคงคลังถัวเฉลี่ย

A = จำนวนที่ต้องการต่อปี คิดเป็นจำนวนเงิน

X = จำนวนสัปดาห์ที่มีของคงคลังไว้ใช้ที่ดีที่สุดต่อการซื้อแต่ละครั้ง

5–2 จากสัญลักษณ์ที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้ จงสร้างสูตรที่จะใช้ในการคำนวณหาจำนวนการสั่งซื้อที่ดีที่สุดต่อเดือนได้โดยตรง

C = ค่าใช้จ่ายในการจัดให้มีของคงคลังคิดเป็นร้อยละของของคงคลังถัวเฉลี่ย

P = ต้นทุนในการบริหารต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง

A = จำนวนที่ต้องการต่อปี คิดเป็นจำนวนหน่วย

R = ราคาต่อหน่วยถัวเฉลี่ย

X = จำนวนการสั่งซื้อที่ดีที่สุดต่อเดือน

5–3 ให้ใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้ สร้างสูตรที่จะใช้ในการคำนวณหาค่าของ N ได้โดยตรง

A = จำนวนที่ต้องการต่อปี คิดเป็นจำนวนเงิน

R = ราคาต่อหน่วย

P = ต้นทุนในการบริหารต่อการซื้อหนึ่งครั้ง

C = ค่าใช้จ่ายในการจัดให้มีของคงคลังต่อหน่วยต่อปี คิดเป็นจำนวนเงิน

N = จำนวนหน่วยต่อการสั่งซื้อที่ประหยัดที่สุด

5–4 จากการวิเคราะห์ข้อมูลทางการบัญชี บริษัท เบเยอร์ จำกัด ได้คำนวณต้นทุนในการบริหารต่อการสั่งซื้อวัตถุดิบหนึ่งครั้งเท่ากับ 30 บาท บริษัทคาดว่าในปีหน้าบริษัทจะต้อง

ใช้วัตถุดิบชนิดนี้เป็นเงิน 60,000 บาท ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับ 10% ของของคงคลังถัวเฉลี่ย ในปีหน้าบริษัทควรจะสั่งซื้อวัตถุดิบดังกล่าวกี่ครั้ง ?

5–5 บริษัท เซลเลอร์ จำกัด ต้องการวัตถุดิบชนิดหนึ่งในปีหน้าเป็นเงิน 81,000 บาท ถ้าต้นทุนในการบริหารต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้งเท่ากับ 25 บาท และต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับ 20% บริษัทควรสั่งซื้อแต่ละครั้งเป็นจำนวนที่เผื่อสำหรับการใช้กี่เดือน ?

5–6 ต้นทุนในการจัดซื้อเหล็กแท่งของบริษัท อะแจกซ์ บาร์เบลล์ จำกัด เท่ากับ 40 บาทต่อการสั่งซื้อหนึ่งครั้ง และค่าใช้จ่ายในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับ 10% ของของคงคลังถัวเฉลี่ย ในปัจจุบันนี้ บริษัทซื้อเหล็กแท่งปีละ 20,000 บาทและทำการจัดซื้อโดยอาศัยหลักเกณฑ์ที่ดีที่สุด มีผู้เสนอให้ส่วนลด 3% ถ้าบริษัทจัดซื้อเหล็กแท่งเป็นรายงวด 3 เดือนงวดละเท่า ๆ กัน บริษัทควรจะรับข้อเสนอนี้หรือไม่ ?

5–7 บริษัทผลิตมอเตอร์แห่งหนึ่งใช้ลิ้นไอเสียปีละ 50,000 บาท ต้นทุนในการบริหารการจัดซื้อแต่ละครั้งเท่ากับ 50 บาท และค่าใช้จ่ายในการจัดให้มีของคงคลังเท่ากับ 20% ของของคงคลังถัวเฉลี่ย ในปัจจุบันนี้ บริษัทดำเนินตามนโยบายการจัดซื้อที่ดีที่สุด แต่มีผู้เสนอให้ส่วนลด 0.2% ถ้าบริษัทจัดซื้อ 5 ครั้งต่อปี บริษัทควรจะรับข้อเสนอนี้หรือไม่ ? ถ้าไม่รับข้อเสนอนี้ ข้อเสนอนี้ต่างตอบแทนซึ่งกันและกันควรจะเป็นในลักษณะใด ?

5–8 ช่วงเวลาการสั่งซื้อใหม่ถัวเฉลี่ยของบริษัท ดอบสัน จำกัด เท่ากับ 5 วัน การใช้ถัวเฉลี่ยต่อวันเท่ากับ 20 หน่วย ต่อไปนี้เป็นข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการใช้ในระหว่างงวดการสั่งซื้อใหม่

การใช้ระหว่างงวดการสั่งซื้อใหม่ในอดีต	จำนวนครั้งที่ใช้ในปริมาณนี้
70	3
80	5
90	22
100	60
110	6
120	4

จำนวนการสั่งซื้อที่ดีที่สุดเท่ากับ 5 ครั้งต่อปี

ถ้าต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือแต่ละครั้งเท่ากับ 50 บาทต่อหน่วย และค่าใช้จ่ายในการจัดให้มีของคงคลังสำหรับของที่มีเผื่อไว้เท่ากับหน่วยละ 15 บาทต่อปี บริษัทควรจะจัดให้มีของที่มีเผื่อไว้ในระดับใด ?

5–9 จากข้อมูลของบริษัท มิลเลอร์ จำกัด ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ให้คำนวณจุดสั่งซื้อใหม่

EOQ = 10 ครั้งต่อปี
การใช้ถัวเฉลี่ยต่อวัน = 4 หน่วย
งวดการสั่งซื้อใหม่ถัวเฉลี่ย = 25 วัน
ต้นทุนในการจัดให้มีของคงคลังหนึ่งหน่วย = 5 บาทต่อปี
ต้นทุนที่เกิดจากของขาดมือแต่ละครั้ง = 20 บาทต่อหน่วย

การใช้ระหว่างงวดการสั่งซื้อใหม่	ความน่าจะเป็นของการใช้ในปริมาณนี้
25	.05
50	.10
75	.15
100	.25
125	.20
150	.15
175	.10

5–10 จากข้อมูลที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ให้คำนวณจำนวนหน่วยต่อการผลิตหนึ่งครั้งที่ดีที่สุด

N =	จำนวนหน่วยต่อการผลิตหนึ่งครั้งที่ดีที่สุด		
V =	อัตราการผลิตเป็นจำนวนหน่วยต่อวัน	20	
D =	อัตราการขายต่อวัน	15	
R =	ต้นทุนโรงงานต่อหน่วย	1,000	บาท
C =	ค่าใช้จ่ายในการจัดให้มีของคงคลัง เป็นอัตราร้อยละ	10	
A =	จำนวนที่ต้องการต่อปี เป็นจำนวนหน่วย	5,000	
P =	ต้นทุนในการเริ่มงาน	25	บาท

บทที่ 6

เวคเตอร์และดีเตอร์มินันต์
(VECTORS AND DETERMINANTS)

นักศึกษาที่มีความรู้ความเข้าใจพอสมควรในพีชคณิตธรรมดาและสถิติเบื้องต้น คงไม่มีความยุ่งยากในการศึกษาเรื่องต่าง ๆ เท่าที่ได้กล่าวไปแล้วในตำราเรียนเล่มนี้ แต่สำหรับหัวข้อที่เราจะอธิบายต่อไป อาจศึกษาได้โดยไม่จำเป็นจะต้องอาศัยพื้นฐานทางคณิตศาสตร์นอกเหนือไปกว่านี้ก็ได้ แต่การปฏิบัติเช่นนั้นอาจจะต้องใช้กระบวนการที่เป็นกลไกตายตัว หรือ "การท่องจำ" เนื่องจากการปฏิบัติเช่นนี้เป็นการกระทำที่เสี่ยงต่ออันตรายมาก เราจึงไม่ปฏิบัติเช่นนั้น

แต่เราจะแนะนำเทคนิคทางคณิตศาสตร์บางอย่าง "ที่ใหม่กว่า" แทน เทคนิคทางคณิตศาสตร์เหล่านี้ จะช่วยให้นักศึกษาเรียนรู้เรื่องราวต่าง ๆ ในบทต่อ ๆ ไปเข้าใจแจ่มแจ้งและจดจำได้แม่นยำกว่า เราได้เขียนคำว่า "ใหม่กว่า" ไว้ในเครื่องหมายคำพูดเพราะตามที่จริงแล้ว เทคนิคเหล่านี้ไม่ใช่ของใหม่เลย ความจริง ลีบนิทซ์ (Leibnitz) ได้นำดีเตอร์มินันต์เข้ามาใช้แล้วตั้งแต่ศตวรรษที่ 17 ที่ว่าใหม่ในที่นี้หมายถึงการนำเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เหล่านี้เข้ามาใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นกับฝ่ายจัดการ

เรื่องต่าง ๆ ที่เราจะศึกษาในบทที่ 6 และที่ 7 ส่วนมาก แต่ไม่ใช่ทั้งหมด เป็นความรู้เบื้องต้นที่จำเป็นต้องเรียนรู้ก่อนที่จะทำความเข้าใจเรื่องต่าง ๆ ในบทที่ 8 ถึง 12 แต่อย่างไรก็ดี นักศึกษาบางคนอาจต้องการเรียนรู้ให้ไกลไปกว่าสิ่งที่มีอยู่ในตำราเล่มนี้ก็ได้ ถ้าเป็นเช่นนั้น บทที่ 6 และที่ 7 คงจะวางรากฐานที่พอเพียงสำหรับการศึกษาเพิ่มเติมในขั้นพิสดารในแขนงวิชาการวิจัยการปฏิบัติงานต่อไป

เราจะอธิบายเวคเตอร์ (vector) พีชคณิตเมตริกซ์ (matrix algebra) และดีเตอร์มินันต์ (determinant) โดยไม่อาศัยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่สับสนตามที่ใช้กันโดยทั่วไป แต่ทั้งนี้มิได้หมายความว่าการที่ไม่ได้นำสัญลักษณ์เข้ามาใช้นั้นจะทำให้การทำความเข้าใจในเรื่องต่าง ๆ ดังกล่าวลดน้อยลง ความจริงถ้าเราสามารถหลีกเลี่ยงการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ค่อนข้างจะสับสนได้ ก็เท่ากับว่าเราสามารถขจัดอุปสรรคที่สำคัญอันหนึ่งในการสอนและการเรียนวิธีเชิงปริมาณ

เทคนิคต่าง ๆ ที่จะอธิบายในบทนี้และบทที่ 7 อาจนำไปใช้ประโยชน์ในการโปรแกรมแบบเส้นตรง (linear programming) ในบทที่ 8 และ 9 เกมและกลยุทธ์ (games and strategies) ในบทที่ 10 และการวิเคราะห์แบบมาร์คอฟ (Markov Analysis) ในบทที่ 11

เวคเตอร์อย่างง่าย (Introduction to Vectors)

เวคเตอร์เป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการคำนวณหาคำเฉลยที่ดีที่สุด ให้กับปัญหาธุรกิจ ในกรณีที่มีตัวแปรผันหลายตัวเข้ามาเกี่ยวข้องอยู่ด้วย ตัวอย่างเช่น ผู้จัดการของบริษัทแห่งหนึ่งซึ่งผลิตผลิตภัณฑ์หลาย ๆ ชนิดในโรงงานเดียวกัน ผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดให้ผลตอบแทนในรูปกำไรต่อหน่วยที่แตกต่างกัน ต้องใช้จำนวนชั่วโมงแรงงานในการผลิตที่แตกต่างกัน ต้องใช้วัตถุดิบที่แตกต่างกัน และต้องใช้เครื่องจักรในการผลิตที่แตกต่างกัน การคำนวณโดยใช้คณิตศาสตร์ดั้งเดิมตามที่เราได้ศึกษามาแล้วเป็นเวลาหลายปีว่าควรจะผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดเป็นจำนวนเท่าใดจึงจะทำให้กำไรที่ได้รับอยู่ในระดับสูงสุด คงเป็นงานที่ยุ่งยากมาก เพราะตามข้อเท็จจริงแล้วเราอาจจะผลิตผลิตภัณฑ์เหล่านั้น ในจำนวนที่แตกต่างกัน และในลักษณะที่แตกต่างกันได้มากมาย

แต่ถ้าเราเริ่มด้วยการเขียนปัญหานี้ในรูปของเวคเตอร์ การหาคำเฉลยก็จะเป็นเรื่องที่ไม่ยุ่งยากเลย สมมติว่า ผู้จัดการกำลังพิจารณาปัญหานี้ทางด้านจำนวนชั่วโมงแรงงานที่มีอยู่ ให้เส้นตั้งฉากทางขวามือของรูป 6—1 แทนจำนวนชั่วโมงแรงงานที่มีอยู่ทั้งสิ้น (400 ชั่วโมง) ที่อาจนำไปใช้ในการผลิต ให้ลูกศรที่ชี้ไปทางซ้ายมือ (ลูกศรนี้เป็นเวคเตอร์อันหนึ่ง) แทนจำนวนชั่วโมงแรงงานที่ต้องใช้ในการผลิตสินค้าหนึ่งหน่วย สมมติว่าในกรณีนี้คือ เก้าอี้หนึ่งตัวซึ่งต้องใช้ 50 ชั่วโมง ถ้าเช่นนั้นผู้จัดการคนนี้ก็สามารถที่จะผลิตเก้าอี้จนกระทั่งได้ใช้ชั่วโมงแรงงานที่มีอยู่ทั้งสิ้นหมดไป กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ การผลิตเก้าอี้อาจดำเนินไปได้เรื่อย ๆ จนกระทั่งลูกศรนี้ได้เคลื่อนไปสัมผัสกับเส้นตั้งฉากที่แทนจำนวนชั่วโมงแรงงานที่มีอยู่ทั้งสิ้น ผู้จัดการคนนี้อาจจะผลิตเก้าอี้ได้ทั้งสิ้นแปดตัว

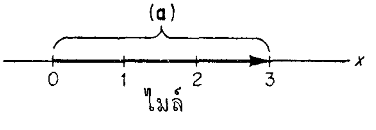
รูป 6—1 การเขียนแทนชั่วโมงแรงงานที่มีอยู่ด้วยเวคเตอร์

ในตัวอย่างดังกล่าวข้างต้น เราอาจคำนวณคำตอบโดยอาศัยเลขคณิตอย่างง่าย และไม่ต้องพูดถึงเวคเตอร์เลยก็ได้ แต่ถ้าสมมติว่าข้อจำกัดในการผลิตเก้าอี้ไม่ใช่มีเฉพาะแต่ชั่วโมงแรงงานที่มีอยู่เพียงปัจจัยเดียวเท่านั้น สมมติว่าเงินทุนที่มีอยู่ก็มีจำนวนจำกัด เนื้อที่ในโรงงาน

มีจำกัด วัตถุดิบไม่ใช่จะมีอยู่อย่างไม่จำกัดจำนวน และเครื่องจักรบางเครื่องอาจไม่ใช่มีไว้เพื่อการผลิตเก้าอี้แต่เพียงอย่างเดียวเสมอไป เมื่อเป็นเช่นนี้เราอาจจะเขียนข้อจำกัดต่าง ๆ ดังกล่าวแทนด้วยกำแพง หรือเส้นตั้งฉากเช่นเดียวกับชั่วโมงแรงงานในรูป 6—1 ถ้าสมมติต่อไปว่าโรงงานนี้อาจจะผลิตผลิตภัณฑ์หลาย ๆ ชนิด ไม่ใช่ผลิตแต่เก้าอี้อย่างเดียว ตราบใดที่เรายังไม่ดำเนินการใดที่ขัดต่อข้อจำกัดข้อหนึ่งข้อใด (กล่าวคือ ใช้ทรัพยากรเกินกว่าจำนวนที่มีอยู่) มาถึงขั้นนี้ จะเห็นได้ว่าปัญหาที่เรากำลังพิจารณาอยู่ก็ไม่ใช่ปัญหาง่าย ๆ เสียแล้ว และการคำนวณหาคำเฉลยให้กับปัญหาที่มีลักษณะเช่นนี้ เราไม่อาจที่จะอาศัยคณิตศาสตร์ดั้งเดิมได้อีกต่อไป

เราอาจจะมีลูกศร (หรือเวคเตอร์) หลายอัน และกำแพง (หรือข้อจำกัด) หลายชั้นก็ได้ เราจะต้องเคลื่อนลูกศรเหล่านี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งลูกศรเหล่านี้สัมผัสกับข้อจำกัดข้อใดข้อหนึ่งหรือหลายข้อ โดยเคลื่อนลูกศรทีละอัน แล้วจึงคำนวณว่าส่วนผสมของลูกศร (หรือเวคเตอร์) ใดจะทำกำไรให้แก่บริษัทมากที่สุด ดังนั้น การศึกษาเรื่องเวคเตอร์จึงมีความสำคัญต่อการคำนวณหาคำเฉลยให้กับปัญหาธุรกิจประเภทนี้

เวคเตอร์ คือ **เส้นตรงเส้นหนึ่งที่มีทั้งทิศทางและความยาว** โดยปกติเราแสดงเวคเตอร์โดยใช้ตัวเลขชุดหนึ่งเช่นเดียวกับจุด ๆ หนึ่งที่ปรากฏอยู่ในแผนที่ โดยมีโคออร์ดิเนตชุดหนึ่งเพื่อช่วยให้ผู้อ่านสามารถหาตำแหน่งของจุดนั้นได้ เวคเตอร์ที่แสดงไว้ในรูป 6—2 อาจแทนการเดินทางตามข้อเสนอไปตามถนน x เวคเตอร์ (a) นี้จึงเป็นเส้นตรงที่อยู่บนถนน x ซึ่งมีความยาว 3 ไมล์



รูป 6—2 การเดินทางตามข้อเสนอไปตามถนน x

ในภาษาเวคเตอร์ การเดินทางของเราอาจเขียนแทนด้วย

$$(3)$$

ซึ่งชี้ให้เห็นว่า

1. การเดินทางนี้มีความยาว 3 หน่วย (ไมล์)
2. เรากำลังเดินไปตามทิศทาง x
3. เราตั้งใจที่จะอยู่บนถนนสาย x ต่อไป

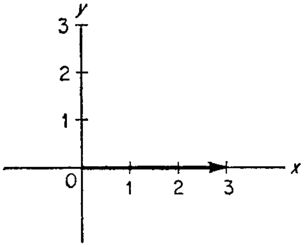
แต่แผนที่ส่วนมากมักจะประกอบด้วยถนนมากกว่าหนึ่งสาย เพื่อหลีกเลี่ยงความสับสนที่อาจเกิดขึ้นเราจะต้องวางระบบที่จะใช้ในการอธิบายเวคเตอร์ ซึ่งสามารถระบุได้อย่างแน่นอนว่าใน

ระหว่างทิศทางที่มีอยู่ทั้งหมด เราตั้งใจที่จะเดินไปในทิศทางใด ตัวอย่างเช่นในรูป 6–3 เราได้เขียนถนนอีกสายหนึ่ง (y) ไว้ในแผนที่ของเรา สมมติว่าเราตั้งใจที่จะเดินทางไปในทิศทางเดิม การเขียนแทนด้วย (3) ไม่ได้ชี้ให้เห็นอย่างชัดแจ้งว่าเราตั้งใจที่จะใช้ถนนสายใด เพราะผู้ที่เดินทางไปด้วยคนหนึ่งอาจจะคิดว่าเราตั้งใจที่จะเดินทางไปตามถนนสาย y เป็นระยะทาง 3 ไมล์ ถ้าหากเขาไม่มีสำเนาแผนที่ของเราดังที่ปรากฏในรูป 6–3

เพื่อหลีกเลี่ยงความสับสนดังกล่าว เราอาจเขียนการเดินทางตามข้อเสนอตามที่ปรากฏในรูป 6–3 ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ซึ่งชี้ให้เห็นว่าเราประสงค์ที่จะเดินทางไปตามถนน x เป็นระยะทาง 3 ไมล์ และไปตามถนน y 0 ไมล์ เมื่อเขียนแทนในรูปของเวคเตอร์ เราจะต้องอ่านโคออร์ดิเนต x ก่อนโคออร์ดิเนต y เสมอ ดังนั้นถ้าเราเพิ่มถนนเข้าไปอีกสายหนึ่งหรือทิศทางอีกทิศทางหนึ่งที่เราอาจเดินทางไปได้ เวคเตอร์ที่แสดงการเดินทางจะต้องมีโคออร์ดิเนต 2 จุดเพื่อจะได้หาตำแหน่งแหล่งที่ได้อย่างถูกต้อง



รูป 6–3 การเดินทางไปตามถนน x ในกรณีที่มีถนนที่อาจเดินทางไปได้สองสาย

อาจจะเป็นการไม่สมเหตุสมผลที่เราจะคาดว่าการเดินทาง (เวคเตอร์) ทั้งหมดจะต้องอยู่บนถนนสายใดสายหนึ่ง (x) เพียงสายเดียวเท่านั้น รูป 6–4 แสดงเวคเตอร์ (a) ซึ่งแทนการเดินทางตามข้อเสนอที่อาจกล่าวได้ว่า “ผ่านป่าไป” เวคเตอร์โคออร์ดิเนตของเวคเตอร์ (a) จะเป็น

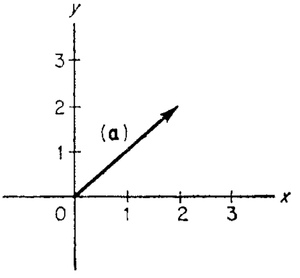
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ซึ่งชี้ให้เห็นว่า เราอาจจะกำหนดตำแหน่งของจุดปลายของเวคเตอร์(ลูกศรที่อยู่ปลายเวคเตอร์) ได้โดยเคลื่อนที่ไปในทิศทางบวกของแกน x 2 หน่วย และเคลื่อนที่ไปในทิศทางบวกของแกน y 2 หน่วย

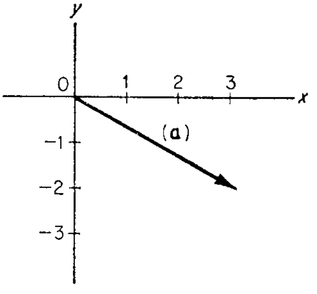
เวคเตอร์อันหนึ่งอาจจะมีโคออร์ดิเนตเป็นลบหนึ่งจุด หรือมากกว่านั้นก็ได้ ดังปรากฏในรูป 6–5 ในกรณีนี้เราอาจแสดงเวคเตอร์ (a) โดยใช้เครื่องหมายดังนี้

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ซึ่งชี้ให้เห็นว่าเราอาจจะหาจุดปลายของเวคเตอร์ได้โดยเคลื่อนที่ไปในทิศทางบวกบนแกน x 3 หน่วย และเคลื่อนที่ไปในทิศทางลบบนแกน y 2 หน่วย

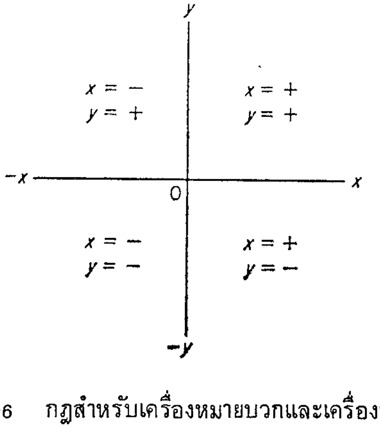


รูป 6–4 การเดินทางผ่านป่า



รูป 6–5 เวคเตอร์ที่มีโคออร์ดิเนตเป็นบวกหนึ่งจุดและลบหนึ่งจุด

ท่านคงจะจำกฎง่าย ๆ สำหรับเครื่องหมายบวก และเครื่องหมายลบตามที่แสดงในรูป 6–6 ได้



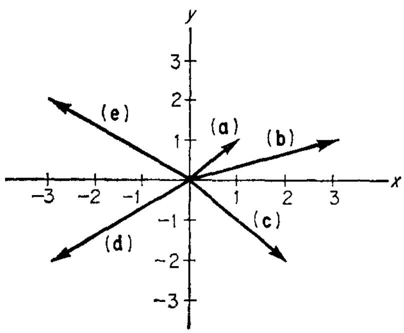
รูป 6–6 กฎสำหรับเครื่องหมายบวกและเครื่องหมายลบ

เราไม่อาจทราบความยาวของเวคเตอร์ที่ไม่ได้ตั้งอยู่บนแกนใดแกนหนึ่งได้ทันทีโดยมองจากการเขียนแทนด้วยเวคเตอร์ แต่ความยาวของเวคเตอร์อาจคำนวณได้ในทำนองเดียว

กับด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมในวิชาเรขาคณิต ตัวอย่างเช่น ในกรณีรูป 6 – 5 ความยาวของเวคเตอร์ (a) อาจคำนวณได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a})^2 &= (3^2) + (-2^2) \\
&= 9 + 4 \\
&= 13 \\
(\mathbf{a}) &= \sqrt{13} \\
&= 3.6 \qquad (6\text{—}1)
\end{aligned}
$$

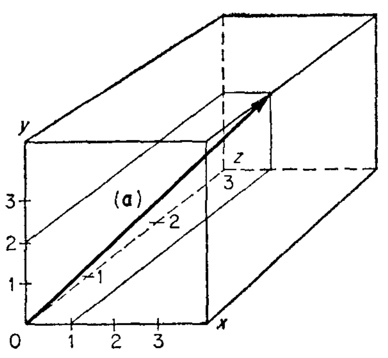
รูป 6—7 แสดงเวคเตอร์ต่าง ๆ หลายอันบนแผนที่สองมิติพร้อมทั้งการเขียนแทนสำหรับเวคเตอร์แต่ละอัน



รูป 6—7 เวคเตอร์	เขียนแทนด้วย
(a)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
(b)	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
(c)	$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
(d)	$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$
(e)	$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

รูป 6—8 แสดงให้เห็นเวคเตอร์สามมิติโดยการเพิ่มมิติที่ 3 เข้าไปอีกหนึ่งมิติ คือ z ปลายของเวคเตอร์ (a) จะอยู่ที่ทิศทาง x บวก 1 หน่วย ทิศทาง y บวก 2 หน่วย และทิศทาง z บวก 3 หน่วย เราอาจแสดงเวคเตอร์นี้โดยใช้เครื่องหมายเวคเตอร์ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



รูป 6—8 การเพิ่มมิติที่ 3 z

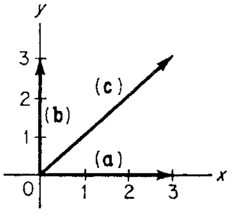
จะสังเกตได้ว่าแกน x, y และ z ในรูป 6—8 ต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และจุดใด ๆ ที่อยู่ในพื้นที่สามมิตินี้ (โดยปกติเรียกว่าอวกาศสามมิติมากกว่า) อาจเขียนแทนได้โดย โคออร์-ดิเนต 3 จุด จุดหนึ่งสำหรับมิติหนึ่ง

การบวกและการลบเวคเตอร์ (Addition and subtraction of vectors)

เวคเตอร์ที่มีจำนวนมิติเท่ากัน (เวคเตอร์ที่อยู่ในอวกาศเดียวกัน) อาจบวกเข้าด้วยกันหรือหักออกจากกันได้โดยการบวกหรือลบโคออร์ดิเนตของเวคเตอร์แต่ละอัน

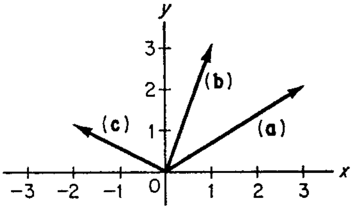
ในรูป 6—9 เราบวกเวคเตอร์ (a) และ (b) เข้าด้วยกัน ทำให้ได้เวคเตอร์ (c) ในรูป 6—10 เราหักเวคเตอร์ (a) ออกจากเวคเตอร์ (b) ทำให้ได้เวคเตอร์ (c) ในการหักเวคเตอร์ (a) ออกจากเวคเตอร์ (b) เราดำเนินการลบในลักษณะเดียวกับการลบในวิชาพีชคณิตธรรมดา กล่าวคือ

$$1 - 3 = -2$$
$$3 - 2 = 1$$



รูป 6—9 a + b = c

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

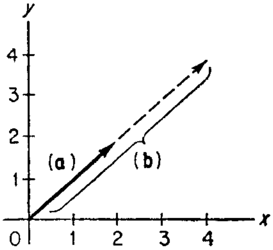


รูป 6—10 b − a = c

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

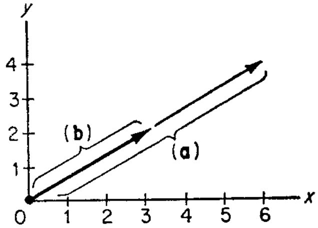
การคูณเวคเตอร์ (Vector multiplication)

เราอาจคูณเวคเตอร์อันหนึ่งด้วยตัวเลขใด ๆ ก็ได้ เพื่อทำให้เป็นผลคูณของเวคเตอร์เดิม ตัวคูณในกรณีนี้เรียกว่า สเกลาร์ (scalar) ในการคูณเวคเตอร์ด้วยสเกลาร์ เราคูณโคออร์ดิเนตแต่ละจุดของเวคเตอร์นั้น ๆ ด้วยสเกลาร์ ในรูป 6—11 เราคูณเวคเตอร์ **(a)** ด้วยสเกลาร์ตัวหนึ่ง ซึ่งในกรณีนี้คือเลข 2 เวคเตอร์ **(b)** ที่ได้ $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ เรียกว่าผลคูณสเกลาร์ของ **(a)**



รูป 6—11 $\begin{array}{c}\text{a}\\ \times 2\\ \hline \text{b}\end{array}$ $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

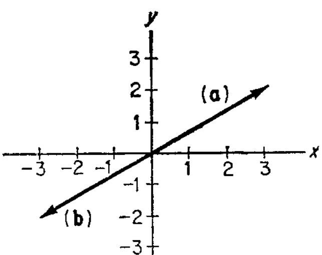
ถ้าสเกลาร์นั้นเป็นเศษส่วน เราอาจแสดงการคูณดังที่ปรากฏในรูป 6—12



รูป 6—12 $\begin{array}{c}\text{a}\\ \times 1/2\\ \hline \text{b}\end{array} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} \times 1/2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

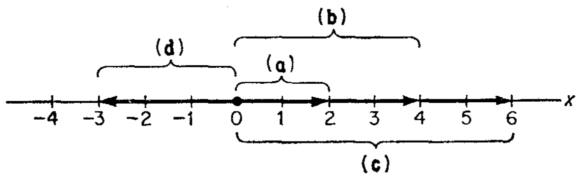
จะสังเกตได้ว่าเราคูณโคออร์ดิเนตแต่ละจุดของ
เวคเตอร์ด้วยสเกลาร์ตามลำดับ

สเกลาร์อาจเป็นตัวเลขติดลบก็ได้ ในกรณีเช่นนี้การคูณจะเป็นไปดังที่ปรากฏในรูป 6—13



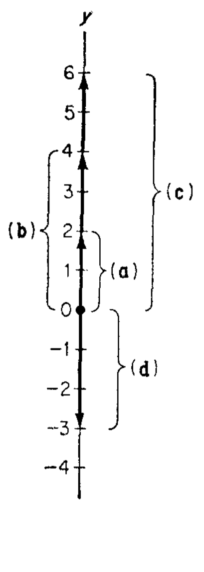
รูป 6—13 $\begin{array}{c}\times -1\\ \hline \text{b}\end{array} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \times -1 = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

เราจะกลับไปพิจารณาอวกาศมิติเดียวอีกครั้งหนึ่ง จากรูป 6–14 เราจะเห็นได้ว่าเวคเตอร์ทั้งหมดในอวกาศมิติเดียวนี้เป็นผลคูณสเกลาร์ซึ่งกันและกัน เราได้แสดงแนวความคิดอย่างเดียวกันนี้สำหรับเวคเตอร์ที่อยู่บนแกน y ไว้ในรูป 6–15



รูป 6–14 เวคเตอร์ทั้งหมดเป็นผลคูณสเกลาร์ซึ่งกันและกัน

เวคเตอร์	สเกลาร์	
b = a	× 2 = (2)	× 2 = (4)
c = a	× 3 = (2)	× 3 = (6)
a = c	× 1/3 = (6)	× 1/3 = (2)
b = c	× 2/3 = (6)	× 2/3 = (4)
d = b	× −3/4 = (4)	× −3/4 = (−3)
d = c	× −1/2 = (6)	× −1/2 = (−3)



รูป 6–15 เวคเตอร์ทั้งหมดเป็นผลคูณสเกลาร์ซึ่งกันและกัน

เวคเตอร์	สเกลาร์	
b = a	× 2 = (2)	× (2) = (4)
c = a	× 3 = (2)	× (3) = (6)
a = c	× 1/3 = (6)	× 1/3 = (2)
b = c	× 2/3 = (6)	× 2/3 = (4)
d = b	× −3/4 = (4)	× −3/4 = (−3)
d = c	× −1/2 = (6)	× −1/2 = (−3)

แนวความคิดอย่างเดียวกันนี้อาจนำไปใช้กับอวกาศสองมิติได้เช่นกัน ในรูป 6–16 เราได้เขียนเวคเตอร์ **(a)** และ **(b)** ในฐานะที่เป็นเวคเตอร์อ้างอิง (reference vector) เวคเตอร์ **(c)** หรือเวคเตอร์อื่นใดที่อยู่ในอวกาศนี้อาจกล่าวได้ว่าเป็นผลคูณสเกลาร์ของเวคเตอร์อ้างอิงทั้งสอง เวคเตอร์อ้างอิงทั้งสองนี้จึงเป็น “ฐาน” (basis) ของอวกาศ และเรียกว่าเวคเตอร์ฐาน (basis vector) ในกรณีที่เป็นอวกาศสองมิติ ฐานก็คือเวคเตอร์คู่หนึ่งซึ่งเป็นที่มาของเวคเตอร์ใด ๆ

ที่อยู่ในอวกาศนั้นโดยผ่านการใช้สเกลาร์ ในกรณีที่เป็นอวกาศสามมิติเราจะต้องมีเวคเตอร์อ้างอิงสามอัน เวคเตอร์หนึ่งสำหรับมิติหนึ่ง ในรูป 6–16 เวคเตอร์ฐานทั้งสองต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกันและต่างก็ตั้งอยู่บนแกนหนึ่ง เวคเตอร์ฐานไม่จำเป็นจะต้องตั้งฉากซึ่งกันและกันหรือจำเป็นจะต้องตั้งอยู่บนแกนทั้งสอง แต่เวคเตอร์ฐานเหล่านี้จะต้องไม่เป็นผลคูณสเกลาร์ซึ่งกันและกัน เราจะอธิบายเวคเตอร์ฐานที่ไม่ได้ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และไม่ได้ตั้งอยู่บนแกนของอวกาศทีหลัง

ในรูป 6–16 เราอาจสร้างเวคเตอร์ **(c)** จากเวคเตอร์ **(a)** และ **(b)** โดยหาสเกลาร์ที่ถูกต้องเหมาะสมมาคูณเข้ากับเวคเตอร์ฐาน ดังนี้:

เวคเตอร์ **(c)** = (สเกลาร์ตัวใดตัวหนึ่ง) (เวคเตอร์ **a**) +
(สเกลาร์ตัวใดตัวหนึ่ง) (เวคเตอร์ **b**) (6–2)

ให้ A เท่ากับสเกลาร์ที่จะนำมาคูณเข้ากับเวคเตอร์ **(a)** และ B เท่ากับสเกลาร์ที่จะนำมาคูณเข้ากับเวคเตอร์ **(b)** เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}(\mathbf{c}) &= A\,(\mathbf{a}) + B(\mathbf{b}) \\ &= A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

จากรูป 6–16 เราจะเห็นได้ว่า เวคเตอร์ **(c)** = $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ เราจึงเขียนเวคเตอร์ **(c)** ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

เมื่อนำสเกลาร์คูณเข้ากับเวคเตอร์ เราจะได้

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2A\\0A\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0B\\3B\end{pmatrix}$$

ซึ่งทำให้เป็นสมการ 2 สมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned}3 &= 2A + 0B\\ 4 &= 0A + 3B\end{aligned}$$

เมื่อแก้สมการแรก เราจะได้

$$\begin{aligned}3 &= 2A + 0\\ A &= 3/2\end{aligned}$$

เมื่อแก้สมการที่สอง เราจะได้

$$4 = 0 + 3B$$
$$B = 4/3$$

เพราะฉะนั้น 3/2 และ 4/3 เป็นสเกลาร์ A และ B ตามที่ต้องการในการสร้างเวคเตอร์ **(c)** จากเวคเตอร์ฐาน **(a)** และ **(b)** เราอาจตรวจสอบคำตอบนี้ได้โดยการแทนค่าสเกลาร์กลับเข้าไปในสมการเดิมดังนี้

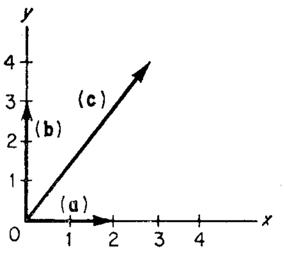
$$(c) = A(a) + B(b)$$

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 3/2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 4/3\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6/2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\12/3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$



รูป 6–16 (a) และ (b) เป็นเวคเตอร์อ้างอิงหรือเวคเตอร์ฐาน (c) เป็นผลคูณสเกลาร์ของ (a) และ (b)

ในรูป 6–16 เราจะเห็นได้ว่าเวคเตอร์ฐาน **(a)** และ **(b)** ตั้งฉากซึ่งกันและกันและตั้งอยู่บนแกน x และ y ตามลำดับ เวคเตอร์ฐานไม่จำเป็นจะต้องตั้งฉากซึ่งกันและกัน รูป 6–17 แสดงเวคเตอร์ฐาน 2 อันคือ **(a)** และ **(b)** ซึ่งไม่ได้ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และไม่ได้ตั้งอยู่บนแกน x และ y เรายังคงสร้างเวคเตอร์ **(c)** จากเวคเตอร์ฐานในลักษณะอย่างเดียวกับที่เราได้ทำไปแล้วข้างต้นได้ดังนี้

เวคเตอร์ **(c)** = (สเกลาร์ตัวใดตัวหนึ่ง) (เวคเตอร์ **a**) +
(สเกลาร์ตัวใดตัวหนึ่ง) (เวคเตอร์ **b**)

ให้ A เท่ากับสเกลาร์ที่จะนำมาคูณเข้ากับเวคเตอร์ **(a)** และ B เท่ากับสเกลาร์ที่จะนำมาคูณเข้ากับเวคเตอร์ **(b)** อีกครั้งหนึ่ง เพราะฉะนั้น

$$(c) = A(a) + B(b)$$

$$= A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

จากรูป 6–17 เราทราบว่าเวคเตอร์ (c) = $\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ เราจึงเขียน

$$\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

เมื่อนำสเกลาร์คูณเข้ากับเวคเตอร์ เราจะได้

$$\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5A\\2A\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2B\\5B\end{pmatrix}$$

ซึ่งทำให้เป็นสมการ 2 สมการได้ ดังนี้

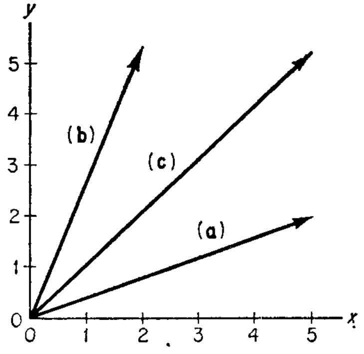
$$5 = 5A + 2B$$
$$5 = 2A + 5B$$

เราอาจแก้สมการทั้งสองพร้อมกัน โดยคูณสมการแรกด้วย 2 และคูณสมการที่สองด้วย 5 และนำมาหักออกจากกัน ดังนี้ :

$$\begin{array}{rcrcr} & 10 & = & 10A & + & 4B \\ (-) & 25 & = & 10A & + & 25B \\ \hline - & 15 & = & 0 & - & 21B \\ & B & = & \multicolumn{3}{l}{15/21 \text{ หรือ } 5/7} \end{array}$$

เมื่อนำ 5/7 แทนค่า B ในสมการแรก เราจะได้

$$10 = 10A + 4(5/7)$$
$$10 = 10A + 20/7$$
$$70/7 = 10A + 20/7$$
$$10A = 50/7$$
$$A = 5/7$$



รูป 6–17 เวคเตอร์ฐาน (a) และ (b) ไม่ได้ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และไม่ได้ตั้งอยู่บนแกน x และ y

$$a = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

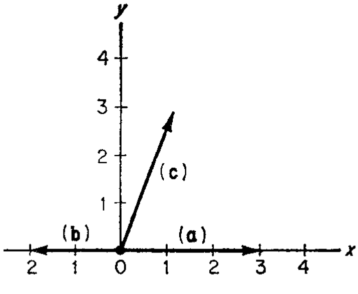
$$b = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

ดังนั้น 5/7 และ 5/7 เป็นสเกลาร์ A และ B ตามที่ต้องการในการสร้างเวคเตอร์ (c) จากเวคเตอร์ฐาน (a) และ (b) เราอาจตรวจสอบคำตอบนี้ได้โดยการแทนค่าสเกลาร์กลับเข้าไปในสมการเดิม ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(c) &= A(a) + B(b) \\
\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} &= 5/7 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 5/7 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 25/7 \\ 10/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10/7 \\ 25/7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 35/7 \\ 35/7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ในการศึกษาเรื่องเวคเตอร์และสเกลาร์นี้ เราจะต้องอธิบายแนวความคิดเพิ่มเติมอีกแนวความคิดหนึ่ง กล่าวคือ ความคิดเกี่ยวกับความเป็นอิสระ เราได้แสดงให้เห็นแล้วว่าเวคเตอร์ใด ๆ ในอวกาศหนึ่งมิติ อาจจะเป็นผลคูณสเกลาร์ของเวคเตอร์ฐานในอวกาศหนึ่งมิตินั้นได้อย่างไรแล้ว



รูป 6–18 เวคเตอร์ (a) และ (b) พึ่งพิงซึ่งกันและกัน กล่าวคือ เวคเตอร์ทั้งสองไม่ใช่เวคเตอร์ฐาน แต่เป็นผลคูณสเกลาร์ซึ่งกันและกัน

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

รูป 6–18 แสดงให้เห็นอวกาศสองมิติ ในรูปนี้มีเวคเตอร์ 2 อันคือ (a) และ (b) และเวคเตอร์ (c) อีกอันหนึ่ง เราไม่สามารถที่จะหาสเกลาร์ใด ๆ ที่จะใช้สร้างเวคเตอร์ (c) จากเวคเตอร์ (a) และ (b) เราอาจพิสูจน์ข้อเท็จจริงนี้ได้โดยการให้เหตุผลดังนี้ :

1. เวคเตอร์ (c) มีโคออร์ดิเนตอยู่ทางทิศทาง y 3 หน่วย
2. เวคเตอร์ (a) และ (b) ต่างก็มีโคออร์ดิเนต y อยู่ที่ 0
3. ไม่มีสเกลาร์ใดที่อาจนำมาคูณเข้ากับ 0 แล้วได้คำตอบเท่ากับ 3 ตามที่ต้องการ
4. เพราะฉะนั้นเราไม่อาจสร้างเวคเตอร์ (c) จากเวคเตอร์ (a) และ (b)

เหตุที่เราไม่อาจสร้างเวคเตอร์ (c) จากเวคเตอร์ฐาน (a) และ (b) เพราะเวคเตอร์ (a) และ (b) เป็นผลคูณสเกลาร์ซึ่งกันและกัน ดังนั้นจึงเป็นฐานไม่ได้ ซึ่งแสดงให้เห็นได้ดังนี้

(เวคเตอร์ a) (สเกลาร์ตัวใดตัวหนึ่ง) = (เวคเตอร์ b)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} (-2/3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6-3)$$

ในภาษาคณิตศาสตร์เราอาจกล่าวได้ว่า เวคเตอร์สองอันซึ่งเป็นผลคูณสเกลาร์ซึ่งกันและกันเป็นเวคเตอร์พึ่งพิง และเวคเตอร์พึ่งพิงเหล่านี้จะเป็นเวคเตอร์ฐานไม่ได้

เพื่อเป็นหลักประกันว่า เวคเตอร์ฐานที่ใช้มีความเป็นอิสระถูกต้อง เราเพียงแต่จะต้องแสดงให้เห็นว่าเวคเตอร์ฐานไม่ใช่ผลคูณสเกลาร์ซึ่งกันและกัน กล่าวคือ เราไม่อาจสร้างเวคเตอร์หนึ่งจากเวคเตอร์อีกอันหนึ่งได้

ต่อไปเป็นตัวอย่างเวคเตอร์ต่าง ๆ สำหรับเวคเตอร์พึ่งพิง เราได้แสดงสเกลาร์ที่อาจนำไปสร้างเวคเตอร์อันหนึ่งจากเวคเตอร์อีกอันหนึ่ง

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	; $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{2}{3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	พึ่งพิง
		ไม่มีสเกลาร์ใดที่จะสร้าง	
$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	; $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ จาก $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	อิสระ
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	; $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times 2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	พึ่งพิง

เท่าที่ได้กล่าวมาแล้วเป็นการอธิบายสั้น ๆ เกี่ยวกับความรู้เบื้องต้นในเรื่องเวคเตอร์และสเกลาร์ ในบทต่อ ๆ ไปเราจะเห็นได้ว่า ถ้าเราสามารถหาเวคเตอร์ต่าง ๆ ที่อยู่ในอวกาศหนึ่ง ๆ ในฐานะที่เป็นผลคูณสเกลาร์ของเวคเตอร์ฐาน และสามารถเคลื่อนเวคเตอร์ไปในอวกาศหนึ่ง ๆ โดยการคูณแล้วจะมีส่วนช่วยในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ของฝ่ายจัดการซึ่งแต่เดิมเป็นปัญหาที่ยุ่งยากได้อย่างไร

ดีเตอร์มินันต์ (Determinants)

ท่านคงจำได้ว่า ในขณะที่ท่านเรียนวิชาพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษา การแก้สมการหลายชั้นดังตัวอย่างข้างล่างนี้เป็นงานที่ต้องสิ้นเปลืองเวลามาก

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 19 \\ x - 3y - 6z &= -23 \\ 5x + y - 7z &= -11 \end{aligned}$$

วิธีการโดยทั่วไปในการแก้สมการหลายชั้นตามที่ท่านได้ศึกษาไปแล้วนั้น ได้แก่การหาค่าของตัวแปรผันตัวหนึ่งตัวใดโดยอาศัยตัวแปรผันอื่น ๆ ก่อน (ในกรณีนี้คือตัวแปรผันอื่น ๆ อีก 2 ตัว) แล้วจึงแทนค่ากลับเข้าไปยังสมการใดสมการหนึ่งของสมการชุดนั้นหลาย ๆ ครั้งเพื่อหาคำเฉลยตามที่ต้องการ แต่ยังมีวิธีที่มีประสิทธิภาพกว่าในการแก้ปัญหาชนิดนี้และที่คล้ายคลึงกัน เนื่องจากดีเตอร์มินันต์เป็นเครื่องมือที่มีคุณค่าต่อการวิเคราะห์ของเราต่อไป เพราะฉะนั้นเราจะให้เวลาแก่การศึกษาเรื่องนี้ตามสมควร

ดีเตอร์มินันต์คือตัวเลขหลาย ๆ ตัว ที่ถูกนำมาเรียงกันเป็นแถวนอนและแถวตั้ง และมีค่าทางตัวเลข (numerical value) ค่าหนึ่ง เราอาจคำนวณหาค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์ได้ ดีเตอร์มินันต์มีประโยชน์มากโดยเฉพาะในการแก้สมการหลายชั้น ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างดีเตอร์มินันต์ซึ่งมีแถวนอน 2 แถวและแถวตั้ง 2 แถว

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \xrightarrow{\text{แถวนอน}} \qquad \text{แถวตั้ง}\downarrow \tag{6—4}$$

ดีเตอร์มินันต์นี้เรียกว่า ดีเตอร์มินันต์ขนาด 2×2 เมื่อพูดถึงขนาดของดีเตอร์มินันต์ เราจะต้องนำด้วยจำนวนแถวนอนและตามด้วยจำนวนแถวตั้งเสมอ

สมการ (6—5) แสดงดีเตอร์มินันต์ที่มีขนาดต่าง ๆ กัน โดยระบุขนาดไว้ข้างดีเตอร์มินันต์นั้น ๆ เนื่องจากเราจะใช้ประโยชน์เฉพาะ ดีเตอร์มินันต์จัตุรัส (ดีเตอร์มินันต์ที่มีจำนวนแถวนอนเท่ากับจำนวนแถวตั้ง) เท่านั้น เพราะฉะนั้น เราจะจำกัดคำอธิบายของเราอยู่ภายในขอบข่ายของดีเตอร์มินันต์ชนิดนี้เท่านั้น

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad 2 \times 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad 3 \times 3 \tag{6—5}$$

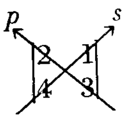
$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad 4 \times 4$$

ตำแหน่งของค่าแต่ละค่าภายในดีเตอร์มินันต์ อาจแสดงได้โดยระบุแถวนอนและแถวตั้ง (ตามลำดับดังกล่าว) ที่ค่านั้น ๆ ปรากฏอยู่ ในสมการ (6—6) เราได้แสดงตำแหน่งของค่าแต่ละค่าของดีเตอร์มินันต์โดยอาศัยโคออร์ดิเนตแถวนอนและแถวตั้ง

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 9 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} 1 &= \text{ค่า } 1,\ 1 \\ 4 &= \text{ค่า } 2,\ 1 \\ 7 &= \text{ค่า } 3,\ 1 \\ 3 &= \text{ค่า } 1,\ 2 \\ 6 &= \text{ค่า } 2,\ 2 \\ 5 &= \text{ค่า } 3,\ 2 \\ -2 &= \text{ค่า } 1,\ 3 \\ 9 &= \text{ค่า } 2,\ 3 \\ 0 &= \text{ค่า } 3,\ 3 \end{aligned} \qquad (6\text{—}6)$$

เส้นทแยงมุมของดีเตอร์มินันต์ (The diagonals of a determinant)

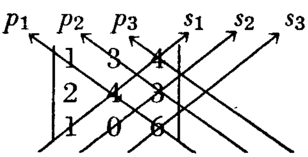
ดีเตอร์มินันต์ขนาด 2×2 มีเส้นทแยงมุมปฐมภูมิ (primary diagonal) เส้นหนึ่ง และเส้นทแยงมุมทุติยภูมิ (secondary diagonal) อีกเส้นหนึ่ง ดังที่แสดงไว้ในสมการ (6—7)



p = เส้นทแยงมุมปฐมภูมิ

s = เส้นทแยงมุมทุติยภูมิ (6—7)

ดีเตอร์มินันต์ที่มีขนาดใหญ่กว่า 2×2 จะมีเส้นทแยงมุมปฐมภูมิหลายเส้นและเส้นทแยงมุมทุติยภูมิหลายเส้น สมการ (6—8) แสดงเส้นทแยงมุมของดีเตอร์มินันต์ขนาด 3×3



(6—8)

การใช้เส้นทแยงมุมในการหาค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์

(Use of diagonals to find the numerical value of a determinant)

ค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์ขนาด 2 × 2 อาจคำนวณได้โดยคูณค่าที่อยู่บนเส้นทแยงมุมปฐมภูมิและหักด้วยผลคูณของค่าที่อยู่บนเส้นทแยงมุมทุติยภูมิ สมการ (6–9) แสดงการคำนวณค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์ขนาด 2 × 2

$$\begin{array}{ccc} p & & s \\ & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{ค่า} &= (2)(3) - (1)(2) \\ &= 6 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

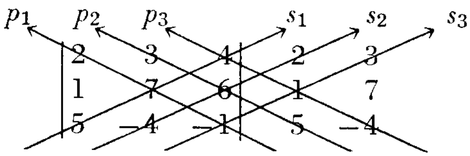
$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ค่า} &= (3)(2) - (-6)(-4) \\ &= 6 - 24 \\ &= -18 \end{aligned} \tag{6–9}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ค่า} &= (-3)(-6) - (7)(-1) \\ &= 18 - (-7) \\ &= 25 \end{aligned}$$

เราอาจดัดแปลงวิธีการที่ใช้ในการคำนวณค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์ขนาด 2 × 2 และนำไปใช้กับดีเตอร์มินันต์ขนาด 3 × 3 ได้ ถ้าพิจารณาจากสมการ (6–8) เราจะเห็นได้ว่าเส้นที่สองและเส้นที่สามของเส้นทแยงมุมปฐมภูมิ และเส้นทแยงมุมทุติยภูมิไม่ได้ตัดผ่านค่าต่าง ๆ ทั้งสามค่า แต่เราอาจแก้ไขได้โดยเขียนแถวตั้งสองแถวแรกของดีเตอร์มินันต์ซ้ำอีกครั้งหนึ่ง สมการที่ (6–10) แสดงวิธีการดังกล่าวและผลการคำนวณที่ได้



$$
\text{ค่า} = (p_1 + p_2 + p_3) - (s_1 + s_2 + s_3)
$$

$$
= \Big[\overbrace{(-1)\,(7)\,(2)}^{p1} + \overbrace{(5)\,(6)\,(3)}^{p2} + \overbrace{(-4)\,(1)\,(4)}^{p3}\Big]
$$

$$
-\Big[\overbrace{(5)\,(7)\,(4)}^{s_1} + \overbrace{(-4)\,(6)\,(2)}^{s_2} + \overbrace{(-1)\,(1)\,(3)}^{s_3}\Big]
$$

$$
= (-14 + 90 - 16) - (140 - 48 - 3)
$$

$$
= 60 - 89
$$

$$
= -29 = \text{ค่าของดีเตอร์มินันต์} \qquad (6-10)
$$

การหาค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์ตามวิธีนี้ แม้ว่าจะใช้ได้กับดีเตอร์มินันต์ขนาด 3 × 3 แต่ก็เป็นวิธีการที่ไม่สะดวก ดังนั้นจึงควรจำกัดการใช้วิธีนี้เฉพาะกับดีเตอร์มินันต์ที่มีขนาด 2 × 2 ในการหาค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์ไม่ว่าขนาดใด เรามีวิธีที่ดีกว่าที่เราควรจะได้นำไปใช้กับดีเตอร์มินันต์ขนาด 3 × 3 หรือที่ใหญ่กว่า วิธีการนี้เรียกว่าการขยายดีเตอร์มินันต์

การขยายดีเตอร์มินันต์เพื่อหาค่าทางตัวเลข

(Expanding a determinant to find its numerical value)

เราอาจคำนวณค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์จัตุรัสใด ๆ ได้ โดยขยายดีเตอร์มินันต์นั้น ๆ โดยแถวนอนใดแถวนอนหนึ่งหรือแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่ง การขยายดีเตอร์มินันต์โดยแถวนอน หมายถึงการเลือกแถวนอนใดแถวนอนหนึ่ง แล้วตัดแถวตั้งแต่ละแถวที่ตัดกับแถวนอนนั้นออกไปตามลำดับ ในทางกลับกัน การขยายโดยแถวตั้งหมายถึงการเลือกแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่ง แล้วตัดแถวนอนแต่ละแถวที่ตัดกับแถวตั้งนั้นออกไปตามลำดับ

เครื่องหมายพีชคณิตของการขยายแต่ละขั้น ขึ้นอยู่กับว่าเราตัดแถวนอนและแถวตั้งใดออกไป ถ้าตัวเลขของแถวนอนและแถวตั้งที่ถูกตัดออกไปรวมกันเข้าเป็นเลขคู่ (เช่น แถวนอน 1 + แถวตั้ง 1 = 2) เครื่องหมายพีชคณิตของการขยายขั้นนั้นจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง

แต่ถ้าตัวเลขของแถวนอนและแถวตั้งที่ถูกตัดออกไปรวมกันเข้าเป็นเลขคี่ (เช่น แถวนอน 1+ แถวตั้ง 2 = 3) เครื่องหมายพีชคณิตของการขยายขั้นนั้นจะถูกเปลี่ยนแปลงไป

สมการ (6–11) ข้างล่างนี้แสดงขั้นต่าง ๆ ในการขยายดีเทอร์มินันต์ขนาด 2 × 2 เพื่อหาค่าทางตัวเลขของดีเทอร์มินันต์ แม้ว่าวิธีการขยายดีเทอร์มินันต์จะมีประโยชน์ต่อดีเทอร์มินันต์ที่มีขนาด 3 × 3 หรือที่ใหญ่กว่าก็ตาม เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบาย เราจึงเริ่มด้วยดีเทอร์มินันต์ที่มีขนาดเล็กกว่า ในสมการ (6–11) เราได้เขียนวงกลมล้อมรอบจุดตัดระหว่างแถวนอนและแถวตั้งที่ถูกตัดออกไป เราได้ขยายดีเทอร์มินันต์นี้โดยแถวนอนที่หนึ่ง

$$\text{ดีเทอร์มินันต์เดิม} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{แถวนอนที่ 1} \\ \text{แถวนอนที่ 2} \end{array}$$

ขั้นที่ 1	$\begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	เนื่องจากว่าเราจะขยายดีเทอร์มินันต์นี้โดยแถวนอนที่ 1 เราจึงลากเส้นผ่านแถวนอนที่ 1
ขั้นที่ 2	$\begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{3} & 4 \end{vmatrix}$	แถวตั้งแถวแรกที่ตัดกับแถวนอนที่ 1 คือแถวตั้ง 1 เราจึงลากเส้นผ่านแถวตั้งนี้
ขั้นที่ 3	$4 \times 2 = 8$	เราคูณค่าที่ไม่ได้ถูกตัดออกคือ 4 ด้วยค่าที่มีวงกลมล้อมรอบคือ 2
ขั้นที่ 4	1 + 1 = 2	ต่อไปเราจะพิจารณถึงเครื่องหมายพีชคณิตของขั้นที่ 3 โดยบวกตัวเลขของแถวนอน และแถวตั้งที่ถูกตัดออกไปเข้าด้วยกัน (แถวนอน 1 และแถวตั้ง 1)
ขั้นที่ 5	+ 8	ผลรวมที่ได้เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้นจึงไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย ค่าของส่วนแรกของการขยายของเราจึงเท่ากับ +8
ขั้นที่ 6	$\begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} \\ 3 & \cancel{4} \end{vmatrix}$	แถวตั้งแถวที่สองที่ตัดกับแนวนอนที่ 1 คือแถวตั้ง 2 เราจึงลากเส้นผ่านแถวตั้งนี้
ขั้นที่ 7	$3 \times 1 = 3$	เราคูณค่าที่ไม่ได้ถูกตัดออกคือ 3 ด้วยค่าที่มีวงกลมล้อมรอบคือ 1
ขั้นที่ 8	1 + 2 = 3	ต่อไปเราจะพิจารณาถึงเครื่องหมายพีชคณิตของขั้นที่ 7 โดยบวกตัวเลขของแถวนอน และแถวตั้งที่ถูกตัดออกไปเข้าด้วยกัน (แถวนอน 1 และแถวตั้ง 2)

ขั้นที่ 9	-3	ผลรวมที่ได้เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น จึงต้องเปลี่ยนเครื่องหมายของขั้นที่ 7 ค่าของส่วนที่สองของการขยายของเราจึงเท่ากับ -3
ขั้นที่ 10	$8 - 3 = 5$	นำค่าของส่วนแรกของการขยาย มาบวกเข้ากับค่าของส่วนที่สองของการขยาย จะได้ค่าของดีเตอร์มินันต์ซึ่งเท่ากับ $+5$

(6–11)

เราอาจพิสูจน์ค่าที่คำนวณได้นี้ โดยวิธีเส้นทแยงมุมตามที่ได้อธิบายไว้แล้วในตอนก่อนดังนี้

เส้นทแยงมุมปฐมภูมิ	–	เส้นทแยงมุมทุติยภูมิ	=	คำตอบ
(4×2)	–	(3×1)	=	คำตอบ
8	–	3	=	5

สมการ (6–12) แสดงการขยายดีเตอร์มินันต์ที่มีขนาด 3×3 เราเลือกขยายดีเตอร์มินันต์นี้โดยแถวตั้งที่ 3 ตามใจชอบ จะสังเกตได้ว่าสำหรับดีเตอร์มินันต์ขนาด 3×3 เมื่อตัดแถวนอนแถวหนึ่งและแถวตั้งแถวหนึ่งออกไปแล้ว จะเหลือเป็นดีเตอร์มินันต์ขนาด 2×2 ค่าของดีเตอร์มินันต์ขนาด 2×2 นี้จะต้องคูณด้วยค่าที่มีวงกลมล้อมรอบ วิธีการที่ใช้ในการพิจารณาเครื่องหมายพีชคณิต ยังคงเหมือนกับที่ได้กล่าวไปแล้ว

$$\begin{array}{cccccc} & \text{แถวตั้ง 1} & \text{แถวตั้ง 2} & \text{แถวตั้ง 3} & & \\ \text{ดีเตอร์มินันต์เดิม} & \left| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ -1 \end{array} \right. & \begin{array}{c} 4 \\ 0 \\ 5 \end{array} & \left. \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 6 \end{array} \right| & \begin{array}{l} \text{แถวนอน 1} \\ \text{แถวนอน 2} \\ \text{แถวนอน 3} \end{array} \end{array}$$

ขั้น a

$$\begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{1} \\ 2 & 0 & \cancel{3} \\ -1 & 5 & \cancel{6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \times 1 = 10 \times 1 = 10$$

แถวนอน 1 + แถวตั้ง 3 = เลขคู่
เครื่องหมายไม่เปลี่ยน

ขั้น b
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \times 3 = 19 \times 3$$
$$= -57$$

แถวนอน 2 + แถวตั้ง 3 = เลขคี่
เครื่องหมายเปลี่ยน

ขั้น c
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \times 6 = -8 \times 6$$
$$= -48$$

แถวนอน 3 + แถวตั้ง 3 = เลขคู่
เครื่องหมายไม่เปลี่ยน

ผลรวมของขั้น a, b, c $=$ 10—57—48

$=$ —95 $=$ ค่าของดีเตอร์มินันต์ (6—12)

ในการขยายดีเตอร์มินันต์ขนาด 4×4 การตัดแถวนอนแถวหนึ่งและแถวตั้งแถวหนึ่งออกไปจะทำให้ดีเตอร์มินันต์ที่เหลือมีขนาด 3×3 และจะต้องนำไปคูณกับค่าที่มีวงกลมล้อมรอบของการขยายแต่ละขั้น เนื่องจากค่าของดีเตอร์มินันต์ขนาด 3×3 จะต้องมีการคำนวณมากมายด้วยกัน เพราะฉะนั้นเราจะเข้าใจทันทีว่า การคำนวณค่าของดีเตอร์มินันต์ขนาด 4×4 และที่ใหญ่กว่านั้นจะมีความซับซ้อนยุ่งยากเพียงใด

การใช้ดีเตอร์มินันต์ในการแก้สมการหลายชั้น

(Use of determinants to solve simultaneous equations)

ต่อไปนี้เป็นสมการหลายชั้นชุดหนึ่ง

$$\begin{aligned} 7X + 6Y + 3Z &= 19 \\ 3X + 2Y - 1Z &= 7 \\ 1X + 4Y + 2Z &= -2 \end{aligned} \qquad (6\text{—}13)$$

เราอาจแก้สมการชุดนี้ได้ไม่ยากนักโดยอาศัยดีเตอร์มินันต์ ค่าของตัวแปรผันที่ไม่ทราบค่าแต่ละตัว คือ X, Y และ Z อาจหาได้โดยคำนวณจากดีเตอร์มินันต์ 2 ตัวชุดหนึ่งชุดใดที่เขียนออกมาในรูปเศษส่วน ในการหาค่าของตัวแปรผันแต่ละตัว (X, Y และ Z) ดีเตอร์มินันต์ที่เป็นตัวส่วนของเศษส่วนนั้น ๆ จะคงเหมือนเดิม แต่ดีเตอร์มินันต์ที่เป็นตัวเศษจะเปลี่ยนไปตามตัวแปรผันแต่ละตัว

ตัวอย่าง เช่น สมการ (6—14) แสดงให้เห็นดีเตอร์มินันต์ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าของ X

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}} \qquad \begin{matrix} \text{ตัวเศษ} \\ \\ \text{ตัวส่วน} \end{matrix} \tag{6—14}$$

ลองพิจารณาดีเตอร์มินันต์ที่เป็นตัวส่วนของเศษส่วนนี้ก่อน (และเป็นตัวส่วนของเศษส่วนของตัวแปรผันทุกตัว เนื่องจากว่าดีเตอร์มินันต์ตัวนี้จะไม่เปลี่ยนแปลงเลย) เราจะเห็นได้ว่าดีเตอร์มินันต์ตัวนี้ก็คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันที่ไม่ทราบค่า 3 ตัวที่ถูกจัดเรียงในรูปเดียวกับที่ปรากฏในสมการเดิมนั่นเอง แนวความคิดนี้อธิบายอยู่ในสมการ (6—15)

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} X \\ X \\ X \end{matrix} \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} Y \\ Y \\ Y \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} Z \\ Z \\ Z \end{matrix} \tag{6—15}$$

ต่อไปเราจะหันความสนใจของเราไปที่ดีเตอร์มินันต์ที่เป็นตัวเศษสำหรับเศษส่วนของ X ที่ไม่ทราบค่า เราจะเห็นได้จากสมการ (6—16) ว่าเหมือนกับดีเตอร์มินันต์ในสมการ (6—15) ยกเว้นแต่ว่าค่าต่าง ๆ ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับในสมการเดิม ได้เข้ามาแทนที่แถวตั้งสัมประสิทธิ์ของ X ที่ไม่ทราบค่า

$$\begin{vmatrix} 19 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{ตัวเศษของเศษส่วน :} \\ \text{สำหรับ X ที่ไม่ทราบค่า} \end{matrix} \tag{6—16}$$

ในทำนองที่คล้ายคลึงกัน เราอาจจะสร้างดีเตอร์มินันต์ สำหรับตัวเศษของเศษส่วนสำหรับตัวแปรผัน Y โดยนำดีเตอร์มินันต์จากสมการ (6—15) แล้วตัดแถวตั้งสัมประสิทธิ์ของ Y ที่ไม่ทราบค่าออก และแทนที่โดยค่าต่าง ๆ ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับในสมการเดิม สมการ (6—17) แสดงให้เห็นขบวนการดังกล่าว ดังนี้

$$\begin{vmatrix} 7 & 19 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{สำหรับ Y ที่ไม่ทราบค่า} \tag{6—17}$$

ในทำนองเดียวกัน ดีเตอร์มินันต์สำหรับตัวเศษของเศษส่วนสำหรับ Z ที่ไม่ทราบค่าปรากฏในสมการ (6–18)

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 19 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{สำหรับ Z ที่ไม่ทราบค่า} \qquad (6\text{–}18)$$

สมการ (6–19) แสดงการแก้สมการชุดเดิมโดยอาศัยดีเตอร์มินันต์

$$\begin{aligned} 7X + 6Y + 3Z &= 19 \\ 3X + 2Y - 1Z &= 7 \\ 1X + 4Y + 2Z &= -2 \end{aligned} \quad \text{เขียนสมการเดิมซ้ำอีกครั้งหนึ่ง}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{176}{44} = 4$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 19 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-88}{44} = -2$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 6 & 19 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{44}{44} = 1$$

ค่าของตัวเศษและตัวส่วนอาจได้มาโดยวิธีตามที่ได้อธิบายไว้ในสมการ (6–10) หรือโดยการขยายดีเตอร์มินันต์แต่ละตัว

(6–19)

เราอาจพิสูจน์ความถูกต้องของการคำนวณข้างต้นนี้ได้ โดยทดสอบค่าของ X, Y และ Z ในสมการเดิม

ตรรกวิทยาทางคณิตศาสตร์ของดีเตอร์มินันต์

(Mathematical logic of determinants)

หลังจากที่ได้ใช้ดีเตอร์มินันต์ในการแก้สมการหลายชั้นแล้ว ต่อไปเราจะอธิบายเกี่ยวกับตรรกวิทยาที่อยู่เบื้องหลังเครื่องมือที่มีประโยชน์เหล่านี้ เราอาจเริ่มจากสมการ 2 สมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 &= 6 \\ 8X_1 + 7X_2 &= 15 \end{aligned} \qquad (6\text{–}20)$$

เราอาจเขียนสมการทั้งสองนี้ใหม่ โดยตัดตัวเลขออกไปและใช้ตัวอักษรแทนค่า 2, 4, 6, 8, 7 และ 15 ดังนี้

$a = 2$

$b = 4$ $\qquad aX_1 + bX_2 = K$ $\qquad (6\text{–}21)$

$K = 6$

$c = 8$

$d = 7$ $\qquad cX_1 + dX_2 = L$ $\qquad (6\text{–}22)$

$L = 15$

จากสมการ (6–21) เราอาจกล่าวได้ว่า

$$aX_1 = K - bX_2$$

หรือ $$X_1 = \frac{K - bX_2}{a} \qquad (6\text{–}23)$$

และจากสมการ (6–22) เราอาจกล่าวได้ว่า

$$dX_2 = L - cX_1$$

หรือ $$X_2 = \frac{L - cX_1}{d} \qquad (6\text{–}24)$$

ต่อไป ถ้า $X_1 = \dfrac{K - bX_2}{a}$

เพราะฉะนั้น $X_1 = \dfrac{K - b[(L - cX_1)/d]}{a}$

คูณสมการนี้ด้วย a ทั้งสองข้าง จะได้

$$aX_1 = K - b\left(\frac{L - cX_1}{d}\right)$$

เมื่อคูณทั้งสองข้างด้วย d เราจะได้

$$adX_1 = dK - b\ (L - cX_1)$$

หรือ

$$adX_1 = dK - bL + bcX_1$$

ต่อไป รวบรวมค่าที่มี X_1 มาไว้ทางซ้ายมือ :

$$adX_1 - bcX_1 = dK - bL$$

หรือ

$$X_1\ (ad - bc) = dK - bL$$

หรือ $$X_1 = \frac{dK - bL}{ad - bc} \qquad (6-25)$$

ความจริงนี่ก็คือ รูปของดีเตอร์มินันต์ที่ใช้ในการหาค่าของ X_1 นั่นเอง

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} K & b \\ L & d \end{vmatrix} \quad (dK - bL)}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (ad - bc)} \qquad (6-26)$$

ต่อไป สำหรับ X_2 จากสมการ (6–24) เราทราบแล้วว่า

$$X_2 = \frac{L - cX_1}{d} \qquad (6-24)$$

หรือ $$X_2 = \frac{L - c\,[\,(K - bX_2)\ /a]}{d}$$

คูณทั้งสองด้วย d :

$$dX_2 = L - c\left(\frac{K - bX_2}{a}\right)$$

ต่อไปคูณทั้งสองข้างด้วย a :

$$adX_2 = aL - c(K - bX_2)$$

เมื่อคูณเสร็จเรียบร้อยแล้ว เราจะได้

$$adX_2 = aL - cK + cbX_2$$

ต่อไปรวบรวมค่าที่มี X_2 มาไว้ทางซ้ายมือ :

$$adX_2 - cbX_2 = aL - cK$$

หรือ $$X_2\ (ad - cb) = aL - cK$$

หรือ $$X_2 = \frac{aL - cK}{ad - cb} \qquad (6-27)$$

ความจริงนี้ก็คือ รูปของดีเตอร์มินันต์ที่ใช้ในการหาค่าของ X_2 นั่นเอง

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & K \\ c & L \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \frac{(aL - cK)}{(ad - cb)} \qquad (6\text{–}28)$$

โดยอาศัยพีชคณิตที่ยุ่งยากและสับสนกว่านี้ เราอาจแสดงให้เห็นได้ว่าดีเตอร์มินันต์ที่ใช้ในการแก้สมการหลายชั้นที่มีตัวที่ไม่ทราบค่า 3 ตัว [เช่นสมการต่าง ๆ ในสมการ (6–19)] คำนวณมาได้อย่างไร แต่ทางด้านตรรกวิทยายังคงเหมือนกับที่เราได้อธิบายให้เห็นแล้วข้างต้น เพราะฉะนั้น เราจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดที่ไม่จำเป็นเหล่านี้

แบบฝึกหัด

6–1 จงบวกเวคเตอร์ต่อไปนี้

ก. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ ข. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$

6–2 จงลบเวคเตอร์ต่อไปนี้

ก. $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A \\ -B \end{pmatrix} =$ ข. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$

6–3 จงคูณเวคเตอร์ต่อไปนี้

ก. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times 2 =$ ข. $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} =$

6–4 จงหาสเกลาร์ที่ถูกต้อง X และ Y

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6–5 จงหาสเกลาร์ที่ถูกต้อง W และ Z

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} W + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6–6 จงหาค่าของดีเตอร์มินันต์ต่อไปนี้

ก. $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} =$ ข. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} =$

6—7 จงหาค่าของ Y_2 โดยอาศัยดีเตอร์มินันต์

$$
\begin{aligned}
+ay_1 + by_2 + cy_3 &= S \\
-dy_1 - ey_2 + fy_3 &= T \\
+gy_1 + hy_2 - iy_3 &= Q
\end{aligned}
$$

6—8 จงแสดงค่าที่เหลือในดีเตอร์มินันต์ข้างล่างนี้หลังจากที่ท่าน (1) ตัดแถวนอน 1 และแถวตั้ง 1 และ (2) ตัดแถวนอน 2 และแถวตั้ง 2

$$
\begin{vmatrix}
a & b & c \\
d & e & f \\
g & -h & i
\end{vmatrix}
$$

6—9 จงขยายดีเตอร์มินันต์ข้างล่างนี้โดยแถวนอนที่สองและหาค่าของดีเตอร์มินันต์นี้

$$
\begin{vmatrix}
3 & 4 & 8 \\
2 & 4 & -3 \\
1 & -5 & 6
\end{vmatrix}
$$

6—10 จงหาค่าของ A, B และ C โดยอาศัยดีเตอร์มินันต์

$$
\begin{aligned}
2A + B - C &= 10 \\
A - 2B + 3C &= -4 \\
A + B + 2C &= 10
\end{aligned}
$$

บทที่ 7

พีชคณิตเมตริกซ์
(MATRIX ALGEBRA)

เมตริกซ์ (matrix) คือตัวเลขหลาย ๆ ตัวที่ถูกจัดเรียงเป็นแถวนอนและแถวตั้ง เพื่อให้ตัวเลขที่ถูกจัดเรียงเป็นแถว ๆ เหล่านี้แตกต่างไปจากดีเตอร์มินันต์โดยทั่วไป เราจึงปิดตัวเลขเหล่านี้ด้วยวงเล็บสองอัน เราอาจคำนวณค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์ได้ แต่เมตริกซ์เมื่อพิจารณารวม ๆ กันไปไม่มีค่าทางตัวเลขในตัวของมันเอง ตัวเลขต่าง ๆ ในเมตริกซ์อาจแทนข้อมูลทางธุรกิจที่เป็นประโยชน์ เมื่อพิจารณาเมตริกซ์ในฐานะที่เป็นหน่วยที่สมบูรณ์ในตัวของมันเองหน่วยหนึ่ง ข้อมูลเหล่านั้นจะมีส่วนช่วยในการคำนวณหาคำเฉลยให้กับปัญหาบางอย่าง สมการ (7—1) แสดงเมตริกซ์ที่มีแถวนอนสองแถวและแถวตั้งสามแถว

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\text{แถวนอน}} \qquad \text{แถวตั้ง}\downarrow \qquad (7\text{—}1)$$

จากเรื่องเวคเตอร์ที่ได้ศึกษาไปแล้ว เราจะสังเกตได้ว่า เมตริกซ์นี้ประกอบด้วยเวคเตอร์แถวนอนสองอันที่จัดวางเข้าด้วยกัน หรือเวคเตอร์แถวตั้งสามอันที่จัดวางเข้าด้วยกัน เราเรียกเมตริกซ์นี้ว่า เมตริกซ์ขนาด 2×3 โดยการระบุจำนวนแถวนอนและจำนวนแถวตั้งเช่นเดียวกับวิธีที่ใช้ในดีเตอร์มินันต์ (เมื่อพูดถึงขนาดของเมตริกซ์ จำนวนแถวนอนจะต้องนำหน้าจำนวนแถวตั้งเสมอ) สมการ (7—2) แสดงเมตริกซ์เดิมซึ่งถูกแยกออกเป็น

ก. เวคเตอร์แถวตั้งสามอัน และ

ข. เวคเตอร์แถวนอนสองอัน

$$\text{ก.}\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{ข.}\quad \begin{matrix} (1 & 2 & 4) \\ (3 & 5 & 6) \end{matrix} \qquad (7\text{—}2)$$

เพื่อเป็นการอธิบายให้เห็นการใช้ประโยชน์เมตริกซ์ทางธุรกิจ เราจะสมมติสภาพการณ์ง่าย ๆ ในเรื่องการค้าระหว่างประเทศดังนี้ :— ประเทศ X และ Y สั่งซื้อเหล็กกล้าจากประเทศ A, B และ C ประเทศ X ซื้อเหล็กกล้าจาก A ปีละ 100 ตัน จาก B ปีละ 200 ตัน และจาก C ปีละ 400 ตัน ประเทศ Y ซื้อจาก A ปีละ 300 ตัน จาก B ปีละ 500 ตัน และจาก C ปีละ 700 ตัน ถ้าเขียนบรรยายในลักษณะเช่นนี้ เป็นการยากที่จะมองเห็นความ

เคลื่อนไหวของเหล็กกล้าจากผู้ขายไปยังผู้ใช้ แต่ถ้าเขียนสภาพการณ์ดังกล่าวในรูปเมตริกซ์ ดังเช่น สมการ (7–3) ก็จะทำให้มองเห็นความเคลื่อนไหวของเหล็กกล้าได้โดยง่าย

$$\begin{array}{llccc} & & & \textbf{ผู้ขาย} & \\ & & \textbf{ประเทศ A} & \textbf{ประเทศ B} & \textbf{ประเทศ C} \\ \text{ผู้ใช้} & \text{ประเทศ X} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 100 & 200 & 400 \\ 300 & 500 & 700 \end{pmatrix}} \\ & \text{ประเทศ Y} & & & \end{array} \qquad (7–3)$$

แถวตั้งแถวแรกในเมตริกซ์นี้ ชี้ให้เห็นการส่งเหล็กกล้าทั้งสิ้นจากประเทศ A ไปยังประเทศผู้ใช้ทั้งสอง แถวตั้งแถวที่สองชี้ให้เห็นการส่งเหล็กกล้าทั้งสิ้นจากประเทศ B และแถวตั้งแถวที่สามชี้ให้เห็นการส่งเหล็กกล้าทั้งสิ้นจากประเทศ C แถวนอนแถวแรกชี้ให้เห็นแหล่งที่มาทั้งสิ้นของเหล็กกล้าที่ประเทศ X ต้องการ และแถวนอนแถวที่สองชี้ให้เห็นแหล่งที่มาทั้งสิ้นของเหล็กกล้าที่ประเทศ Y ต้องการ เมื่อเขียนในรูปเมตริกซ์เช่นนี้เราสามารถมองเห็นสภาพการณ์ต่าง ๆ ได้ง่ายกว่า และแสดงให้เห็นสถานการณ์ทั้งหมดในลักษณะที่รวบรัด และความสัมพันธ์ต่าง ๆ ก็จะปรากฏออกมาอย่างเด่นชัดด้วย แม้ว่าสิ่งที่ได้กล่าวไปแล้วนี้จะไม่ใช่ประโยชน์ที่จะได้จากเมตริกซ์เพียงอย่างเดียวก็ตาม แต่เราจะต้องทำความเข้าใจและรู้จักการคำนวณเกี่ยวกับเมตริกซ์ก่อน จึงจะมองเห็นการใช้ประโยชน์จากเมตริกซ์ทางด้านอื่นได้

สมการ (7–4) แสดงเมตริกซ์ต่าง ๆ พร้อมทั้งระบุขนาดของเมตริกซ์แต่ละอันข้างเมตริกซ์นั้น ๆ

$$\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} & 2 \times 2 \\[2ex] \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} & 2 \times 1 \\[2ex] \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} & 1 \times 3 \\[1ex] \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} & 1 \times 1 \\[1ex] \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} & 2 \times 4 \\[2ex] \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} & 3 \times 1 \end{array} \qquad (7–4)$$

ตำแหน่งของค่าแต่ละค่าที่อยู่ภายในเมตริกซ์ใด ๆ อาจแสดงได้โดยระบุแถวนอนและแถวตั้ง (ตามลำดับดังกล่าว) ที่ค่านั้น ๆ ปรากฏอยู่ ในสมการ (7–5) ตำแหน่งของค่าแต่ละค่าที่อยู่ภายในเมตริกซ์ แสดงโดยตำแหน่งของแถวนอนและแถวตั้งของค่านั้น ๆ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

	แถวนอนที่	แถวตั้งที่
1 = ค่า 1, 1	1	1
−1 = ค่า 2, 1	2	1
3 = ค่า 3, 1	3	1
2 = ค่า 1, 2	1	2
4 = ค่า 2, 2	2	2
5 = ค่า 3, 2	3	2
7 = ค่า 1, 3	1	3
6 = ค่า 2, 3	2	3
8 = ค่า 3, 3	3	3

(7–5)

การบวกและการลบเมตริกซ์
(Matrix Addition and Substraction)

เมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากันอาจบวกเข้าด้วยกันหรือหักออกจากกันได้ โดยบวกหรือลบค่าที่ปรากฏอยู่ในตำแหน่งเดียวกันของแต่ละเมตริกซ์ สมการ (7–6) แสดงการบวกเมตริกซ์ขนาด 2×2 สองอันเข้าด้วยกัน

เมตริกซ์ A + เมตริกซ์ B = เมตริกซ์ C

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์ A		เมตริกซ์ B		เมตริกซ์ C
2(ค่า 1, 1)	+	1(ค่า 1, 1)	=	3(ค่า 1, 1)
6(ค่า 1, 2)	+	7(ค่า 1, 2)	=	13(ค่า 1, 2)
3(ค่า 2, 1)	+	8(ค่า 2, 1)	=	11(ค่า 2, 1)
4(ค่า 2, 2)	+	5(ค่า 2, 2)	=	9(ค่า 2, 2)

(7–6)

ในทำนองเดียวกัน เราอาจหักเมตริกซ์หนึ่งออกจากอีกเมตริกซ์หนึ่งได้ สมการ (7–7) แสดงการหักเมตริกซ์ B ออกจากเมตริกซ์ A

$$\text{เมตริกซ์ A} \quad - \quad \text{เมตริกซ์ B} \quad = \quad \text{เมตริกซ์ C}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (7\text{—}7)$$

ถ้ามีตัวเลขติดลบอยู่ด้วย การบวกหรือการลบคงดำเนินไปโดยปฏิบัติตามเครื่องหมายพีชคณิต ดังที่แสดงในสมการ (7—8)

$$\begin{array}{lccccccc} & \text{เมตริกซ์ A} & & \text{เมตริกซ์ B} & & \text{เมตริกซ์ C} & \\ \text{ก.} & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -5 & 8 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} & (7\text{—}8) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} & \text{เมตริกซ์ A} & & \text{เมตริกซ์ B} & & \text{เมตริกซ์ C} \\ \text{ข.} & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} & - & \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

การคูณเมตริกซ์ (Matrix Multiplication)

เมตริกซ์สองอันอาจคูณกันได้ ถ้าจำนวนแถวตั้งของเมตริกซ์ที่หนึ่งเท่ากับจำนวนแถวนอนของเมตริกซ์ที่สอง ถ้าไม่ได้เป็นไปตามเงื่อนไขนี้ เมตริกซ์ทั้งสองก็ไม่อาจคูณกันได้ สมการ (7—9) แสดงเมตริกซ์ A และ B พร้อมทั้งระบุขนาด (จำนวนแถวนอนและแถวตั้ง) ของเมตริกซ์แต่ละอันไว้ภายใต้เมตริกซ์นั้น ๆ

$$\begin{array}{ccc} \text{เมตริกซ์ A} & & \text{เมตริกซ์ B} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$2 \times ② \leftarrow = \rightarrow ② \times 2 \qquad (7\text{—}9)$$

ถ้าตัวเลขที่มีวงกลมล้อมรอบ (จำนวนแถวตั้งของเมตริกซ์ A และจำนวนแถวนอนของเมตริกซ์ B) เท่ากัน เมตริกซ์ทั้งสองจึงคูณกันได้ กฎนี้เป็นคำนิยามขั้นมูลฐานของพีชคณิตเมตริกซ์ ท่านจะเข้าใจตรรกวิทยาเกี่ยวกับกฎนี้ได้ดีตามที่เราจะอธิบายต่อไป หลังจากที่ได้พยายามคูณเมตริกซ์สองอันที่ไม่ได้เป็นไปตามกฎนี้

ถ้าเมตริกซ์ที่จะคูณกันเป็นเมตริกซ์จัตุรัสและมีขนาดเท่ากัน 2 อัน ตามกฎนี้เมตริกซ์ทั้งสองย่อมคูณกันได้เสมอ ดังที่แสดงในสมการ (7—9)

ถ้าวางเมตริกซ์สองอันเข้าด้วยกันแล้ว [เช่นเมตริกซ์ A และ B ในสมการ (7–10)] ไม่ได้เป็นไปตามกฎนี้และทำให้เมตริกซ์ทั้งสองคูณกันไม่ได้ การ "สับ" ตำแหน่งอาจทำให้เมตริกซ์ทั้งสองคูณกันได้

เมตริกซ์ A **เมตริกซ์ B**

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{คูณกันไม่ได้}$$

$$3 \times ① \leftarrow \neq \rightarrow ② \times 3 \qquad (7\text{–}10)$$

เมตริกซ์ B **เมตริกซ์ A**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{คูณกันได้}$$

$$2 \times ③ \leftarrow = \rightarrow ③ \times 1$$

สมการ (7–11) แสดงเมตริกซ์หลายคู่ และได้นำจำนวนแถวตั้งของเมตริกซ์อันแรกของแต่ละกรณี ไปเปรียบเทียบกับจำนวนแถวนอนของเมตริกซ์อันที่สองเพื่อวินิจฉัยดูว่าเมตริกซ์ทั้งสองคูณกันได้หรือไม่

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{คูณกันได้}$$

$$2 \times ③ \leftarrow = \rightarrow ③ \times 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{คูณกันได้}$$

$$1 \times ③ \leftarrow = \rightarrow ③ \times 1 \qquad (7\text{–}11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{คูณกันไม่ได้}$$

$$2 \times ③ \leftarrow \neq \rightarrow ② \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$ คูณกันไม่ได้

$$3 \times ③ \leftarrow \neq \rightarrow ④ \times 1$$

สมการ (7–12) แสดงเมตริกซ์สองอันคือ A และ B จำนวนแถวตั้งของเมตริกซ์เท่ากับจำนวนแถวนอนของเมตริกซ์ B เมตริกซ์ทั้งสองจึงคูณกันได้

เมตริกซ์ A **เมตริกซ์** B

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \times ① \leftarrow = \rightarrow ① \times 2 \qquad (7\text{–}12)$$

ถ้าเราเปรียบเทียบตัวเลขที่อยู่ด้านนอกสองตัว ที่แสดงขนาดของเมตริกซ์ทั้งสองดังที่ปรากฏในสมการ (7–13) เราจะได้ข้อสนเทศที่เป็นประโยชน์บางอย่าง ตัวเลขแสดงขนาดของเมตริกซ์ที่อยู่ด้านนอกทั้งสองตัวนี้ จะเป็นตัวกำหนดขนาดของเมตริกซ์ซึ่งเป็นคำตอบที่เราคำนวณได้ ในกรณีนี้คำตอบที่ได้จะเป็นเมตริกซ์ขนาด 2 × 2 นี่ก็เป็นความรู้ขั้นมูลฐานอีกอย่างหนึ่งเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์

เมตริกซ์ A **เมตริกซ์** B

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ขนาดด้านนอกของเมตริกซ์ A
กำหนดจำนวนแถวนอนของคำตอบ

แถวนอน แถวตั้ง

ขนาดด้านนอกของเมตริกซ์ B
กำหนดจำนวนแถวตั้งของคำตอบ

$$② \times 1 \qquad 1 \times ② \qquad (7\text{–}13)$$

เมื่อเราทราบขนาดของคำตอบแล้ว การคูณเมตริกซ์ทั้งสองก็เป็นเรื่องง่าย ๆ เราทราบแล้วว่าถ้าผลคูณที่ได้เป็นเมตริกซ์ขนาด 2 × 2 เมตริกซ์นี้จะต้องประกอบด้วยค่า 4 ค่า สมการ (7–14) แสดงการคูณเมตริกซ์ทั้งสองเข้าด้วยกัน โดยแสดงในรูปสัญลักษณ์ก่อน แล้วจึงตามด้วยตัวเลข ในการคำนวณค่าใด ๆ ที่อยู่ในคำตอบ เราจะต้องพิจารณาตำแหน่งแถวนอนและแถวตั้งของค่านั้น ๆ ก่อน ตัวอย่างเช่น จากสมการ (7–14) สมมติว่าเราต้องการแสดงให้เห็นว่าค่า 24 ที่ปรากฏอยู่ในคำตอบคำนวณมาได้อย่างไร ค่านี้อยู่ในแถวนอนที่ 2 และแถวตั้งที่ 1

ในการคำนวณค่านี้เราเพียงแต่คูณแถวนอนที่ 2 ของเมตริกซ์ A ด้วยแถวตั้งที่ 1 ของเมตริกซ์ B นั่นคือ $6 \times 4 = 24$

เมตริกซ์ A		เมตริกซ์ B		เมตริกซ์ C
$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\times$	$\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} a \times c & a \times d \\ b \times c & b \times d \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\times$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 24 & 18 \end{pmatrix}$

เมตริกซ์ A		เมตริกซ์ B	การคำนวณ	ตำแหน่งของตัวเลขในคำตอบ	
แถวนอนที่ 1 (5)	$\times$	แถวตั้งที่ 1 (4)	$5 \times 4 = 20$	แถวนอนที่ 1 แถวตั้งที่ 1	
แถวนอนที่ 1 (5)	$\times$	แถวตั้งที่ 2 (3)	$5 \times 3 = 15$	แถวนอนที่ 1 แถวตั้งที่ 2	(7–14)
แถวนอนที่ 2 (6)	$\times$	แถวตั้งที่ 1 (4)	$6 \times 4 = 24$	แถวนอนที่ 2 แถวตั้งที่ 1	
แถวนอนที่ 2 (6)	$\times$	แถวตั้งที่ 2 (3)	$6 \times 3 = 18$	แถวนอนที่ 2 แถวตั้งที่ 2	

สมการ (7–15) แสดงการคูณเมตริกซ์สองอันคือ A และ B โดยผลคูณที่ได้ประกอบด้วยค่าเพียงค่าเดียว ตำแหน่งของค่านี้คือ 1, 1 (แถวนอนที่ 1 และแถวตั้งที่ 1) การคูณเมตริกซ์ทั้งสองจึงเป็นการคูณแถวนอนที่ 1 ที่มีอยู่เพียงแถวเดียวของเมตริกซ์ A ด้วยแถวตั้งที่ 1 ที่มีอยู่เพียงแถวเดียวของเมตริกซ์ B ในการคูณเมตริกซ์สองอันเข้าด้วยกันทั้งที่ได้แสดงไปแล้วและที่จะแสดงต่อไป จะสังเกตได้ว่า ในการคำนวณแต่ละขั้นเราจะต้องคูณแถวนอนใดแถวนอนหนึ่งของเมตริกซ์ที่ 1 ด้วยแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่งของเมตริกซ์ที่ 2 เสมอ

เมตริกซ์		เมตริกซ์		เมตริกซ์	
A	$\times$	B	$=$	C	
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\times$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$	$=$	คำตอบ	
1×3		3×1			(7–15)

ในสมการ (7–16) แถวนอนและแถวตั้งของเมตริกซ์ทั้งสองต่างก็ประกอบด้วยค่า 3 ค่า เราได้แสดงการคูณโดยใช้สัญลักษณ์ก่อน แล้วจึงตามด้วยตัวเลข

$$(a \quad b \quad c) \quad \times \quad \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

$$ad + be + cf = \text{คำตอบ}$$

$$(3 \quad 2 \quad 1) \quad \times \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(3 \times 4) + (2 \times 5) + (1 \times 6) = \text{คำตอบ}$$

$$12 + 10 + 6 = 28 \qquad (7\text{–}16)$$

ต่อไปนี้ เป็นตัวอย่างแสดงการคูณเมตริกซ์

ตัวอย่างที่ 1

เมตริกซ์ A		เมตริกซ์ B		เมตริกซ์ C
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\times$	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} 31 & 6 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}$

เมตริกซ์ A	เมตริกซ์ B	การคำนวณ		ตำแหน่งของตัวเลขในคำตอบ
แถวนอนที่ 1 $(2 \quad 3)$	$\times$ แถวตั้งที่ 1 $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$	$(2)(5) + (3)(7)$	$= 31$	แถวนอนที่ 1 แถวตั้งที่ 1
แถวนอนที่ 1 $(2 \quad 3)$	$\times$ แถวตั้งที่ 2 $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$	$(2)(6) + (3)(-2)$	$= 6$	แถวนอนที่ 1 แถวตั้งที่ 2
แถวนอนที่ 2 $(-1 \quad 4)$	$\times$ แถวตั้งที่ 1 $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$	$(-1)(5) + (4)(7)$	$= 23$	แถวนอนที่ 2 แถวตั้งที่ 1
แถวนอนที่ 2 $(-1 \quad 4)$	$\times$ แถวตั้งที่ 2 $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$	$(-1)(6) + (4)(-2)$	$= -14$	แถวนอนที่ 2 แถวตั้งที่ 2

ตัวอย่างที่ 2

เมตริกซ์ A		เมตริกซ์ B		เมตริกซ์ C
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	$\times$	$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} -41 \\ -2 \\ -22 \end{pmatrix}$

เมตริกซ์ A	เมตริกซ์ B	การคำนวณ	ตำแหน่งของ ตัวเลขในคำตอบ
แถวนอนที่ 1 $(2 \quad 1 \quad -6)$	$\times$ แถวตั้งที่ 1 $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$	$(2)(3) + (1)(-5) + (-6)(7) = -41$	แถวนอนที่ 1 แถวตั้งที่ 1
แถวนอนที่ 2 $(-\ 1 \quad 4 \quad 3)$	$\times$ แถวตั้งที่ 1 $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$	$(-1)(3) + (4)(-5) + (3)(7) = -2$	แถวนอนที่ 2 แถวตั้งที่ 1
แถวนอนที่ 3 $(6 \quad 1 \quad -5)$	$\times$ แถวตั้งที่ 1 $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$	$(6)(3) + (1)(-5) + (-5)(7) = -22$	แถวนอนที่ 3 แถวตั้งที่ 1

ตัวอย่างที่ 3

เมตริกซ์ A		เมตริกซ์ B		เมตริกซ์ C
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\times$	$\begin{pmatrix} -3 & 8 & -5 \\ 0 & 9 & -4 \\ -1 & 10 & 11 \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} -1 & 24 & -43 \\ -9 & 42 & -23 \\ -25 & 163 & 27 \end{pmatrix}$

เมตริกซ์ A	เมตริกซ์ B	การคำนวณ	ตำแหน่งของ ตัวเลขในคำตอบ
แถวนอนที่ 1 $(1 \quad 4 \quad -2)$	$\times$ แถวตั้งที่ 1 $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$(1)(-3) + (4)(0) + (-2)(-1) = -1$	แถวนอนที่ 1 แถวตั้งที่ 1
แถวนอนที่ 1 $(1 \quad 4 \quad -2)$	$\times$ แถวตั้งที่ 2 $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$	$(1)(8) + (4)(9) + (-2)(10) = 24$	แถวนอนที่ 1 แถวตั้งที่ 2

แถวนอนที่ 1 $(1 \quad 4 \quad -2)$ × แถวตั้งที่ 3 $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$ $(1)(-5) + (4)(-4) + (-2)(11) = -43$ แถวนอนที่ 1 แถวตั้งที่ 3

แถวนอนที่ 2 $(3 \quad 2 \quad 0)$ × แถวตั้งที่ 1 $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(3)(-3) + (2)(0) + (0)(-1) = -9$ แถวนอนที่ 2 แถวตั้งที่ 1

แถวนอนที่ 2 $(3 \quad 2 \quad 0)$ × แถวตั้งที่ 2 $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ $(3)(8) + (2)(9) + (0)(10) = 42$ แถวนอนที่ 2 แถวตั้งที่ 2

แถวนอนที่ 2 $(3 \quad 2 \quad 0)$ × แถวตั้งที่ 3 $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$ $(3)(-5) + (2)(-4) + (0)(11) = -23$ แถวนอนที่ 2 แถวตั้งที่ 3

แถวนอนที่ 3 $(6 \quad 5 \quad 7)$ × แถวตั้งที่ 1 $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(6)(-3) + (5)(0) + (7)(-1) = -25$ แถวนอนที่ 3 แถวตั้งที่ 1

แถวนอนที่ 3 $(6 \quad 5 \quad 7)$ × แถวตั้งที่ 2 $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ $(6)(8) + (5)(9) + (7)(10) = 163$ แถวนอนที่ 3 แถวตั้งที่ 2

แถวนอนที่ 3 $(6 \quad 5 \quad 7)$ × แถวตั้งที่ 3 $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$ $(6)(-5) + (5)(-4) + (7)(11) = 27$ แถวนอนที่ 3 แถวตั้งที่ 3

ตัวอย่างที่ 4

ผู้รับเหมาก่อสร้างคนหนึ่ง ได้คำนวณวัสดุที่ต้องใช้ในการสร้างบ้านชนิดต่าง ๆ ไว้ดังนี้

วัสดุ (ตัน) **ชนิดของบ้าน**

$$\begin{array}{l} \\ \text{อิฐ} \\ \text{ไม้} \\ \text{เหล็กกล้า} \\ \text{คอนกรีต} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Ranch} & \text{Colonial} & \text{Modern} & \text{Cape Cod} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 4 & 10 & 2 \\ 2 & 12 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \text{เมตริกซ์วัสดุ}$$

ตารางการก่อสร้างสำหรับงวดสามเดือนถัดไปปรากฏดังนี้

$$\begin{array}{l}\text{Ranch}\\ \text{Colonial}\\ \text{Modern}\\ \text{Cape Cod}\end{array}\begin{pmatrix}4\\2\\3\\5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{หลัง}\\ \text{หลัง}\\ \text{หลัง}\\ \text{หลัง}\end{array}$$

เมตริกซ์การขาย
หรือการก่อสร้าง

เมื่อคูณเมตริกซ์วัสดุด้วยเมตริกซ์ตารางการก่อสร้าง จะได้จำนวนตันทั้งสิ้นของวัสดุแต่ละชนิดที่ต้องใช้ในการสร้างบ้านทั้งหมด

ตัน

$$\begin{pmatrix}7 & 4 & 10 & 2\\ 2 & 12 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 4 & 0\\ 6 & 5 & 3 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\2\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}76\\65\\16\\53\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{อิฐ}\\ \text{ไม้}\\ \text{เหล็กกล้า}\\ \text{คอนกรีต}\end{array}$$

ถ้าผู้รับเหมาก่อสร้างทราบต้นทุนของวัสดุต่าง ๆ ดังปรากฏข้างล่างนี้ การคูณเมตริกซ์สองอันเข้าด้วยกันอีกครั้งหนึ่ง จะได้ต้นทุนทั้งสิ้นของวัสดุที่ใช้ในการสร้างบ้านทั้งหมด

อิฐ	150	บาทต่อตัน
ไม้	300	บาทต่อตัน
เหล็กกล้า	600	บาทต่อตัน
คอนกรีต	40	บาทต่อตัน

$$\begin{array}{cccc}\text{อิฐ} & \text{ไม้} & \text{เหล็กกล้า} & \text{คอนกรีต}\\ (150\text{ บาท} & 300\text{ บาท} & 600\text{ บาท} & 40\text{ บาท})\end{array}\times\begin{pmatrix}76\\65\\16\\53\end{pmatrix}=(42{,}620\text{ บาท})$$

ต้นทุนทั้งสิ้นของวัสดุทางตรงสำหรับบ้านทั้งหมด

$$1\times④\leftarrow=\rightarrow④\times 1$$

จะเห็นได้ว่าเราอาจแก้ปัญหานี้ง่าย ๆ โดยใช้เลขคณิตธรรมดา และความจริงเลขคณิตธรรมดาอาจจะให้คำเฉลยที่ถูกต้องเร็วกว่าพีชคณิตเมตริกซ์มาก อย่างไรก็ดีเราได้นำตัวอย่างนี้เข้ามา เพื่อแสดงให้เห็นว่าพีชคณิตเมตริกซ์เป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์มากที่ใช้ในการคำนวณต่าง ๆ ไม่ใช่เป็นแนวความคิดทางคณิตศาสตร์บางอย่างที่เข้าใจยาก

เมตริกซ์สับที่
(The Transpose of a Matrix)

เมตริกซ์สับที่ได้มาจากการสับเปลี่ยนแถวนอนและแถวตั้งซึ่งกันและกัน ในสมการ (7—17) เราได้สร้างเมตริกซ์สับที่ของเมตริกซ์ขนาด 2×3 จะสังเกตได้ว่าแถวนอนที่ 1 ของเมตริกซ์เดิมกลายมาเป็นแถวตั้งที่ 1 ของเมตริกซ์สับที่ และแถวนอนที่ 2 ของเมตริกซ์เดิมกลายมาเป็นแถวตั้งที่ 2 ของเมตริกซ์สับที่

เมตริกซ์เดิม เมตริกซ์สับที่

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \tag{7—17}$$

การสร้างเมตริกซ์สับที่นี้ทำให้ขนาดของเมตริกซ์เดิมเปลี่ยนไป เมตริกซ์เดิมมีขนาด 2×3 แต่เมตริกซ์สับที่มีขนาด 3×2 ถ้าเมตริกซ์เดิมเป็นเมตริกซ์จัตุรัส กล่าวคือ เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2, 3×3 ฯลฯ การสร้างเมตริกซ์สับที่ก็จะไม่ทำให้ขนาดของเมตริกซ์เดิมเปลี่ยนไป จำนวนแถวนอนจะยังคงเท่ากับจำนวนแถวตั้ง

เราอาจแสดงประโยชน์ของเมตริกซ์สับที่โดยอาศัยตัวอย่างต่อไปนี้ เมตริกซ์เดิมข้างล่างนี้ แสดงการส่งเหล็กกล้าจากผู้ขาย A, B และ C ไปยังผู้ใช้ X และ Y ปริมาณเป็นตัน

เมตริกซ์เดิม

ผู้ขาย

$$\text{ผู้ใช้} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & 200 & 400 \\ 300 & 500 & 700 \end{pmatrix} \end{array}$$

เมตริกซ์สับที่

ผู้ใช้

$$\text{ผู้ขาย} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & 300 \\ 200 & 500 \\ 400 & 700 \end{pmatrix} \end{array}$$

ในเมตริกซ์เดิมแถวนอนแทนการใช้ ในเมตริกซ์สับที่แถวนอนแทนการส่ง ในเมตริกซ์เดิมแถวตั้งแทนการส่ง ในเมตริกซ์สับที่แถวตั้งแทนการใช้ กล่าวอีกนัยหนึ่ง เมตริกซ์สับที่เป็นวิธีที่ใช้ในการแสดงข้อมูลในรูปที่แตกต่างกันอีกรูปหนึ่งนั่นเอง

ตัวประกอบร่วม
(Cofactors)

เมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่มีขนาด 2 × 2 หรือที่ใหญ่กว่า อาจแยกออกเป็นตัวประกอบร่วมต่าง ๆ ตัวประกอบร่วม คือค่าหรือกลุ่มของค่าต่าง ๆ ที่เหลือหลังจากที่ได้ตัดแถวนอนแถวหนึ่งและแถวตั้งแถวหนึ่งออกไปจากเมตริกซ์นั้นแล้ว ในสมการ (7—18) เราได้สร้างตัวประกอบร่วมของค่าที่มีวงกลมล้อมรอบ คือ ②

เมตริกซ์เดิม	−	แถวนอนและแถวตั้งที่ถูกตัดออกไป	=	ตัวประกอบร่วม	
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	−	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} & \\ & 3 \end{pmatrix}$	(7—18)

เมตริกซ์ขนาด 2 × 2 ในสมการ (7—18) จะมีตัวประกอบร่วมทั้งหมด 4 ตัว ดังนี้

ค่า	แถวนอนและแถวตั้งที่ถูกตัดออกไป	ตัวประกอบร่วม
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & \\ & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & \\ -4 & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & -1 \\ & \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix}$

จะสังเกตได้ว่า ในการสร้างตัวประกอบร่วมเหล่านี้ เราได้เปลี่ยนเครื่องหมายของตัวประกอบร่วมสองตัว เครื่องหมายของตัวประกอบร่วมกำหนดโดยการบวกเลขที่ของตำแหน่งแถวนอนและแถวตั้งที่ถูกตัดออกไป ถ้าผลรวมเป็นเลขคู่ก็ไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมายของตัวประกอบร่วม ถ้าผลรวมเป็นเลขคี่ เราจะต้องเปลี่ยนเครื่องหมายของตัวประกอบร่วม สมการ (7—19) อธิบายให้เห็นวิธีการดังกล่าว

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{เมตริกซ์เดิม}$$

$\begin{pmatrix} & \\ & 7 \end{pmatrix}$ ตัวประกอบร่วมได้มาโดยการตัดแถวนอนที่ 1 และแถวตั้งที่ 1 ออกไป 1 + 1 = เลขคู่ เครื่องหมายไม่เปลี่ยน

$\begin{pmatrix} & \\ -4 & \end{pmatrix}$ ตัวประกอบร่วมได้มาโดยการตัดแถวนอนที่ 1 และแถวตั้งที่ 2 ออกไป 1 + 2 = เลขคี่ เครื่องหมายเปลี่ยน

$\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}$ ตัวประกอบร่วมได้มาโดยการตัดแถวนอนที่ 2 และแถวตั้งที่ 1 ออกไป 2 + 1 = เลขคี่ เครื่องหมายเปลี่ยน

$\begin{pmatrix} 3 & \\ & \end{pmatrix}$ ตัวประกอบร่วมได้มาโดยการตัดแถวนอนที่ 2 และแถวตั้งที่ 2 ออกไป 2 + 2 = เลขคู่ เครื่องหมายไม่เปลี่ยน (7–19)

เมตริกซ์ของตัวประกอบร่วม

(The Matrix of Cofactors)

ในการสร้างเมตริกซ์ประชิด (adjoint of a matrix) เราจำเป็นจะต้องคำนวณเมตริกซ์ของตัวประกอบร่วมก่อน แนวความคิดทั้งสองนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาเรื่องเกมและกลยุทธ์ที่เราจะกล่าวต่อไป ถ้าแทนตัวเลขแต่ละตัวในเมตริกซ์เดิมตามที่แสดงไว้ในสมการ (7–18) ด้วยตัวประกอบร่วมของมัน เราจะได้เมตริกซ์ของตัวประกอบร่วม ดังปรากฏในสมการ (7–20)

เมตริกซ์เดิม $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

แสดงแถวนอนและแถวตั้งที่ถูกตัดออกไป

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

ตัวประกอบร่วม

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \begin{pmatrix} & \\ & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \\ -4 & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & -1 \\ & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

แทนที่ตัวเลขเดิม a, b, c, d ด้วยตัวประกอบร่วม $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ = เมตริกซ์ของตัวประกอบร่วม (7–20)

สำหรับเมตริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดใหญ่กว่า 2 × 2 การตัดแถวนอนและแถวตั้งออกไปอย่างละแถวจะได้ตัวประกอบร่วมขนาด 2 × 2 หรือที่ใหญ่กว่า ดังที่แสดงไว้ในสมการ (7–21)

เมตริกซ์เดิม	ตัวประกอบร่วมที่ได้จากการตัดแถวนอนที่ 1 และแถวตั้งที่ 1 ออกไป	
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & \\ & 4 & 8 \\ & 5 & 9 \end{pmatrix}$	(7–21)

เนื่องจากเราไม่อาจแทนค่า ① ที่มีวงกลมล้อมรอบตามที่ปรากฏในสมการ (7–21) ด้วยตัวประกอบร่วมทั้งหมดของค่าเดียวกันนี้ ซึ่งได้แก่

$$\begin{matrix} 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{matrix}$$

ในเมตริกซ์ของตัวประกอบร่วมเราจึงต้องแทนค่านี้ ด้วยค่าของดีเตอร์มินันต์ของตัวประกอบร่วม คือ

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -4$$

(เครื่องหมายของตัวประกอบร่วมจะแสดงให้เห็นตำแหน่งของแถวนอนและแถวตั้งที่ถูกตัดออกไป)

สมการ (7—22) และ (7—23) แสดงวิธีสร้างเมตริกซ์ของตัวประกอบร่วมสำหรับเมตริกซ์จัตุรัสขนาด 3×3 หรือที่ใหญ่กว่านั้น

เมตริกซ์เดิม $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

แถวนอนและแถวตั้งที่ถูกตัดออกไป	ตัวประกอบร่วม	ค่าทางตัวเลขของตัวประกอบร่วม	
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 13$	1 + 1 = เลขคู่ เครื่องหมายไม่เปลี่ยน
$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 9$	2 + 1 = เลขคี่ เครื่องหมายเปลี่ยน
$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & & \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -15$	3 + 1 = เลขคู่ เครื่องหมายไม่เปลี่ยน

$$\begin{pmatrix} 2 & ③ & 6 \\ & 4 & \\ & 5 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

1 + 2 = เลขคี่ เครื่องหมายเปลี่ยน

$$\begin{pmatrix} & 3 & \\ 1 & ④ & 3 \\ & 5 & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 14$$

2 + 2 = เลขคู่ เครื่องหมายไม่เปลี่ยน

$$\begin{pmatrix} & 3 & \\ & 4 & \\ 0 & ⑤ & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

3 + 2 = เลขคี่ เครื่องหมายเปลี่ยน

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & ⑥ \\ & & 3 \\ & & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

1 + 3 = เลขคู่ เครื่องหมายไม่เปลี่ยน

$$\begin{pmatrix} & & 6 \\ 1 & 4 & ③ \\ & & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

2 + 3 = เลขคี่ เครื่องหมายเปลี่ยน

$$\begin{pmatrix} & & 6 \\ & & 3 \\ 0 & 5 & ⑦ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

3 + 3 = เลขคู่ เครื่องหมายไม่เปลี่ยน

(7—22)

เมื่อแทนที่ค่าที่มีวงกลมล้อมรอบทั้ง 9 ค่าด้วยค่าทางตัวเลขของตัวประกอบร่วมของแต่ละค่า จะได้เมตริกซ์ของตัวประกอบร่วม ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 \\ 9 & 14 & -10 \\ -15 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{เมตริกซ์ของตัวประกอบร่วม} \qquad (7\text{—}23)$$

การสร้างเมตริกซ์ของตัวประกอบร่วมของเมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่ใหญ่กว่า 3×3 คงดำเนินไปในลักษณะเดียวกัน ยกเว้นแต่ว่าจะต้องมีการคำนวณมากขึ้น ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่เป็นเมตริกซ์ขนาด 4×4 เราต้องทำการคำนวณทั้งหมดถึง 16 ขั้น การตัดแถวนอนและแถวตั้งออกไปอย่างละแถว จะได้ตัวประกอบร่วมที่มีขนาด 3×3 16 ตัว ที่เราจะต้องหาค่าทางตัวเลขของดีเตอร์มินันต์ต่อไป

เมตริกซ์ประชิด
(The Adjoint of a Matrix)

ในการศึกษาเรื่องเกมแข่งขันและกลยุทธ์ที่ดีที่สุด เราจะมีโอกาสได้ใช้เมตริกซ์ประชิดบ้าง เมตริกซ์ประชิดก็คือ **เมตริกซ์สับที่ของเมตริกซ์ของตัวประกอบร่วมนั่นเอง** เนื่องจากเราได้เรียนรู้วิธีการสร้าง (1) เมตริกซ์สับที่ของเมตริกซ์ใด ๆ และ
(2) เมตริกซ์ของตัวประกอบร่วม แล้ว
เพราะฉะนั้นการสร้างเมตริกซ์ประชิดจึงเป็นเพียงการสับที่แถวนอน และแถวตั้งของเมตริกซ์ของตัวประกอบร่วมอย่างง่าย ๆ เท่านั้น ในสมการ (7—24) เราได้แสดงเมตริกซ์ที่ใช้ในสมการ (7—20) และ (7—22) และตามด้วยเมตริกซ์ของตัวประกอบร่วม ถัดจากนั้นจึงได้สับที่แถวนอนและแถวตั้งของเมตริกซ์ของตัวประกอบร่วม เพื่อสร้างเป็นเมตริกซ์ประชิด

	เมตริกซ์เดิม	เมตริกซ์ของตัวประกอบร่วม	เมตริกซ์ประชิด
ก.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$
ข.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 \\ 9 & 14 & -10 \\ -15 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & 9 & -15 \\ -7 & 14 & 0 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$ (7—24)

เมตริกซ์ไอเด็นติตี้ หรือเมตริกซ์หน่วย
(The Identity or Unit Matrix)

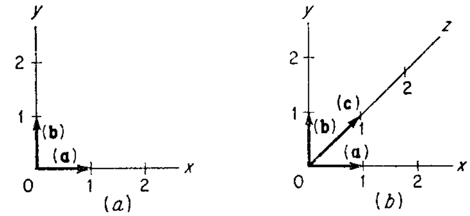
เมตริกซ์จัตุรัสที่มีเส้นทแยงมุมปฐมภูมิประกอบด้วยเลขหนึ่งทั้งหมด และค่าอื่น ๆ ที่เหลือเป็นศูนย์เรียกว่า " เมตริกซ์หน่วย " (unit matrix) หรือ " เมตริกซ์ไอเด็นติตี้ " (identity matrix) สมการ (7—25) แสดงเมตริกซ์ไอเด็นติตี้สามอัน

$$\text{ก. } \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \text{ข. } \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \text{ค. } \underset{4\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad (7—25)$$

จะสังเกตได้ว่า เมตริกซ์ไอเด็นติตี้ก็คือ เวคเตอร์หลาย ๆ อัน (ซึ่งเวคเตอร์แต่ละอันมีความยาว 1 หน่วย) มารวมกันเข้านั่นเอง และประกอบขึ้นเป็นฐานง่าย ๆ สำหรับอวกาศหนึ่งมิติเพราะว่าแกนของอวกาศแต่ละมิติต่างก็มีความยาว 1 หน่วย จึงสะดวกต่อการหาผลคูณสเกลาร์ของฐานเหล่านี้

อวกาศ 2 มิติ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (7–26)

อวกาศ 3 มิติ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



(a) (b)

เราได้แสดงให้เห็นแล้วว่า เวคเตอร์ใด ๆ ในอวกาศหนึ่งมิติที่สร้างจากเวคเตอร์ฐานจะต้องเป็นผลคูณสเกลาร์ของเวคเตอร์ฐานนั้น ๆ การใช้เมตริกซ์ไอเด็นติตี้เพื่อเป็นฐานง่าย ๆ เช่นนี้ จึงมีประโยชน์ต่อการกลับเมตริกซ์ (matrix inversion) ที่เราจะศึกษาต่อไป และการกลับเมตริกซ์นี้ก็เป็นความคิดขั้นมูลฐานอย่างหนึ่งของการโปรแกรมแบบเส้นตรง

การกลับเมตริกซ์ (Inversion of a Matrix)

ถ้าคูณเวคเตอร์ $(1 \ \ 2)$ ด้วยเมตริกซ์ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ จะเปลี่ยนเวคเตอร์ $(1 \ \ 2)$ เป็นเวคเตอร์อันใหม่ที่อยู่ในอวกาศ 2 มิติ เพราะเมตริกซ์นี้ทำหน้าที่แทนสเกลาร์หลายตัวมารวมเข้าด้วยกัน เราได้แสดงการคูณเวคเตอร์และเมตริกซ์ดังกล่าวในสมการ (7–27) โดยใช้วิธีการคูณตามที่ได้อธิบายในตอนแรกของบทนี้

$$(1 \quad 2) \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = (10 \quad 13)$$

$$1 \times ② \leftarrow = \rightarrow ② \times 2 \qquad (7\text{–}27)$$

ถ้าคูณเมตริกซ์ผกผัน (inverse of the matrix) (เราจะแสดงขั้นต่าง ๆ ในการคำนวณเมตริกซ์ผกผันในตอนถัดไป) ด้วยเวคเตอร์อันใหม่ $(10 \ \ 13)$ จะทำให้เวคเตอร์นี้กลับไปสู่จุดเดิมของมันคือ $(1 \ \ 2)$ ดังนั้น เมตริกซ์ผกผันจึงใช้ประโยชน์ในการทำให้เวคเตอร์อันหนึ่งที่อยู่ ณ จุดใดจุดหนึ่งของอวกาศมิติใดมิติหนึ่ง กลับไปสู่ตำแหน่งเดิมของมัน

เมตริกซ์ผกผันได้มาโดยการดำเนินวิธีการบางอย่างกับเมตริกซ์เดิม วิธีการต่าง ๆ เหล่านี้มีอยู่ 8 วิธีด้วยกัน และวิธีการเหล่านี้เป็นการดำเนินการด้านแถวนอน 4 วิธี และแถวตั้ง 4 วิธี ในการสร้างเมตริกซ์ผกผัน เราจะต้องใช้วิธีการแถวนอนหรือวิธีการแถวตั้งอย่างใดอย่างหนึ่งไม่ใช่สองวิธีผสมกัน

วิธีการแถวนอนและแถวตั้ง (Row and column procedures)

1. แถวนอนแถวหนึ่งอาจสับที่กับแถวนอนอีกแถวหนึ่งได้
2. แถวตั้งแถวหนึ่งอาจสับที่กับแถวตั้งอีกแถวหนึ่งได้
3. แถวนอนใดแถวนอนหนึ่งอาจคูณด้วยตัวคงที่ตัวหนึ่งได้
4. แถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่งอาจคูณด้วยตัวคงที่ตัวหนึ่งได้
5. แถวนอนแถวหนึ่งอาจบวกเข้ากับ หรือหักออกจากแถวนอนอีกแถวหนึ่งได้
6. แถวตั้งแถวหนึ่งอาจบวกเข้ากับ หรือหักออกจากแถวตั้งอีกแถวหนึ่งได้
7. ผลคูณของแถวนอนแถวหนึ่งอาจบวกเข้ากับ หรือหักออกจากแถวนอนอีกแถวหนึ่งได้
8. ผลคูณของแถวตั้งแถวหนึ่งอาจบวกเข้ากับ หรือหักออกจากแถวตั้งอีกแถวหนึ่งได้

ในการกลับเมตริกซ์ เราเริ่มด้วยการเขียนเมตริกซ์ไอเด็นติตี้ที่มีขนาดเท่ากัน ไว้ข้างเมตริกซ์นั้น ๆ ถัดจากนั้นจึงดำเนินการตามวิธีการแถวนอน หรือแถวตั้งกับเมตริกซ์ทั้งสองพร้อมกัน เมื่อเมตริกซ์เดิมถูกเปลี่ยนจนกลายมาเป็นเมตริกซ์ไอเด็นติตี้โดยวิธีการเหล่านี้แล้ว เมตริกซ์ไอเด็นติตี้ที่เดิมเขียนไว้ข้างเมตริกซ์นั้น ก็จะกลายมาเป็นเมตริกซ์ผกผัน ถ้าจะกล่าวอย่างสั้น ๆ วัตถุประสงค์ของเราก็คือ การเปลี่ยนเมตริกซ์เดิมให้เป็นเมตริกซ์ไอเด็นติตี้โดยดำเนินการตามวิธีการแถวนอนหรือแถวตั้งกับเมตริกซ์นั้น สมการ (7—28) แสดงการกลับเมตริกซ์ขนาด 2×2 ตามที่ปรากฏในสมการ (7—27) โดยใช้การปฏิบัติการทางด้านแถวนอน

เมตริกซ์เดิม	เมตริกซ์ไอเด็นติตี้	ขั้นดำเนินการ
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1. เขียนเมตริกซ์ไอเด็นติตี้ไว้ข้างเมตริกซ์เดิม
$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2. คูณแถวนอนที่ 1 ด้วย 1/2 (วิธีการที่ 3)
$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	3. คูณแถวนอนที่ 1 ด้วย 4 แล้วนำไปหักออกจากแถวนอนที่ 2 (วิธีการที่ 7)
$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	4. คูณแถวนอนที่ 2 ด้วย (—1) (วิธีการที่ 3)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	5. หัก 3/2 ของแถวนอนที่ 2 ออกจากแถวนอนที่ 1 (วิธีการที่ 7) (7—28)

เนื่องจากเมตริกซ์เดิมได้กลายมาเป็นเมตริกซ์ไอเด็นติตี้ เราจึงทราบว่าขบวนการกลับเมตริกซ์ได้เสร็จสิ้นสมบูรณ์แล้ว เพราะฉะนั้นเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์เดิม คือ

$$\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

เราสามารถตรวจสอบการคำนวณของเรา โดยการคูณเมตริกซ์ผกผันด้วยเวคเตอร์ (10 13) [จากสมการ (7—27)] เพื่อดูว่าการคูณจะขับเวคเตอร์นี้กลับไปสู่จุดเดิม (1 2) ของมันหรือไม่

$$(10 \quad 13) \times \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2) \qquad (7\text{—}29)$$

ดังนั้น เมตริกซ์ผกผัน $\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ แทนสเกลาร์กลุ่มหนึ่ง ซึ่งจะขับเวคเตอร์ (10 13) กลับไปสู่จุดเดิมของมัน (1 2)

เมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่มีค่าของดีเตอร์มินันต์ไม่เท่ากับศูนย์จะต้องมีเมตริกซ์ผกผันอันหนึ่ง สมการ (7—30) แสดงการกลับเมตริกซ์ขนาด 3 × 3 โดยใช้วิธีการแถวตั้ง

เมตริกซ์เดิม	เมตริกซ์ไอเด็นติตี้	ขั้นดำเนินการ
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1. เขียนเมตริกซ์ไอเด็นติตี้ไว้ข้างเมตริกซ์เดิม
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2. คูณแถวตั้งที่ 1 ด้วย 2 และนำไปหักออกจากแถวตั้งที่ 2 (วิธีการที่ 8)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1- & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	3. บวกแถวตั้งที่ 2 เข้ากับแถวตั้งที่ 1 (วิธีการที่ 6)
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	4. หักแถวตั้งที่ 1 ออกจากแถวตั้งที่ 3 (วิธีการที่ 6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 5. บวก 2 เท่าของแถวตั้งที่ 2 เข้ากับแถวตั้งที่ 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 6. บวกแถวตั้งที่ 3 เข้ากับแถวตั้งที่ 2 (วิธีการที่ 6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 7. หักแถวตั้งที่ 3 ออกจากแถวตั้งที่ 1 (วิธีการที่ 6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ 8. คูณแถวตั้งที่ 2 ด้วย −1 (วิธีการที่ 4)

(7–30)

ในการตรวจสอบการคำนวณของเราในครั้งนี้ เราจะใช้วิธีที่สอง กล่าวคือ คูณเมตริกซ์ผกผันด้วยเมตริกซ์เดิมเพื่อดูว่าได้เมตริกซ์ไอเด็นติตี้หรือไม่ ดังปรากฏในสมการ (7–31)

เมตริกซ์ เดิม	เมตริกซ์ ผกผัน	เมตริกซ์ ไอเด็นติตี้

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7\text{–}31)$$

การใช้การกลับเมตริกซ์ในการแก้สมการ

(Use of matrix inversion to solve equations)

มาถึงขั้นนี้อาจมีผู้ถามว่า เมตริกซ์ผกผันใช้ประโยชน์อะไรได้บ้าง ? อาจอธิบายได้ว่าการกลับเมตริกซ์สามารถนำไปใช้ในการแก้สมการหลายชั้นได้โดยง่าย ความจริงใช้ในการโปรแกรมแบบเส้นตรง) ลองพิจารณาสมการชุดต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 &= 8 \\ X_1 + 4X_2 &= 9 \end{aligned} \qquad (7\text{–}32)$$

เราอาจแทนสมการทั้งสองนี้โดยใช้สูตรทั่วไปทางพีชคณิตธรรมดา ดังนี้

$$(A)\,X = B$$

ให้ (A) = เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

X = เวคเตอร์แถวตั้ง $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

B = เวคเตอร์แถวตั้งของตัวคงที่ $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

ต่อไปถ้าเราต้องการหาค่าของ X_1 และ X_2 เราอาจจะเริ่มด้วยการหาค่าของ X ในสมการพีชคณิตธรรมดา ดังนี้

ถ้า $(A)X = B$

คูณสมการทั้งสองข้างด้วย $1/(A)$

$$\frac{1}{\cancel{(A)}}\cancel{(A)}X \qquad X = \frac{1}{(A)}.B$$

เมื่อตัดกันแล้ว $X = \frac{1}{(A)}.B$

สมการนี้ชี้ให้เราทราบว่าเราสามารถหาค่าที่ถูกต้องของ X_1 และ X_2 โดยคูณ B ด้วย $1/(A)$ แต่ $1/(A)$ คืออะไร ? 1 หารด้วยเมตริกซ์อันหนึ่งมีความสำคัญอย่างไร ? เราจะเริ่มด้วยตัวเลขธรรมดาตัวใดตัวหนึ่ง สมมติว่า 2

ต่อไปถ้า $2 \times 3 = 6$ และ $6 \times 1/2 = 3$ เราจะเห็นได้ว่า 1 หารด้วยตัวเลขตัวหนึ่ง (โดยทั่วไปเราเรียกว่า ส่วนกลับ) มีคุณสมบัติอย่างหนึ่งในการทำให้ได้ผลที่กลับกันกับการคูณนั้น ๆ

เราได้นำแนวความคิดนี้เข้ามาแล้วในตอนแรกของส่วนนี้ เกี่ยวกับการกลับเมตริกซ์ ซึ่งเราได้กล่าวไว้ว่า เมตริกซ์ คือกลุ่มของสเกลาร์กลุ่มหนึ่งที่ทำให้เวคเตอร์อันหนึ่งเคลื่อนไปสู่จุดใดจุดหนึ่งในอวกาศมิติใดมิติหนึ่ง และเมื่อคูณเมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์เดียวกันนี้ด้วยเวคเตอร์อันใหม่ จะทำให้เวคเตอร์นี้กลับไปสู่ตำแหน่งเดิมของมัน ดังนั้น เมตริกซ์ผกผันจึงอาจถือได้ว่าเป็นส่วนกลับของเมตริกซ์นั้น

เพราะฉะนั้น เราอาจแก้สมการ (7–32) ได้โดยคูณเวคเตอร์แถวตั้งของตัวคงที่ (B) ด้วยเมตริกซ์ผกผันของ (A) ดังนี้

X = (เมตริกซ์ผกผันของ A) $\cdot$ (B)

$$= \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $X_1 = 1$

$X_2 = 2$

ในลักษณะเช่นนี้เราสามารถแก้สมการชุดหนึ่ง ๆ โดยใช้พีชคณิตเมตริกซ์

ตามตัวอย่างของเราข้างต้น การแก้สมการโดยวิธีแทนค่าอาจทำได้รวดเร็วกว่า แต่ถ้าเป็นสมการชุดใหญ่ ๆ การแก้สมการโดยวิธีพีชคณิตอาจได้คำตอบรวดเร็วกว่าวิธีแทนค่าก็ได้

แบบฝึกหัด

7—1 จงบวกเมตริกซ์ต่อไปนี้เข้าด้วยกัน

ก. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} =$

ข. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$

7—2 จงหักเมตริกซ์ต่อไปนี้ออกจากกัน

ก. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$

ข. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} =$

7—3 จงคูณเมตริกซ์ต่อไปนี้

ก. $(1 \quad 3) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

ข. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} =$

7—4 จงคูณเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

7—5 จงสร้างเมตริกซ์สับที่ของเมตริกซ์ต่อไปนี้

ก. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ข. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

7—6 จงหาเมตริกซ์ของตัวประกอบร่วมของเมตริกซ์ต่อไปนี้

ก. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ ข. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7—7 จงหาเมตริกซ์ประชิดของเมตริกซ์ต่อไปนี้

ก. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ข. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7—8 จงกลับเมตริกซ์ต่อไปนี้โดยใช้ความสัมพันธ์ทางด้านแถวตั้ง

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7—9 บริษัท คิงก่อสร้าง จำกัด กำลังสร้างหลังคามาตรฐาน 2 แบบ (แบบ A และแบบ B) ให้แก่โครงการสร้างบ้านโครงการหนึ่ง หลังคาแบบ A ต้องใช้วัสดุ S 25 หน่วยในราคาหน่วยละ 60 บาท และวัสดุ T 10 หน่วยในราคาหน่วยละ 40 บาท หลังคาแบบ B ต้องใช้วัสดุ R 16 หน่วยในราคาหน่วยละ 110 บาท และวัสดุ T 25 หน่วยในราคาหน่วยละ 40 บาท ในงวดระยะเวลาสี่เดือนข้างหน้านี้ คาดว่าจะสร้างหลังคาแบบ A 30 หลัง และแบบ B 14 หลัง ให้ใช้พีชคณิตเมตริกซ์คำนวณต้นทุนวัสดุทั้งสิ้นที่คาดไว้

7—10 ให้ใช้พีชคณิตเมตริกซ์แก้สมการต่อไปนี้ :

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 - X_3 &= 9 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 9 \\ 3X_1 - X_2 - X_3 &= -1 \end{aligned}$$

บทที่ 8

การโปรแกรมแบบเส้นตรง – วิธีกราฟและวิธีพีชคณิต

(LINEAR PROGRAMMING: GRAPHIC AND ALGEBRAIC METHODS)

การดำเนินงานขององค์การธุรกิจ มีขนาดและความสลับซับซ้อนเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ขนาดและความสลับซับซ้อนที่เพิ่มขึ้นนี้ ได้นำมาซึ่งตัวแปรผันใหม่ ปัญหาใหม่ และความไม่แน่นอนใหม่ สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ก่อให้เกิดความจำเป็นที่จะต้องมีผู้จัดการยุคใหม่ดังที่เห็นกันอยู่ในปัจจุบันนี้ ถ้าผู้จัดการเหล่านี้ต้องการที่จะเผชิญกับการทำการตัดสินใจที่สำคัญ ๆ เขาจะต้องหันไปพึ่งเครื่องมือและเทคนิคใหม่ ๆ มากขึ้น

การโปรแกรมแบบเส้นตรง (linear programming) เป็นเครื่องมือที่ใหม่กว่าทางวิทยาศาสตร์อย่างหนึ่ง ที่ใช้ช่วยการทำการตัดสินใจของฝ่ายจัดการ นักเศรษฐศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ต่างก็มีส่วนในการพัฒนาเครื่องมือนี้ การโปรแกรมแบบเส้นตรงเริ่มขึ้นในระหว่างปี 1920—1929 จากวิธีวิเคราะห์ที่เรียกว่า "input-output method of analysis" ซึ่งคิดขึ้นโดยนักเศรษฐศาสตร์ ชื่อ วาสซิลี่ ดับบลิว เลียนตีฟ (Wassily W. Leontief) แต่การโปรแกรมแบบเส้นตรงที่ใช้ในปัจจุบัน มาจากผลงานของนักคณิตศาสตร์ ชื่อ ยอร์จ บี แดนท์ซิก (George B. Dantzig) ซึ่งเป็นผู้คิดค้นการโปรแกรมแบบเส้นตรงวิธี ซิมเพล็กซ์ (simplex method) ในปี ค.ศ. 1947

การโปรแกรมแบบเส้นตรง คืออะไร ?

องค์การธุรกิจโดยทั่วไปต้องเผชิญกับปัญหาการแบ่งสันปันส่วนทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้เกิดประโยชน์มากที่สุด ทรัพยากรเหล่านี้หมายรวมถึงเงิน วัตถุดิบ เครื่องจักร สถานที่ เวลา และพนักงาน ฝ่ายจัดการประสงค์ที่จะกำหนดหรือจัดสรรทรัพยากรเหล่านี้เพื่อทำให้จำนวนเงินกำไรที่ได้รับอยู่ในระดับสูงสุด ทรัพยากรแต่ละชนิดย่อมมีอยู่เป็นจำนวนจำกัดจำนวนหนึ่งเท่านั้น จำนวนที่มีอยู่อย่างสูงที่สุด ณ ขณะใดขณะหนึ่งจะเป็นขอบเขตจำกัด (limitation) หรือข้อจำกัด (restriction) ของทรัพยากรนั้น เช่น เมื่อเงินทุกบาทที่ธุรกิจมีอยู่ได้มีข้อผูกพันที่จะนำไปใช้เพื่อวัตถุประสงค์ต่าง ๆ กันแล้ว ผู้จัดการก็ต้องยอมรับอย่างหน้าเศร้าว่า "นั่นเป็นเงินเท่าที่เรามีอย่ ไม่มีอีกแล้ว"

การโปรแกรมแบบเส้นตรง เป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งในการหาทางใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้เกิดประโยชน์มากที่สุด คุณศัพท์คำว่า "แบบเส้นตรง" ในที่นี้ ใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรผันสองตัวหรือมากกว่านั้น ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรผันเหล่านี้ เป็นความสัมพันธ์ที่เป็นปฏิภาคโดยตรงและแน่นอน ตัวอย่างเช่น ถ้าจำนวนชั่วโมงการผลิตที่ใช้ในการดำเนินงานอย่างหนึ่งเปลี่ยนแปลงไป 10% จะทำให้จำนวนผลิตเปลี่ยนแปลงไปเป็นจำนวน 10% เช่นกัน คำว่า "การโปรแกรม" หมายถึงการใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์บางอย่างในการหาคำเฉลยที่ดีที่สุดสำหรับปัญหาที่เกี่ยวกับทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด

ข้อกำหนดที่สำคัญ ๆ ของปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรง
(Major Requirements of a Linear Programming Problem)

ก่อนที่จะศึกษาถึงการหาคำเฉลยโดยการโปรแกรมแบบเส้นตรง เราจะพิจารณาถึงข้อกำหนดที่สำคัญของปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรงของธุรกิจแห่งหนึ่ง สมมติว่า ธุรกิจนี้เป็นผู้ผลิตเครื่องเรือน 2 ชนิด คือ โต๊ะกับเก้าอี้

ประการแรก จะต้องมีการกำหนดเป้าหมายของธุรกิจ เป้าหมายสำคัญของผู้ผลิตคนนี้คือการทำให้จำนวนเงินกำไรที่ได้รับอยู่ในระดับสูงสุด เราทราบแล้วว่า กำไรไม่ได้สัมพันธ์กับปริมาณขายในลักษณะเป็นเส้นตรง ตัวแปรผันที่สัมพันธ์กับปริมาณการขายในลักษณะเป็นเส้นตรงคือ ส่วนช่วยเหลือทั้งสิ้น (total contribution) ท่านคงจำได้ว่า ส่วนช่วยเหลือทั้งสิ้นคือ (ราคาขายต่อหน่วยหักด้วยต้นทุนแปรผันต่อหน่วย) × (ปริมาณการขายเป็นจำนวนหน่วย)

ประการที่สอง จะต้องมีทางเลือกปฏิบัติหลายทาง และในบรรดาทางเลือกเหล่านี้จะต้องมีทางเลือกหนึ่งที่ทำให้บรรลุซึ่งเป้าหมายที่วางไว้ เช่น ธุรกิจตามตัวอย่างข้างต้น ควรจะปันส่วนกำลังการผลิตที่มีอยู่ให้แก่การผลิตโต๊ะและเก้าอี้ ในอัตราส่วน 50 : 50 ? หรือ 25 : 75 ? หรือ 70 : 30 ? หรืออัตราส่วนอื่น ?

ประการที่สาม ทรัพยากรที่มีอยู่จะต้องมีอยู่เป็นจำนวนจำกัด โรงงานทำเครื่องเรือนตามตัวอย่างมีจำนวนชั่วโมงเครื่องจักรอยู่เป็นจำนวนจำกัด เมื่อเป็นเช่นนั้น ถ้าจะใช้ชั่วโมงไปในการผลิตโต๊ะมากขึ้น จำนวนเก้าอี้ที่ผลิตได้ก็จะน้อยลง

ประการที่สี่ ตัวแปรผันในปัญหานี้จะต้องมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน เช่น ถ้ากำไรต่อโต๊ะ 1 ตัวเท่ากับ 8 บาท และกำไรต่อเก้าอี้ 1 ตัวเท่ากับ 6 บาท จำนวนเงินกำไรที่ได้รับทั้งสิ้นจะสะท้อนให้เห็นอัตราส่วนระหว่างโต๊ะกับเก้าอี้ที่ผลิต

ประการที่ห้า เราจะต้องสามารถแสดงเป้าหมายและขอบเขตจำกัดของธุรกิจนี้ ออกมาในรูปสมการหรืออสมการทางคณิตศาสตร์ และสมการและอสมการเหล่านี้จะต้องเป็นสมการ

หรือ อสมการแบบเส้นตรง เราอาจแสดงเป้าหมายของผู้ผลิตเครื่องเรือนตามตัวอย่างข้างต้นซึ่งได้แก่จำนวนเงินกำไรที่ได้รับออกมาในรูปสมการอย่างง่ายดังนี้ :

กำไร = (8 บาท) (จำนวนโต๊ะ) + (6 บาท) (จำนวนเก้าอี้)

อสมการ กับ สมการ
(Inequalities Versus Equations)

แม้ว่าเราจะไม่คุ้นกับอสมการดังเช่นสมการก็ตาม แต่อสมการเป็นความสัมพันธ์ที่สำคัญอย่างหนึ่งในการโปรแกรมแบบเส้นตรง สมการและอสมการแตกต่างกันอย่างไร ? โดยปกติเราใช้เครื่องหมายเท่ากับ (=) ที่เรารู้จักดีแทนสมการ สมการเป็นข้อความที่เฉพาะเจาะจงที่แสดงออกมาในรูปคณิตศาสตร์ สมการของเราตามที่ปรากฏในย่อหน้าก่อนคือ P = (8 บาท) (จำนวนโต๊ะ) + (6 บาท) (จำนวนเก้าอี้)

แต่ปัญหาทางธุรกิจหลายต่อหลายอย่าง ไม่อาจแสดงออกมาในรูปสมการที่ดีและเรียบร้อยเช่นนั้น แทนที่จะเป็นจำนวนที่แน่นอนจำนวนหนึ่ง เราอาจต้องการแต่เพียงกำหนดจำนวนต่ำสุด (minimum) หรือจำนวนสูงสุด (maximum) เท่านั้น ในลักษณะเช่นนี้เราต้องอาศัยอสมการซึ่งเป็นความสัมพันธ์อีกแบบหนึ่งที่แสดงออกมาในรูปคณิตศาสตร์ เช่น ข้อความที่ว่า "ต้นทุนของโต๊ะ 5 ตัว กับเก้าอี้ 4 ตัว จะต้องไม่เกิน 120 บาท" เมื่อเขียนเป็นอสมการคือ $5T + 4C \leq 120$ บาท เครื่องหมาย $\leq$ หมายความว่า "เท่ากับหรือน้อยกว่า" ในกรณีนี้ค่าใด ๆ ที่เท่ากับหรือน้อยกว่า 120 บาท เป็นค่าที่ทำให้อสมการข้างต้นสมจริง แต่ถ้าเป็นสมการ ต้นทุนของโต๊ะ 5 ตัวกับเก้าอี้ 4 ตัวจะต้องเท่ากับ 120 บาท ไม่มากหรือไม่น้อยกว่าจำนวนนี้ ดังนั้นสมการจึงกำกัดกว่าอสมการมาก

เราอาจแสดงต้นทุนของโต๊ะ 5 ตัวกับเก้าอี้ 4 ตัวอีกวิธีหนึ่ง เราอาจจะบอกว่าต้นทุนของโต๊ะ 5 ตัวกับเก้าอี้ 4 ตัว อย่างน้อยจะต้องเท่ากับ 120 บาท ถ้าเขียนเป็นอสมการ ข้อความนี้คือ $5T + 4C \geq 120$ บาท เครื่องหมาย $\geq$ หมายความว่า "เท่ากับหรือมากกว่า" ค่าใด ๆ ที่เท่ากับหรือมากกว่า 120 บาท เป็นค่าที่ทำให้อสมการนี้สมจริง

ข้อกำกัดของปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรง ส่วนมากแสดงออกมาในรูปอสมการ เราจะเห็นได้ต่อไปว่า ข้อกำกัดเหล่านี้จะกำหนดขอบเขตขั้นสูงหรือขอบเขตขั้นต่ำ ข้อกำกัดเหล่านี้ไม่ได้แสดงออกมาในรูปสมการที่แน่นอน ดังนั้น จึงทำให้ได้คำตอบในลักษณะที่แตกต่างกันได้หลายอย่าง

การโปรแกรมแบบเส้นตรงโดยวิธีกราฟ
(Linear Programming by Graphic Methods)

เนื่องจากว่าเราไม่สามารถเขียนกราฟได้เกินสามมิติ เพราะฉะนั้น การโปรแกรมแบบเส้นตรงโดยวิธีกราฟจึงใช้ได้เฉพาะในกรณีที่มีตัวแปรผัน (ในกรณีนี้คือ ผลิตภัณฑ์) ไม่เกิน 3 ตัว เราอาจแสดงวิธีกราฟได้ชัดแจ้งที่สุด ถ้านำไปใช้กับผู้ผลิตที่ต้องการกำหนดส่วนผสมของผลิตภัณฑ์ ที่จะทำการผลิตและขายที่ทำกำไรสูงสุด

สมมติว่า ผู้ผลิตตามตัวอย่างข้างต้นผลิตผลิตภัณฑ์ 2 ชนิด คือโต๊ะและเก้าอี้ ผ่านศูนย์เครื่องจักร 2 ศูนย์ ศูนย์เครื่องจักรที่ 1 มีชั่วโมงอยู่อย่างมากที่สุด 60 ชั่วโมง ศูนย์เครื่องจักรที่ 2 อาจทำงานได้ถึง 48 ชั่วโมง การผลิตโต๊ะ 1 ตัว จะต้องใช้ 4 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 และ 2 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 การผลิตเก้าอี้ 1 ตัวจะต้องใช้ 2 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 และ 4 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 2

ถ้ากำไรต่อโต๊ะ 1 ตัวเท่ากับ 8 บาท และเก้าอี้ 1 ตัวเท่ากับ 6 บาท ปัญหาที่เกิดขึ้นคือการกำหนดส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้ที่ดีที่สุด ที่อาจเป็นไปได้ที่จะทำการผลิตและขายเพื่อที่จะได้กำไรสูงสุด ในปัญหานี้มีขอบเขตจำกัด (limitation) หรือที่เรียกว่าข้อยับยั้ง (restraint) อยู่ 2 อย่างคือ เวลาที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 และเวลาที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2

ให้ P_1 แทนจำนวนโต๊ะที่ผลิตที่ดีที่สุด และ P_2 แทนจำนวนเก้าอี้ที่ผลิตที่ดีที่สุด ข้อสนเทศที่จะต้องใช้ในการหาคำเฉลยของปัญหานี้ ได้สรุปไว้ในตาราง 8—1

ตาราง 8—1

ข้อสนเทศเกี่ยวกับปัญหาการผลิต

ศูนย์เครื่องจักร	จำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ต่อผลิตภัณฑ์ 1 หน่วย: โต๊ะ P_1	จำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ต่อผลิตภัณฑ์ 1 หน่วย: เก้าอี้ P_2	จำนวนชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งสิ้น
ที่ 1	4	2	60
ที่ 2	2	4	48
กำไรต่อหน่วย	8 บาท	6 บาท	

1. **ขั้นที่หนึ่ง** ในการหาคำเฉลยของปัญหานี้ เราจะต้องแสดงข้อสนเทศในรูปคณิตศาสตร์ใหม่ ในการนี้เราจะต้องนำเอาคำใหม่คำหนึ่งคือ "ฟังก์ชั่นเป้าหมาย" (objective function) เข้ามาใช้ "ฟังก์ชั่นเป้าหมาย" คือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนผลิตกับกำไรที่ได้รับ

Z = กำไร

$8P_1$ บาท = กำไรทั้งสิ้นจากการขายโต๊ะ

$6P_2$ บาท = กำไรทั้งสิ้นจากการขายเก้าอี้

Z = $8P_1$ บาท + $6P_2$ บาท

เวลาที่ใช้ไปในการผลิตผลิตภัณฑ์ทั้งสอง จะต้องไม่เกินจำนวนชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งสิ้นในศูนย์เครื่องจักรทั้งสอง กล่าวอีกนัยหนึ่ง จำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตโต๊ะ 1 ตัวคูณด้วยจำนวนโต๊ะที่ผลิต บวกด้วยจำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตเก้าอี้ 1 ตัวคูณด้วยจำนวนเก้าอี้ที่ผลิต จะต้องเท่ากับหรือน้อยกว่าจำนวนชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรแต่ละศูนย์ เราอาจแสดงข้อกำกัดดังกล่าวในเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

$4P_1 + 2P_2 \leq 60$ ศูนย์เครื่องจักรที่ 1

$2P_1 + 4P_2 \leq 48$ ศูนย์เครื่องจักรที่ 2

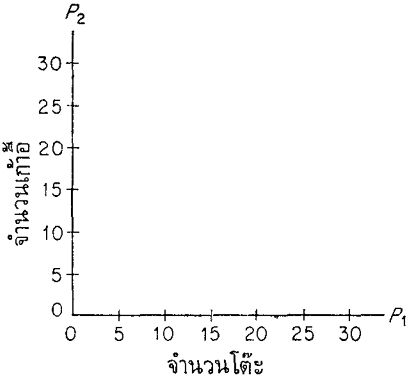
อสมการแรกข้างต้นแสดงให้เห็นว่า ชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตโต๊ะ 1 ตัว (4 ชั่วโมง) คูณด้วยจำนวนโต๊ะที่ผลิต (P_1) บวกด้วยชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตเก้าอี้ 1 ตัว (2 ชั่วโมง) คูณด้วยจำนวน เก้าอี้ที่ผลิต (P_2) จะต้องเท่ากับหรือน้อยกว่า 60 ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 เราอาจอธิบายอสมการที่ 2 ได้ในทำนองคล้ายคลึงกัน จะสังเกตได้ว่า อสมการทั้งสองแทนข้อกำกัดทางด้านกำลังการผลิตที่มีต่อจำนวนผลิต และเกี่ยวเนื่องไปถึงกำไรที่ได้รับอีกด้วย

เพื่อที่จะให้คำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่มีความหมาย ค่าของ P_1 และ P_2 ที่คำนวณได้จะต้องเป็นบวก ค่าที่ได้ต้องแทนโต๊ะและเก้าอี้จริง ดังนั้น ค่าทุกค่าของคำเฉลยสำหรับปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรงจะต้องเท่ากับหรือมากกว่าศูนย์ ($P_1 \geq 0$, $P_2 \geq 0$) ข้อยับยั้งนี้หมายความว่า คำเฉลยที่ได้จะต้องอยู่ในควอแดรนต์ที่ทั้ง X และ Y ต่างก็มีค่าเป็นบวก (ดูรูป 6–6)

เราอาจสรุปปัญหานี้ในรูปคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ :
ทำให้ $Z = 8P_1 + 6P_2$ อยู่ในระดับสูงสุด
โดยขึ้นอยู่กับข้อยับยั้งเหล่านี้

$$4P_1 + 2P_2 \leq 60$$
$$2P_1 + 4P_2 \leq 48$$
$$P_1 \geq 0$$
$$P_2 \geq 0$$

2. **ขั้นที่สอง** เขียนข้อยับยั้งของปัญหานี้ในกราฟโดยให้ผลิตภัณฑ์ P_1 อยู่บนแกน x และผลิตภัณฑ์ P_2 อยู่บนแกน y รูป 8–1 แสดงแกน P_1 และ P_2



รูป 8–1

เราอาจเขียนอสมการ $4P_1 + 2P_2 \leq 60$ ไว้บนกราฟโดยหาตำแหน่งของจุดปลายทั้งสองของอสมการนี้ก่อน แล้วต่อจุดทั้งสองเข้าด้วยกันโดยเส้นตรงเส้นหนึ่ง เราอาจหาจุดปลายทั้งสองของอสมการได้ในลักษณะดังนี้

ก. ถ้าเราสมมติว่าเวลาทั้งหมดที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 ถูกใช้ไปในการผลิตเก้าอี้อย่างเดียว กล่าวคือไม่มีการผลิตโต๊ะเลย เราอาจผลิตเก้าอี้ได้ 30 ตัว ดังนั้น ถ้าเราให้ $P_1 = 0,\ P_2 \leq 30$

พิสูจน์ : $4P_1 + 2P_2 \leq 60$

$4(0) + 2P_2 \leq 60$

$P_2 \leq 30$ ถ้าเราผลิตเก้าอี้ในจำนวนสูงสุด P_2 จะเท่ากับ 30

ดังนั้นจุดแรกของเราคือ (0, 30) จุดนี้แสดงให้เห็นว่า มีการผลิตโต๊ะ 0 ตัวและการผลิตเก้าอี้ 30 ตัว

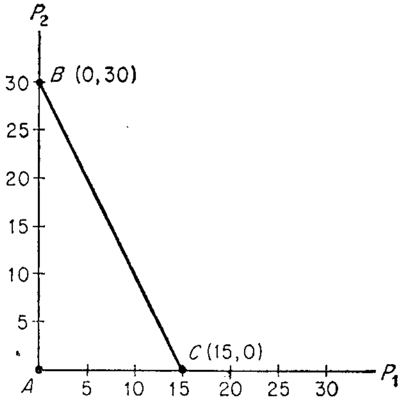
ข. เพื่อที่จะหาจุดที่สอง สมมติว่า เวลาทั้งหมดที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 ถูกใช้ไปในการผลิตโต๊ะอย่างเดียว กล่าวคือ ไม่มีการผลิตเก้าอี้เลย ภายใต้ข้อสมมตินี้ เราสามารถผลิตโต๊ะได้ 15 ตัว ดังนั้น ถ้าเราให้ $P_2 = 0,\ P_1 \leq 15$

พิสูจน์ : $4P_1 + 2P_2 \leq 60$

$4P_1 + 2(0) \leq 60$

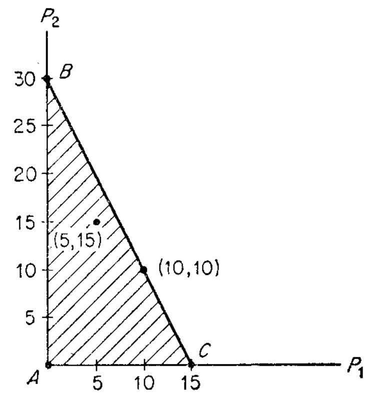
$P_1 \leq 15$ ถ้าเราผลิตโต๊ะในจำนวนสูงสุด P_1 จะเท่ากับ 15 ดังนั้นจุดที่สองของเราคือ (15, 0) จุดนี้แสดงให้เห็นว่ามีการผลิตโต๊ะ 15 ตัว และการผลิตเก้าอี้ 0 ตัว

หลังจากที่หาตำแหน่งของจุดทั้งสองนี้คือ (0, 30) และ (15, 0) และต่อจุดทั้งสองเข้าด้วยกัน เราจะได้เส้นตรงตามที่ปรากฏในรูป 8–2



รูป 8–2 กราฟของสมการ $4P_1 + 2P_2 = 60$

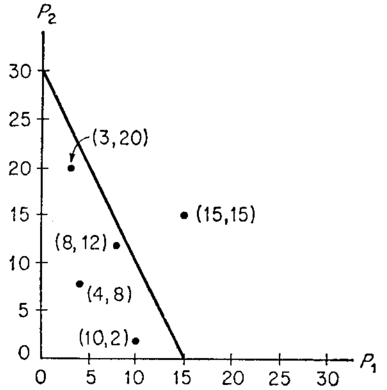
ต่อไป ลองพิจารณาเส้นตรงเดียวกันนี้ตามที่ปรากฏในรูป 8–3



รูป 8–3 ข้อกำกัดทางด้านกำลังการผลิตในศูนย์เครื่องจักรที่ 1

ส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้ใด ๆ ที่อยู่บนเส้น BC จะใช้ชั่วโมงทั้งหมด 60 ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 หมดไปพอดี ตัวอย่างเช่น การผลิตโต๊ะ 10 ตัวและเก้าอี้ 10 ตัว (จุด 10, 10 บนกราฟ) จะใช้ (10)(4 ชั่วโมง) + (10)(2 ชั่วโมง) = 60 ชั่วโมง หมด

ไปพอดี แต่ถ้าสมมติว่าธุรกิจนี้สามารถขายโต๊ะได้เพียง 5 ตัวและเก้าอี้ 15 ตัว (จุด 5, 15 บนกราฟ) เท่านั้น จุดนี้ไม่ได้อยู่บนเส้น BC แต่เราก็อาจผลิตโต๊ะและเก้าอี้ในส่วนผสมดังกล่าวได้ โดยใช้เวลาไม่เกิน 60 ชั่วโมงที่มีอยู่ (5) (4 ชั่วโมง) + (15) (2 ชั่วโมง) = 50 ชั่วโมง และ 50 ชั่วโมง $\leq$ 60 ชั่วโมง เราอาจผลิตตามจุดนี้ (5, 15) หรือส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้ใด ๆ ที่อยู่ในพื้นที่ที่แรเงาไว้ทางซ้ายมือของเส้น BC ได้ โดยใช้เวลาไม่เกิน 60 ชั่วโมงที่มีอยู่ พื้นที่ที่แรเงาไว้ ABC ไม่ใช่เส้น BC แทนอสมการ $4P_1+2P_2 \leq 60$ โดยใช้กราฟ



รูป 8–4 กราฟของสมการ
$4P_1 + 2P_2 = 60$
โดยมีจุดหลายจุดแสดงส่วนผสมต่าง ๆ
ของ P_1 และ P_2

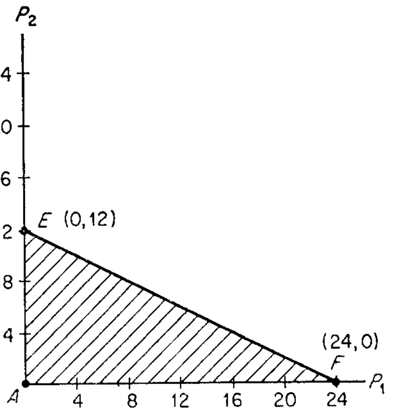
ตัวอย่างเช่น จุดต่าง ๆ ตามที่ปรากฏในรูป 8–4 แสดงส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

โต๊ะ 4 ตัวกับเก้าอี้ 8 ตัว ต้องใช้ 4(4) + 2(8) = 32 ชั่วโมง
โต๊ะ 10 ตัวกับเก้าอี้ 2 ตัว ต้องใช้ 4(10) + 2(2) = 44 ชั่วโมง
โต๊ะ 3 ตัวกับเก้าอี้ 20 ตัว ต้องใช้ 4(3) + 2(20) = 52 ชั่วโมง
โต๊ะ 8 ตัวกับเก้าอี้ 12 ตัว ต้องใช้ 4(8) + 2(12) = 56 ชั่วโมง
โต๊ะ 15 ตัวกับเก้าอี้ 15 ตัว ต้องใช้ 4(15) + 2(15) = 90 ชั่วโมง

จะสังเกตได้ว่า เวลาที่ต้องการเพื่อใช้ในการผลิตโต๊ะและเก้าอี้ตามส่วนผสมสี่อย่างแรก ไม่เกิน 60 ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 แต่เราไม่อาจผลิตได้ตามส่วนผสมที่ห้า เพราะจำนวนชั่วโมงที่ต้องการเกินกว่าจำนวนชั่วโมงที่มีอยู่

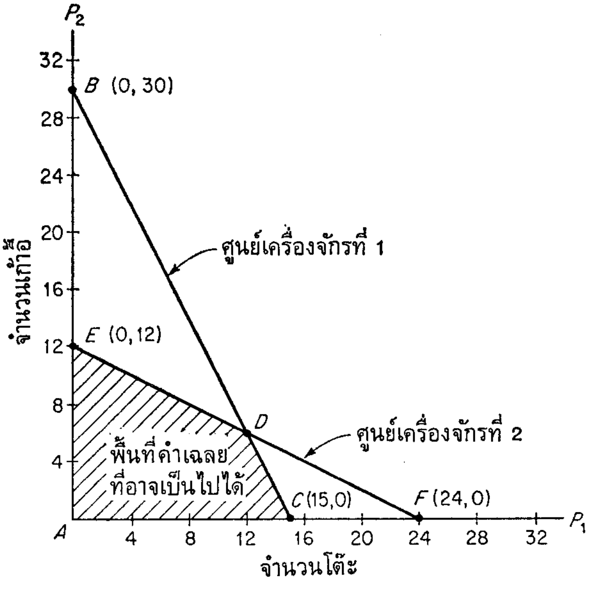
เราอาจนำคำอธิบายที่คล้ายคลึงกันนี้ ไปใช้กับกราฟของอสมการข้อยับยั้งสำหรับศูนย์เครื่องจักรที่ 2 $2P_1 + 4P_2 \leq 48$ เส้น EF ในรูป 8–5 แทนส่วนผสมทุก ๆ ส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้ที่จะใช้เวลาทั้งหมด 48 ชั่วโมงที่มีอยู่ให้หมดไปพอดี ($2P_1 + 4P_2 = 48$) พื้นที่ AEF ที่แรเงาไว้จะประกอบไปด้วยส่วนผสมทั้งหมดที่อาจผลิตได้โดยใช้เวลาไม่เกิน 48 ชั่วโมง ($2P_1 + 4P_2 \leq 48$) จุดใด ๆ หรือส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้ที่ตกอยู่ภายในพื้นที่

AEF ที่แรเงาไว้ จะไม่ขัดต่อข้อกำกัดทางด้านเวลาที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 ดังนั้น พื้นที่ที่แรเงาไว้ไม่ใช่เส้น EF จึงแทนอสมการ $2P_1 + 4P_2 \leq 48$ โดยใช้กราฟ



รูป 8—5 ข้อกำกัดทางด้านกำลังการผลิตในศูนย์เครื่องจักรที่ 2

เพื่อที่จะผลิตโต๊ะ 1 ตัวหรือเก้าอี้ 1 ตัวให้สมบูรณ์ เราจะต้องใช้ศูนย์เครื่องจักรทั้งสองศูนย์ หมายความว่าส่วนผสมที่ดีที่สุดของโต๊ะและเก้าอี้ จะต้องตกอยู่ภายในพื้นที่ที่อยู่ทางซ้ายมือของเส้น BC (รูป 8—3) และเส้น EF (รูป 8—5) การผลิตตามส่วนผสมที่ดีที่สุดนี้จะต้องใช้เวลาไม่เกินเวลาที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรศูนย์ใดศูนย์หนึ่ง ในการหาพื้นที่ร่วมดังกล่าว เราจะต้องเขียนอสมการที่มีอยู่เดิมทั้งสองอสมการ (ดูรูป 8—3 และรูป 8—5) ไว้บนแกน P_1 และ P_2 เดียวกัน ดูรูป 8—6



รูป 8—6 การแสดงข้อยับยั้งของปัญหาโดยกราฟ

พื้นที่ที่แทนส่วนผสมใดๆ ที่ใช้เวลาไม่เกินข้อยับยั้งของศูนย์เครื่องจักรศูนย์ใดศูนย์หนึ่ง อันได้แก่พื้นที่ AEDC ในรูป 8—6 จะประกอบด้วยส่วนผสมทุก ๆ ส่วนผสมของโต๊ะกับเก้าอี้ที่ไม่ขัดกับอสมการ :

$4P_1 + 2P_2 \leq 60$

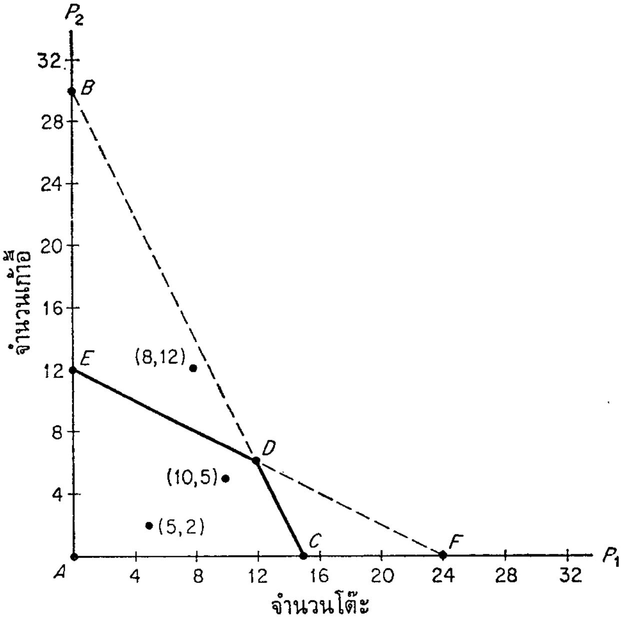
$2P_2 + 4P_2 \leq 48$

ตัวอย่างเช่น :

ก. การผลิตโต๊ะ 5 ตัวกับเก้าอี้ 2 ตัว

ศูนย์เครื่องจักรที่ 1	$4P_1 + 2P_2$	$\leq$	60	ชั่วโมงที่มีอยู่
	$4(5) + 2(2)$	$=$	24	ชั่วโมงที่ต้องการ
ศูนย์เครื่องจักรที่ 2	$2P_1 + 4P_2$	$\leq$	48	ชั่วโมงที่มีอยู่
	$2(5) + 4(2)$	$=$	18	ชั่วโมงที่ต้องการ

ในการผลิตโต๊ะ 5 ตัว กับเก้าอี้ 2 ตัว จะต้องใช้เวลาไม่มากไปกว่าเวลาที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรทั้งสอง (ดูรูป 8—7)



รูป 8—7 พื้นที่สำหรับคำเฉลยที่อาจเป็นไปได้ พร้อมด้วยตัวอย่าง ก. ข. และ ค.

ข. การผลิตโต๊ะ 10 ตัวกับเก้าอี้ 5 ตัว

ศูนย์เครื่องจักรที่ 1	$4P_1 + 2P_2$	$\leq$	60	ชั่วโมงที่มีอยู่
	$4(10) + 2(5)$	$=$	50	ชั่วโมงที่ต้องการ
ศูนย์เครื่องจักรที่ 2	$2P_1 + 4P_2$	$\leq$	48	ชั่วโมงที่มีอยู่
	$2(10) + 4(5)$	$=$	40	ชั่วโมงที่ต้องการ

ส่วนผสมของโต๊ะ 10 ตัวกับเก้าอี้ 5 ตัว คงเป็นไปตามข้อยับยั้งทั้งสองเช่นกัน (ดูรูป 8—7)

ค. การผลิตโต๊ะ 8 ตัวกับเก้าอี้ 12 ตัว

ศูนย์เครื่องจักรที่ 1 $4P_1 + 2P_2 \leq 60$ ชั่วโมงที่มีอยู่

$4(8) + 2(12) = 56$ ชั่วโมงที่ต้องการ

ศูนย์เครื่องจักรที่ 2 $2P_1 + 4P_2 \leq 48$ ชั่วโมงที่มีอยู่

$2(8) + 4(12) = 64$ ชั่วโมงที่ต้องการ

ในการผลิตโต๊ะ 8 ตัว กับเก้าอี้ 12 ตัว จะต้องใช้เวลาไม่เกินกว่าเวลาที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 ก็จริง แต่เกินกว่าเวลาที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 ส่วนผสมนี้จึงตกอยู่ภายนอกพื้นที่ร่วมของอสมการทั้งสองในรูป 8—7 เพราะฉะนั้นจึงมิอาจผลิตโต๊ะและเก้าอี้ในส่วนผสมดังกล่าวได้

3. **ขั้นที่สาม** หาตำแหน่งของจุด D เพราะเมื่อทราบตำแหน่งของจุด D แล้ว เราก็จะสามารถแบ่งแยกพื้นที่ AEDC ที่แรเงาไว้ออกมาได้อย่างถูกต้อง ทั้งนี้เนื่องจากว่าเราทราบตำแหน่งของจุด 3 จุด คือ

A (0, 0)

E (0, 12)

C (15, 0)

เราจะหาตำแหน่งของจุด D ได้อย่างไร ? เราอาจทำได้โดยอ่านตำแหน่งของจุด D จากกราฟที่เขียนขึ้นมาอย่างถูกต้อง อีกวิธีหนึ่งซึ่งเป็นวิธีที่เราจะใช้ต่อไป คือการแก้สมการของเส้นทั้งสองซึ่งตัดกันที่จุด D พร้อมกัน จุด D นี้เป็นจุดร่วมเพียงจุดเดียวเท่านั้นของสมการสองสมการ คือ

$$4P_1 + 2P_2 = 60$$

$$2P_1 + 4P_2 = 48$$

ในการแก้สมการทั้งสองนี้พร้อมกัน

ก. คูณสมการแรกด้วย —2

$$-2\,(4P_1 + 2P_2 = 60) = -8P_1 - 4P_2 = -120$$

บวกด้วยสมการที่ 2 $+ \quad \underline{2P_1 + 4P_2 = 48}$

$$-6P_1 = -72$$

$$P_1 = 12$$

ข. ต่อไปแทนค่า P_1 ในสมการที่สองด้วย 12

$$2P_1 + 4P_2 = 48 = 2(12) + 4P_2 = 48$$
$$24 + 4P_2 = 48$$
$$4P_2 = 24$$
$$P_2 = 6$$

เพราะฉะนั้น จุด D คือ (12, 6)

4. **ขั้นที่สี่** ทดสอบจุดทั้งสี่ซึ่งแบ่งแยกพื้นที่ที่แรเงาไว้ เพื่อดูว่าจุดใดนำมาซึ่งจำนวนเงินกำไรสูงสุด

จุด A (0, 0) = 8(0) บาท + 6(0) บาท = 0 บาท
จุด E (0, 12) = 8(0) บาท + 6(12) บาท = 72 บาท
จุด C (15, 0) = 8(15) บาท + 6(0) บาท = 120 บาท
จุด D (12, 6) = 8(12) บาท + 6(6) บาท = 132 บาท

จุดที่ให้กำไรสูงสุดคือจุด D 132 บาท

เราอาจแสดงให้เห็นแนวความคิดที่ว่า ส่วนผสมของโต๊ะกับเก้าอี้ที่ให้กำไรสูงสุดคือ จุด D (12, 6) นี้ออกไปอีกได้ โดยเขียนฟังก์ชั่นเป้าหมาย $Z = 8P_1 + 6P_2$ บาท (ตามที่กำหนดให้ในขั้นที่หนึ่ง) ไว้ในกราฟพื้นที่คำเฉลยที่อาจเป็นไปได้โดยตรง

ในการเขียนเส้นฟังก์ชั่นเป้าหมาย เราจะต้องกำหนดให้กำไรเท่ากับตัวเลขจำนวนเงินต่ำสุดตัวใดตัวหนึ่งที่เราทราบแน่ว่า เราสามารถทำกำไรตามจำนวนนั้นได้โดยไม่ขัดต่อข้อกำกัดที่มีอยู่ก่อน ในกรณีนี้ เราได้เลือกกำไรที่เท่ากับ 48 บาท ซึ่งเป็นจำนวนกำไรที่อาจทำได้โดยไม่ยากนัก ดังนั้นฟังก์ชั่นเป้าหมายคือ 48 บาท = $8P_1$ บาท + $6P_2$ บาท

ต่อไปเราจึงเขียนสมการนี้บนกราฟ ในรูป 8–8 ในลักษณะเดียวกับที่เราได้เขียนข้อกำกัดข้างต้น (รูป 8–2) โดยเริ่มด้วยการหาตำแหน่งของจุดปลายสองจุดก่อน แล้วจึงโยงจุดทั้งสองด้วยเส้นตรงเส้นหนึ่ง

เมื่อ $P_1 = 0$

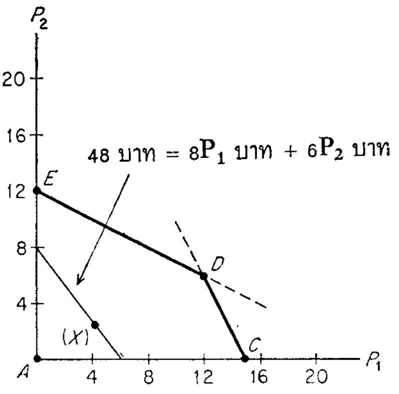
48 บาท = 8(0) บาท + $6P_2$ บาท

$P_2 = 8$

และเมื่อ $P_2 = 0$

48 บาท = $8P_1$ บาท + 6(0)

$P_1 = 6$



รูป 8–8 เส้นพึงก์ชั่นเป้าหมาย

รูป 8–8 แสดงพื้นที่ของคำเฉลยที่อาจเป็นไปได้ (A E D C) พร้อมทั้งสมการกำไร 48 บาท = $8P_1$ บาท + $6P_2$ บาท ตามที่ได้เขียนไว้ เส้นสมการกำไรนี้แทนส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้ทั้งหมดที่อาจเป็นไปได้ ซึ่งจะทำให้ได้รับกำไรทั้งสิ้น 48 บาท ท่านอาจจะต้องการทดสอบส่วนผสมใดผสมหนึ่งดังกล่าว ตัวอย่างเช่น จุด X แทนการผลิตโต๊ะ 4 ตัวกับเก้าอี้ 2 2/3 ตัว

4 (8) บาท + 2 2/3 (6) บาท = 48 บาท

สมมติต่อไปว่า เราจะลากเส้นแทนส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้ทั้งหมดที่จะทำกำไรได้ 96 บาท

96 บาท = $8P_1$ บาท + $6P_2$ บาท

เมื่อ $P_1 = 0$

96 บาท = 8(0) บาท + $6P_2$ บาท

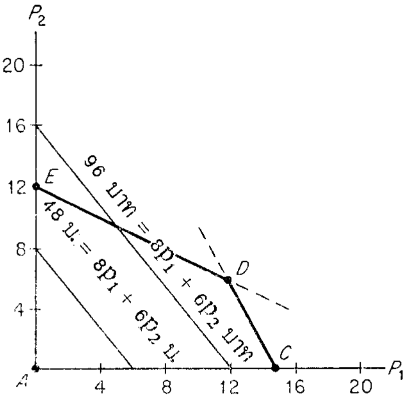
$P_2 = 16$

และเมื่อ $P_2 = 0$

96 บาท = $8P_1$ บาท + 6(0) บาท

$P_1 = 12$

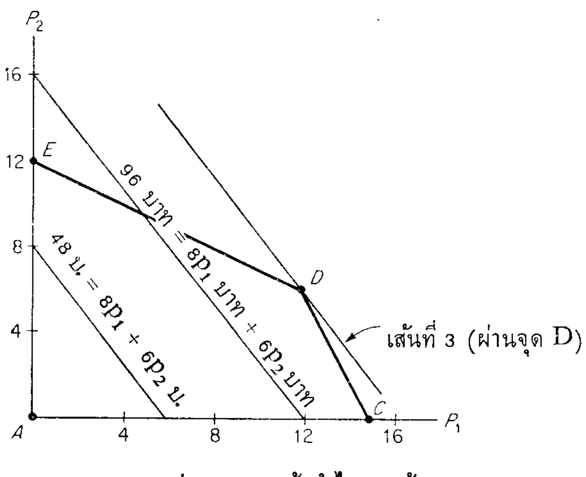
รูป 8–9 เป็นกราฟแสดงสมการกำไรทั้งสอง (48 บาท = $8P_1$ บาท + $6P_2$ บาท และ 96 บาท = $8P_1$ บาท + $6P_2$ บาท) เส้นกำไรที่ขนานกันเหล่านี้มีความสำคัญอย่างไร ? เราอาจกล่าวอย่างง่าย ๆ ได้ว่าการผลิตโต๊ะและเก้าอี้ในส่วนผสมใด ๆ ที่อยู่บนเส้น 48 บาท = $8P_1$ บาท + $6P_2$ บาทจะทำให้ได้รับกำไร 48 บาท และการผลิตโต๊ะและเก้าอี้ในส่วนผสมใด ๆ ที่อยู่บนเส้น 96 บาท = $8P_1$ บาท + $6P_2$ บาทจะทำให้ได้รับกำไร 96 บาท [อย่างไรก็ดีใคร่ขอให้สังเกตไว้ด้วยว่า ข้อกำกัดของปัญหาทำให้เราจะต้องผลิตเฉพาะส่วนผสมที่อยู่ภายในพื้นที่ของคำเฉลยที่อาจเป็นไปได้ (A E D C)]



รูป 8–9 เส้นกำไรสองเส้น

เป็นความจริงอีกด้วยว่า จะต้องมีเส้นกำไรที่ขนานกันนี้เพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด D รูป 8–10 แสดงเส้นกำไรดังกล่าว (เส้นที่ 3) พร้อมด้วยเส้นกำไรสองเส้นแรก แม้ว่าส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้บนเส้นกำไรเส้นที่ 3 นี้ ส่วนมากไม่ได้อยู่ภายในพื้นที่ของคำเฉลยที่อาจเป็นไปได้ก็ตาม แต่ก็มีอยู่จุดหนึ่งที่ตกอยู่ในพื้นที่ดังกล่าว คือจุด D

เส้นกำไรเส้นที่สองตามที่เขียนไว้นั้น ให้กำไรมากกว่าเส้นกำไรเส้นที่หนึ่ง (96 บาท เมื่อเทียบกับ 48 บาท) จึงเป็นที่ประจักษ์ว่าเส้นกำไรที่อยู่ห่างจากจุดเริ่ม (จุด A) มากที่สุด จะประกอบด้วยส่วนผสมของโต๊ะและเก้าอี้ ที่จะให้กำไรสูงสุดเท่าที่จะเป็นไปได้ และถ้าหากว่าจุด ๆ หนึ่งบนเส้นกำไรที่สูงที่สุดนี้ ตกอยู่ภายในขอบเขตของคำเฉลยที่อาจเป็นไปได้ (A E D C) จุดนั้นจะแทนส่วนผสมของผลิตภัณฑ์ที่ให้กำไรสูงสุด จุด D อยู่บนเส้นกำไรเส้นที่ 3 และอยู่ในพื้นที่ของคำเฉลยที่อาจเป็นไปได้ด้วย ดังนั้น จุด D จึงแทนส่วนผสมของโต๊ะ (12 ตัว) กับเก้าอี้ (6 ตัว) ที่ให้กำไรสูงสุด



รูป 8–10 เส้นกำไรสามเส้น

การโปรแกรมแบบเส้นตรงโดยวิธีพีชคณิต
(Linear Programming by an Algebraic Method)

เราอาจจะแสดงการหาคำเฉลยปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรงตามวิธีพีชคณิตโดยใช้ตัวอย่างง่าย ๆ เกี่ยวกับการผลิตที่เราใช้ในการอธิบายวิธีกราฟ

ถ้าเราจะเขียนออกมาในรูปพีชคณิต ปัญหาดังกล่าว คือ

ทำให้ $Z = 8P_1$ บาท $+ 6P_2$ บาทอยู่ในระดับสูงสุด

โดยขึ้นอยู่กับ: $4P_1 + 2P_2 \leq 60$ (ศูนย์เครื่องจักรที่ 1)

$2P_1 + 4P_2 \leq 48$ (ศูนย์เครื่องจักรที่ 2)

ในขั้นแรกเราจะต้องเปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการ เราได้กล่าวไว้แล้วว่าส่วนผสมของโต๊ะกับเก้าอี้ที่ดีที่สุด ไม่จำเป็นจะต้องใช้เวลาทั้งหมดที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรแต่ละศูนย์เสมอไป เพราะฉะนั้น เราจึงต้องนำตัวแปรผันตัวหนึ่งบวกเข้าไปในอสมการแต่ละอสมการเพื่อเข้าแทนที่ส่วนที่ขาดไป อันได้แก่เวลาที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์เครื่องจักรแต่ละศูนย์ ตัวแปรผันนี้เรียกว่า ตัวแปรผันส่วนขาด (slack variable) ตัวอย่างเช่น ให้

$P_3 =$ ตัวแปรผันส่วนขาด (เวลาที่ไม่ได้ใช้) ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1

$P_4 =$ ตัวแปรผันส่วนขาด (เวลาที่ไม่ได้ใช้) ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2

P_3 เท่ากับจำนวนชั่วโมงทั้งสิ้นที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 (60 ชั่วโมง) หักด้วยจำนวนชั่วโมงที่ใช้ไปในการผลิตโต๊ะและเก้าอี้ผ่านศูนย์นี้ P_4 เท่ากับจำนวนชั่วโมงทั้งสิ้นที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 (48 ชั่วโมง) หักด้วยจำนวนชั่วโมงที่ใช้ไปในการผลิตโต๊ะและเก้าอี้ผ่านศูนย์นี้ เราอาจแสดงข้อความทั้งสองดังกล่าวในรูปคณิตศาสตร์ โดยการเขียนสมการของตัวแปรผันส่วนขาด P_3 และ P_4 ดังนี้ :

$P_3 = 60 - 4P_1 - 2P_2$ ศูนย์เครื่องจักรที่ 1 (8–1)

$P_4 = 48 - 2P_1 - 4P_2$ ศูนย์เครื่องจักรที่ 2 (8–2)

จะสังเกตได้ว่า หลังจากที่เราได้บวกเพิ่มด้วยตัวแปรผันส่วนขาด อสมการข้อยับยั้งของปัญหานี้ก็ถูกเปลี่ยนมาเป็นสมการ ตัวแปรผันส่วนขาดในศูนย์เครื่องจักรแต่ละศูนย์อาจจะเป็นค่าใดค่าหนึ่งก็ได้ ที่ทำให้ความสัมพันธ์ของสมการเป็นจริง เพื่อที่จะให้ท่านเข้าใจในเรื่องนี้แจ่มแจ้งยิ่งขึ้น ขอยกตัวอย่างสัก 2 ตัวอย่าง ดังนี้ :

ตัวอย่างที่ 1 สมมติว่า เราผลิตโต๊ะ 5 ตัวและเก้าอี้ 3 ตัว ผ่านศูนย์เครื่องจักรที่ 1

$P_3 = 60 - 4(5) - 2(3)$ ชั่วโมง

$=$ เวลาที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 34 ชั่วโมง

ตัวอย่างที่ 2 สมมติว่า เราผลิตโต๊ะ 4 ตัว และเก้าอี้ 6 ตัว ผ่านศูนย์เครื่องจักรที่ 2

$P_4 = 48 - 2(4) - 4(6)$ ชั่วโมง

$=$ เวลาที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 16 ชั่วโมง

เนื่องจากว่า ตัวแปรผันส่วนขาดเหล่านี้ไม่มีค่าที่เป็นตัวเงิน (ชั่วโมงเครื่องจักรที่ว่างเปล่าไม่ก่อให้เกิดกำไรหรือขาดทุน) เราจึงสามารถรวมตัวแปรผันส่วนขาดที่ทำกำไรให้เท่ากับศูนย์ไว้ในฟังก์ชั่นกำไรได้ดังนี้ :

$$\text{กำไร} = 8P_1 \text{ บาท} + 6P_2 \text{ บาท} + 0P_3 \text{ บาท} + 0P_4 \text{ บาท} \qquad (8\text{—}3)$$

เราได้เรียนรู้จากวิธีกราฟแล้วว่า จุดต่าง ๆ ที่อยู่ในพื้นที่คำเฉลยที่อาจเป็นไปได้แทนส่วนผสมของโต๊ะกับเก้าอี้ (ส่วนผสมผลิตภัณฑ์) ในลักษณะต่าง ๆ กันที่ทำกำไรให้จำนวนหนึ่ง และเรายังทราบต่อไปว่า จุดเริ่ม (0, 0) ให้กำไรที่เท่ากับศูนย์ กำไรที่เท่ากับศูนย์นี้หมายความว่าไม่มีการผลิตโต๊ะและเก้าอี้เลย กล่าวอีกนัยหนึ่ง ณ จุด (0, 0)นี้ จะมีเฉพาะกำลังการผลิตที่ไม่ได้ใช้เท่านั้น

เราอาจอธิบายคำเฉลยที่อาจเป็นไปได้ (แต่ให้กำไรเท่ากับศูนย์) นี้ได้ตามวิธีพีชคณิต โดยอ้างอิงกลับไปยังสมการตัวแปรผันส่วนขาด ดังนี้ :

$$P_3 = 60 - 4P_1 - 2P_2 \qquad \text{ศูนย์เครื่องจักรที่ 1} \qquad (8\text{—}1)$$

$$P_4 = 48 - 2P_1 - 4P_2 \qquad \text{ศูนย์เครื่องจักรที่ 2} \qquad (8\text{—}2)$$

คุณค่าสำคัญของสมการทั้งสองนี้อยู่ที่ว่า เป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรผันตัวแรก (P_3 และ P_4 ซึ่งแทนเวลาที่ไม่ได้ใช้) กับตัวแปรผันอื่น ๆ (P_1 และ P_2 ซึ่งแทนผลิตภัณฑ์) ที่จะไปปรากฏในคำเฉลยที่ 1 ด้วยเหตุนี้ เราจึงเรียกสมการเหล่านี้ว่าเป็น "สมการความสัมพันธ์" (relationship equations)

คำเฉลยที่ 1

$P_1 = 0$ (ไม่ผลิตโต๊ะเลย)

$P_2 = 0$ (ไม่ผลิตเก้าอี้เลย)

$P_3 = 60 - 4(0) - 2(0) = 60$ ชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้

$P_4 = 48 - 2(0) - 4(0) = 48$ ชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้

คำเฉลยนี้ประกอบด้วยตัวแปรผันส่วนขาด คือ P_3 และ P_4 เท่านั้น เมื่อแทนค่าปริมาณ P_1, P_2, P_3 และ P_4 ในฟังก์ชั่นกำไร กำไรที่ได้รับปรากฏดังนี้ :

$$\begin{aligned} \text{กำไร} &= 8P_1 \text{ บาท} + 6P_2 \text{ บาท} + 0P_3 \text{ บาท} + 0P_4 \text{ บาท} \\ &= 8(0) \text{ บาท} + 6(0) \text{ บาท} + 0(60) \text{ บาท} + 0(48) \text{ บาท} \qquad (8\text{--}3) \\ &= 0 \text{ บาท} \end{aligned}$$

จะสังเกตได้ว่าวิธีพีชคณิตมีลักษณะพิเศษอยู่ประการหนึ่ง กล่าวคือ กำไรที่ได้รับตามคำเฉลยเริ่มแรกจะต้องเท่ากับศูนย์เสมอ ดังนั้น ในทางวิชาการคำเฉลยเริ่มแรกนี้อาจมีได้ แต่ถ้าพิจารณาทางด้านการเงินแล้ว คำเฉลยดังกล่าวก็ไม่น่าสนใจเลย

ในขั้นถัดไปได้แก่การพิจารณาฟังก์ชั่นกำไร เพื่อดูว่าเราสามารถที่จะทำให้กำไรเพิ่มสูงขึ้นได้หรือไม่ จะเห็นได้ชัดว่า เราอาจทำให้กำไรที่ได้รับเพิ่มสูงขึ้นได้โดยการผลิตโต๊ะ (P_1) บ้าง หรือเก้าอี้ (P_2) บ้าง เพื่อแลกกับเวลาที่ไม่ได้ใช้ (P_3 และ P_4) ซึ่งไม่มีค่าแต่อย่างใดในการเคลื่อนไปสู่ส่วนผสมผลิตภัณฑ์ที่ดีที่สุด เราจะพิจารณาผลิตเฉพาะผลิตภัณฑ์ที่ทำกำไรต่อหน่วยสูงสุดก่อน คือโต๊ะ แต่เราจะผลิตโต๊ะได้เป็นจำนวนเท่าไร ? จากสมการ (8–1) และ (8–2) สมมติว่า เราจะใช้เวลาทั้งหมดที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรแต่ละศูนย์ไปในการผลิตโต๊ะ (P_1) การผลิตเก้าอี้ (P_2) ก็จะเท่ากับศูนย์ สมการ (8–1) $P_3 = 60 - 4P_1 - 2P_2$ แสดงว่าเรามีเวลาอยู่ 60 ชั่วโมง ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 เวลาที่ต้องใช้ในการผลิตโต๊ะ 1 ตัว เท่ากับ 4 ชั่วโมง ดังนั้นเราอาจผลิตโต๊ะได้ :

$$\frac{60 \text{ ชั่วโมงที่มีอยู่}}{4 \text{ ชั่วโมงต่อโต๊ะ 1 ตัว}} = 15 \text{ ตัว}$$

สมการ (8–2) $P_4 = 48 - 2P_1 - 4P_2$ แสดงว่าศูนย์เครื่องจักรที่ 2 มีเวลาอยู่ 48 ชั่วโมง เวลาที่ต้องใช้ในการผลิตโต๊ะ 1 ตัวในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 เท่ากับ 2 ชั่วโมง ดังนั้นจำนวนโต๊ะที่อาจผลิตได้ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 จึงเท่ากับ

$$\frac{48 \text{ ชั่วโมงที่มีอยู่}}{2 \text{ ชั่วโมงต่อโต๊ะ 1 ตัว}} = 24 \text{ ตัว}$$

เราจะเห็นได้ทันทีว่า เราอาจผลิตโต๊ะได้เพียง 15 ตัวเท่านั้น การผลิตโต๊ะ 24 ตัวต้องใช้เวลา 96 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 แต่เวลาที่มีอยู่ทั้งหมดในศูนย์นี้มีเพียง 60 ชั่วโมงเท่านั้น ดังนั้น เราจึงเรียกศูนย์เครื่องจักรที่ 1 ว่าเป็น “ศูนย์จำกัด” (limiting center) เพราะจำกัดเราให้ผลิตโต๊ะได้เพียง 15 ตัว การผลิตโต๊ะ 15 ตัวต้องใช้เวลา 60 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 และ 30 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 การผลิตนี้จึงอยู่ภายในข้อกำกัดทางด้านเวลาของศูนย์ทั้งสอง

ต่อไปแทนค่า $P_1 = 15$ และ $P_2 = 0$ ในสมการ (8–1) และ (8–2)

$$P_3 = 60 - 4(15) - 2(0) = 0$$

$$P_4 = 48 - 2(15) - 4(0) = 18$$

คำเฉลยที่ 2

P_1 = โต๊ะ 15 ตัว

P_2 = เก้าอี้ 0 ตัว

P_3 = 0 ชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์ที่ 1

P_4 = 18 ชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์ที่ 2

$$\begin{aligned} \text{กำไร} &= 8P_1 \text{ บาท} + 6P_2 \text{ บาท} + 0P_3 \text{ บาท} + 0P_4 \text{ บาท} \\ &= 8(15) \text{ บาท} + 6(0) \text{ บาท} + 0(0) \text{ บาท} + 0(18) \text{ บาท} \qquad (8\text{—}3) \\ &= 120 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ตัวเลขกำไรนี้ ดีกว่ากำไรที่เท่ากับศูนย์ตามคำเฉลยที่ 1

เราจะต้องพิจารณาอีกครั้งหนึ่งว่า เรามีทางที่จะทำให้กำไรที่ได้รับสูงขึ้นกว่านี้ได้หรือไม่ ถ้าผลิตโต๊ะ 15 ตัว จำนวนชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 (P_3) ลดลงเหลือศูนย์ เราจึงต้องเปลี่ยนสมการ (8—1) และ (8—2) เพื่อสะท้อนให้เห็นข้อเท็จจริงนี้ สมการทั้งสองก่อนการเปลี่ยนแปลง คือ :

$$P_3 = 60 - 4P_1 - 2P_2 \qquad (8\text{—}1)$$

$$P_4 = 48 - 2P_1 - 4P_2 \qquad (8\text{—}2)$$

ในเมื่อ P_1 ได้เข้ามาแทนที่ P_3 เราจึงหาค่าของ P_1 ในสมการ (8—1) ดังนี้ :

$$4P_1 = 60 - 2P_2 - P_3$$

หารสมการทั้งสองข้างด้วย 4 จะได้

$$P_1 = 15 - 1/2P_2 - 1/4P_3$$

เมื่อนำค่าของ P_1 นี้ไปแทนในสมการ (8—2) เราจะได้สมการใหม่ (8—5) ดังนี้ :

$$\begin{aligned} P_4 &= 48 - 2P_1 - 4P_2 \qquad (8\text{—}2) \\ &= 48 - 2(15 - 1/2P_2 - 1/4P_3) - 4P_2 \\ &= 48 - 30 + P_2 + 1/2P_3 - 4P_2 \\ &= 18 - 3P_2 + 1/2P_3 \qquad (8\text{—}5) \end{aligned}$$

สมการใหม่ทั้งสองสมการ ซึ่งสะท้อนให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรผันทั้งหมดในคำเฉลยที่ 2 ได้แก่

$$P_1 = 15 - 1/2\, P_2 - 1/4P_3 \qquad (8\text{—}4)$$

$$P_4 = 18 - 3P_2 + 1/2P_3 \qquad (8\text{—}5)$$

ในการที่จะศึกษาดูว่า คำเฉลยที่ 3 จะทำกำไรให้ในจำนวนที่สูงกว่า 120 บาท หรือไม่ ให้แทนค่าของ P_1 และ P_4 จากคำเฉลยที่ 2 ในฟังก์ชั่นกำไรดังนี้

$$\begin{aligned} \text{กำไร} &= 8P_1 \text{ บาท} + 6P_2 \text{ บาท} + 0P_3 \text{ บาท} + 0P_4 \text{ บาท} \qquad (8\text{—}3) \\ &= 8(15 - 1/2P_2 - 1/4P_3) \text{ บาท} + 6P_2 \text{ บาท} + 0P_3 \text{ บาท} \\ &\quad + 0(18 - 3P_3 + 1/2P_3) \text{ บาท} \\ &= 120 \text{ บาท} - 4P_2 \text{ บาท} - 2P_3 \text{ บาท} + 6P_2 \text{ บาท} \\ &= 120 \text{ บาท} + 2P_2 \text{ บาท} - 2P_3 \text{ บาท} \qquad (8\text{—}6) \end{aligned}$$

ฟังก์ชั่นกำไรที่แสดงออกมาใหม่นี้ (กำไร $=$ 120 บาท $+ 2P_2$ บาท $- 2P_3$ บาท) ชี้ให้เห็นว่าถ้าเรานำเอาเก้าอี้ (P_2) เข้ามาในคำเฉลย กำไรที่ได้รับจะเพิ่มขึ้น 2 บาท ต่อเก้าอี้แต่ละตัวที่ผลิต ข้อความนี้อาจทำให้สับสนก็ได้ เพราะข้อความเดิมของปัญหาได้ชี้ให้เห็นแล้วว่าเก้าอี้แต่ละตัวที่ผลิตจะทำกำไรให้ 6 บาท

เราคงจำได้ว่าชั่วโมงทั้งหมดในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 ได้ถูกนำไปใช้ในการผลิตโต๊ะจนหมดแล้ว เราไม่สามารถที่จะผลิตเก้าอี้ได้ ยกเว้นแต่ว่า เรายอมสละโต๊ะที่ผลิตอยู่ในขณะนี้ลงบ้าง การผลิตเก้าอี้ 1 ตัวต้องใช้ 2 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 การผลิตโต๊ะ 1 ตัวต้องใช้ 4 ชั่วโมงในศูนย์เดียวกันนี้ การนำเก้าอี้เข้ามาสู่ส่วนผสมผลิตภัณฑ์หนึ่งตัวทำให้เราต้องลดการผลิตโต๊ะลง 1/2 ตัว ดังนั้นเราจะขาดทุน 1/2 ของ (8 บาท) เพราะการผลิตโต๊ะน้อยไป 1/2 ตัว แต่เราจะได้กำไร 6 บาทจากเก้าอี้แต่ละตัวที่ผลิต เมื่อนำขาดทุน 4 บาทไปหักออกจากกำไร 6 บาท เราจะได้รับจำนวนสุทธิ 2 บาท ตามที่ปรากฏอยู่ในฟังก์ชั่นกำไรที่ปรับปรุงแล้ว (กำไร $=$ 120 บาท $+ 2P_2$ บาท $- 2P_3$ บาท)

ต่อไป $-2P_3$ บาทในฟังก์ชั่นกำไรที่ปรับปรุงแล้ว มีความหมายอย่างไร ? $-2P_3$ บาทนี้หมายความง่าย ๆ ว่า ถ้าเราประสงค์ที่จะนำเอา 1 ใน 60 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 ไปใช้เพื่อวัตถุประสงค์อย่างอื่น การกระทำเช่นนี้ก่อให้เกิดต้นทุน 2 บาท ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ?

โต๊ะแต่ละตัวในจำนวนทั้งหมด 15 ตัว ที่เราทำการผลิตอยู่ในขณะนี้ต้องใช้ 4 ชั่วโมงในศูนย์ที่ 1 ถ้านำไปใช้เพื่อประโยชน์อย่างอื่นเสีย 1 ชั่วโมง เราจะต้องลดการผลิตโต๊ะลง 1/4 ตัว หรือ 1/4 ของ 8 บาทหรือ 2 บาท

จะเห็นได้ว่าฟังก์ชั่นกำไรที่ปรับปรุงแล้ว (กำไร $=$ 120 บาท $+ 2P_2$ บาท $-2P_3$ บาท) แสดงกำไรทั้งสิ้นที่ได้รับในปัจจุบันนี้ และในขณะเดียวกัน ยังชี้ให้เห็นผลที่มีต่อกำไรที่เกิดจากการกระทำสองอย่างที่เราอาจดำเนินการได้ ฟังก์ชั่นกำไรนี้ทำให้เราจำเป็นต้องผลิตเก้าอี้บ้าง แม้ว่าจะต้องลดการผลิตโต๊ะลงบ้างก็ตาม แต่เราจะผลิตเก้าอี้เป็นจำนวนเท่าไร ?

เราอาจจะอาศัยสมการความสัมพันธ์ใหม่ ในการกำหนดจำนวนเก้าอี้ที่จะผลิตเพิ่มเข้าไป จะสังเกตได้ว่าการผลิตโต๊ะ 15 ตัวจะต้องใช้ชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งหมดในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 ถ้าจะผลิตเก้าอี้หนึ่งตัว เราจะต้องมีเวลาเหลืออยู่บ้างในศูนย์นี้ เราจะต้องลดการผลิตโต๊ะบ้างเพื่อนำเวลาที่ว่างลงไปใช้ในการผลิตเก้าอี้ ถ้าลดการผลิตโต๊ะหนึ่งตัวจะทำให้เราผลิตเก้าอี้ได้ 2 ตัว ถ้าเราลดการผลิตโต๊ะทั้งหมด 15 ตัวในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 เราอาจจะผลิตเก้าอี้ได้ถึง 30 ตัว

$$\frac{\text{โต๊ะที่ผลิตอยู่ในขณะนี้ 15 ตัว}}{\text{การผลิตเก้าอี้ 1 ตัวต้องลดการผลิตโต๊ะ 1/2 ตัว}} = \text{เก้าอี้ 30 ตัว}$$

แต่การผลิตเก้าอี้ต้องผ่านศูนย์เครื่องจักรที่ 2 ด้วย เราจึงต้องคำนวณจำนวนเก้าอี้สูงสุดที่อาจผลิตได้ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 เราทราบแล้วว่า เก้าอี้ 1 ตัวเข้าแทนที่โต๊ะ 1/2 ตัวในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 เมื่อลดการผลิตโต๊ะลงเป็นจำนวน 1/2 ตัว ผลที่เกิดขึ้นอย่างหนึ่งคือ เราจะมีเวลาว่างเป็นจำนวนเท่ากับ 1/2 ของ 2 ชั่วโมง ที่ต้องใช้ในการผลิตโต๊ะ 1 ตัวในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 ดังนั้น เราจะมีชั่วโมงว่าง 1 ชั่วโมงต่อโต๊ะทุก ๆ 1/2 ตัวที่ลดลง แต่เก้าอี้ที่เข้าแทนที่โต๊ะ 1/2 ตัวต้องใช้เวลา 4 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 เมื่อนำเอา 4 ชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตโต๊ะ 1 ตัว หักด้วยชั่วโมงที่ว่าง 1 ชั่วโมงจากการลดการผลิตโต๊ะ 1/2 ตัว เท่ากับว่าเราจะต้องใช้ชั่วโมงสุทธิ 3 ชั่วโมงต่อการผลิตเก้าอี้ 1 ตัวในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 จากคำเฉลยที่ 2 เราคงยังจำได้ว่า ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 เท่ากับ 18 ชั่วโมง เมื่อเป็นเช่นนั้น

$$\frac{\text{18 ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2}}{\text{3 ชั่วโมงสุทธิที่ต้องใช้ในการผลิตเก้าอี้ 1 ตัว}} = \text{เก้าอี้ 6 ตัว}$$

ตามกฎทั่วไป ในการหาปริมาณที่จะบวกเพิ่มเข้าไปในส่วนผสมผลิตภัณฑ์ เราจะต้องดำเนินการเป็น 2 ขั้น ดังนี้ :

1. หารตัวคงที่ของแต่ละสมการ ด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันที่จะบวกเพิ่มเข้าไป คำว่า ตัวคงที่ สัมประสิทธิ์ และตัวแปรผันนั้น เราหมายถึงจำนวนต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

$$\underbrace{5}_{\text{สัมประสิทธิ์}}\ \underbrace{X}_{\text{ตัวแปรผัน}} = \underbrace{15}_{\text{ตัวคงที่}}$$

2. เลือกผลหารที่มีค่าบวกที่น้อยกว่าจากขั้นที่ 1 เป็นจำนวนที่จะบวกเพิ่มเข้าไป

ตัวอย่างเช่น ตัวคงที่ในสมการ (8—4) คือ 15 สัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันที่จะบวกเพิ่มเข้าไป (P_2, เก้าอี้) คือ 1/2 15/1/2 = 30 ในทำนองเดียวกันตัวคงที่ในสมการ

(8—5) คือ 18 และสัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันที่จะบวกเพิ่มเข้าไป (P_2, เก้าอี้) คือ 3 18/3 = 6 เราจึงเลือกเอา 6 เป็นปริมาณเก้าอี้ที่จะบวกเพิ่มเข้าไปในส่วนผสมผลิตภัณฑ์ ตัวเลขใด ๆ ที่มากกว่า 6 จะขัดต่อสมการ (8—5) หมายความว่า ค่าใด ๆ ที่มากกว่า 6 ต้องใช้เวลาในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 เกินกว่า 18 ชั่วโมงที่มีอยู่

เราได้ตัดสินใจแล้วว่าจะผลิตเก้าอี้ 6 ตัว การตัดสินใจนี้จะมีผลอย่างไรต่อการผลิตโต๊ะ จำนวนชั่วโมงที่มีอยู่ และกำไรที่ได้รับ ? สมการที่เราคำนวณได้หลังคำเฉลยที่ 2 อาจนำมาใช้เป็นประโยชน์ได้ในตอนนี้

$$P_1 = 15 - 1/2P_2 - 1/4P_3 \qquad (8\text{—}4)$$

$$P_4 = 18 - 3P_2 + 1/2P_3 \qquad (8\text{—}5)$$

แทนค่า P_2 ด้วย 6 และ P_3 ด้วย 0 จะได้

$$P_1 = 15 - 1/2(6) - 1/4(0)$$
$$= 12$$

$$P_4 = 18 - 3(6) + 1/2(0)$$
$$= 0$$

จะเห็นได้ว่า การผลิตเก้าอี้ 6 ตัวทำให้การผลิตโต๊ะลดลงเหลือ 12 ตัว และใช้ชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งหมดในศูนย์เครื่องจักรทั้งสอง

กำไรที่ได้รับจะเท่ากับเท่าไร ?

กำไร = $8P_1$ บาท + $6P_2$ บาท + $0P_3$ บาท + $0P_4$ บาท (8—3)

= 8(12) บาท + 6(6) บาท + 0(0) บาท + 0(0) บาท

= 96 บาท + 36 บาท

= 132 บาท

คำเฉลยที่ 3 ใหม่ ซึ่งทำกำไรให้ในจำนวนนี้ คือ

คำเฉลยที่ 3

P_1 = โต๊ะ 12 ตัว

P_2 = เก้าอี้ 6 ตัว

P_3 = 0 ชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์ที่ 1

P_4 = 0 ชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์ที่ 2

เราอาจพิสูจน์ข้อเท็จจริงที่ว่า ชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งหมดในศูนย์เครื่องจักรทั้งสองถูกใช้หมดไปพอดี ดังนี้

ผลิตภัณฑ์	ศูนย์ที่ 1 (ชั่วโมงที่มีอยู่ 60 ชั่วโมง)	ศูนย์ที่ 2 (ชั่วโมงที่มีอยู่ 48 ชั่วโมง)
P_1 (โต๊ะ)	12 × 4 ชั่วโมง = 48	12 × 2 ชั่วโมง = 24
P_2 (เก้าอี้)	6 × 2 ชั่วโมง = 12	6 × 4 ชั่วโมง = 24
	60	48

ต่อไป เราจะพิจารณาดูว่า มีคำเฉลยอื่นใดที่จะทำกำไรมากกว่า 132 บาทหรือไม่ ในการพิจารณานี้ เราคงดำเนินการอย่างเดียวกับที่เราได้ทำไปแล้วจากคำเฉลยที่ 2 ไปสู่คำเฉลยที่ 3 ก่อนอื่นเราจะต้องเขียนสมการทั้งสองซึ่งแสดงส่วนผสมผลิตภัณฑ์ก่อนคำเฉลยที่ 3 อีกครึ่งหนึ่งดังนี้

$$P_1 = 15 - 1/2P_2 - 1/4P_3 \qquad (8\text{–}4)$$

$$P_4 = 18 - 3P_2 + 1/2P_3 \qquad (8\text{–}5)$$

ถัดจากนั้น เราจึงแสดงให้เห็นการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับสมการทั้งสอง ในขณะที่เราแทน P_4 ด้วย P_2 เพื่อที่จะได้คำเฉลยที่ 3 เราจะต้องหาค่าของ P_2 ในสมการ (8–5) ก่อน ดังนี้

$$P_4 = 18 - 3P_3 + 1/2P_3 \qquad (8\text{–}5)$$

$$3P_2 = 18 + 1/2P_3 - P_4$$

หารสมการทั้งสองข้างด้วย 3 จะได้

$$P_2 = 6 + 1/6P_3 - 1/3P_4 \qquad (8\text{–}7)$$

ต่อไป แทนค่า P_2 ในสมการ (8–4) ด้วย $(6 + 1/6\,P_3 - 1/3\,P_4)$:

$$P_1 = 15 - 1/2P_2 - 1/4P_3 \qquad (8\text{–}4)$$

$$= 15 - 1/2\ (6 + 1/6P_3 - 1/3P_4) - 1/4P_3 \qquad (8\text{–}5)$$

$$= 15 - 3 - 1/12P_3 + 1/6P_4 - 1/4P_3$$

$$= 12 - 1/3P_3 + 1/6P_4 \qquad (8\text{–}8)$$

สมการใหม่สองสมการสำหรับคำเฉลยที่ 3 คือ

$$P_1 = 12 - 1/3P_3 + 1/6P_4 \qquad (8\text{–}8)$$

$$P_2 = 6 + 1/6P_3 - 1/3P_4 \qquad (8\text{–}7)$$

ในการพิจารณาดูว่ามีส่วนผสมผลิตภัณฑ์ในลักษณะอื่นใด ที่อาจทำกำไรให้สูงกว่า 132 บาท หรือไม่นั้น เราเพียงแต่แทนค่า P_1 และ P_2 [สมการ (8—7) และ (8—8)] ในฟังก์ชันกำไร ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{กำไร} &= 8P_1 \text{ บาท} + 6P_2 \text{ บาท} + 0P_3 \text{ บาท} + 0P_4 \text{ บาท} && (8-3)\\
&= 8(12 - 1/3P_3 + 1/6P_4) \text{ บาท} + 6(6 + 1/6P_3 - 1/3P_4) \text{ บาท} + 0 \\
&\quad \text{บาท} + 0 \text{ บาท} \\
&= 96 \text{ บาท} - 8/3P_3 \text{ บาท} + 8/6P_4 \text{ บาท} + 36 \text{ บาท} + P_3 \text{ บาท} - 2P_4 \text{ บาท} \\
&= 132 \text{ บาท} - 5/3P_3 \text{ บาท} - 2/3P_4 \text{ บาท} && (8-9)
\end{aligned}
$$

จากการตรวจสอบฟังก์ชันกำไรในขั้นนี้ ปรากฏว่าสัมประสิทธิ์ของ P_3 หรือ P_4 ไม่มีค่าเป็นบวก จึงเท่ากับว่าเราไม่อาจทำให้กำไรที่ได้รับมีจำนวนสูงกว่านี้ เพราะการเพิ่มหน่วยหนึ่งหน่วยใดของ P_3 หรือ P_4 (เวลาที่ไม่ได้ใช้) เข้าไปจะทำให้กำไรที่ได้รับลดลง เครื่องหมายติดลบแสดงให้เห็นความจริงข้อนี้ ดังนั้น คำเฉลยที่ 3 ($P_1 = 12$ และ $P_2 = 6$) จึงเป็นคำเฉลยที่ดีที่สุด และจะเห็นได้ว่าคำเฉลยนี้ตรงกับคำเฉลยที่ได้ตามวิธีกราฟ การหาคำเฉลยโดยพีชคณิตมีข้อดีที่ว่า เป็นวิธีที่อาจนำไปใช้ได้กับกรณีที่มีผลิตภัณฑ์มากกว่าสามชนิด ส่วนการหาคำเฉลยโดยวิธีกราฟ จำกัดเฉพาะในกรณีที่มีผลิตภัณฑ์สามชนิดหรือสามมิติเท่านั้น

แบบฝึกหัด

8—1 บริษัท โจนส์ จำกัด ผลิตผลิตภัณฑ์สองชนิดคือ J_1 และ J_2 J_1 แต่ละหน่วยที่ขายได้ทำส่วนช่วยเหลือ (contribution) 6 บาท และ J_2 5 บาท นอกจากนี้ ผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดจะต้องผ่านศูนย์ประกอบสองศูนย์คือ A_1 และ A_2 J_1 ต้องใช้ 4 ชั่วโมงใน A_1 และ 4 ชั่วโมงใน A_2 J_2 ต้องใช้ 3 ชั่วโมงใน A_1 และ 5 ชั่วโมงใน A_2 ชั่วโมงที่มีอยู่ใน A_1 เท่ากับ 40 ชั่วโมง และชั่วโมงที่มีอยู่ใน A_2 เท่ากับ 30 ชั่วโมง ให้กำหนดส่วนผสมผลิตภัณฑ์ที่ดีที่สุด โดยใช้การโปรแกรมแบบเส้นตรงวิธีกราฟ

8—2 บริษัท สมิธ จำกัด ผลิตผลิตภัณฑ์สองชนิด ผลิตภัณฑ์ชนิดที่ 1 ทำส่วนช่วยเหลือได้ 10 บาท และผลิตภัณฑ์ชนิดที่ 2 ทำส่วนช่วยเหลือได้ 6 บาท ผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดต้องผ่านศูนย์เครื่องจักร 2 ศูนย์ ผลิตภัณฑ์ชนิดที่ 1 ต้องใช้ 12 ชั่วโมงในศูนย์ที่ 1 และ 4 ชั่วโมงในศูนย์ที่ 2 ผลิตภัณฑ์ชนิดที่ 2 ต้องใช้ 4 ชั่วโมงในศูนย์ที่ 1 และ 8

ชั่วโมงในศูนย์ที่ 2 ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์ที่ 1 เท่ากับ 60 ชั่วโมง และชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์ที่ 2 เท่ากับ 40 ชั่วโมง ให้หาส่วนผสมผลิตภัณฑ์ที่ดีที่สุด และส่วนช่วยเหลือทั้งสิ้นที่ได้รับจากส่วนผสมนี้ โดยใช้การโปรแกรมแบบเส้นตรงวิธีกราฟ

8–3 กำหนด :

ผลิตภัณฑ์ 2 ชนิด – X_1 และ X_2

ส่วนช่วยเหลือจาก X_1 = 9 บาทต่อหน่วย

ส่วนช่วยเหลือจาก X_2 = 7 บาทต่อหน่วย

	ชั่วโมงที่ต้องใช้ต่อหน่วย	
	ศูนย์ที่ 1	ศูนย์ที่ 2
X_1	12 ชั่วโมง	4 ชั่วโมง
X_2	4 ชั่วโมง	8 ชั่วโมง
ชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งหมดในศูนย์เครื่องจักรแต่ละศูนย์	60	40

จากข้อสนเทศที่กำหนดให้ ให้หาส่วนผสมผลิตภัณฑ์ที่ดีที่สุดโดยใช้การโปรแกรมแบบเส้นตรงวิธีพีชคณิต

8–4 บริษัท ABC จำกัด ผลิตผลิตภัณฑ์สองชนิดคือ Y_1 และ Y_2 ส่วนช่วยเหลือจากผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดปรากฏดังนี้ :

Y_1 = 15 บาทต่อหน่วย

Y_2 = 11 บาทต่อหน่วย

ผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดทำจากวัตถุดิบสองชนิดคือ A และ B Y_1 และ Y_2 ต้องใช้วัตถุดิบแต่ละชนิดในจำนวนดังต่อไปนี้ :

	A	B
Y_1	4 ปอนด์	3 ปอนด์
Y_2	2 ปอนด์	1 ปอนด์

วัตถุดิบที่มีอยู่ A 400 ปอนด์ B 500 ปอนด์

ให้กำหนดส่วนผสมของ Y_1 และ Y_2 ซึ่งจะทำให้ส่วนช่วยเหลือทั้งสิ้นอยู่ในระดับสูงสุดโดยใช้การโปรแกรมแบบเส้นตรงวิธีพีชคณิต

8—5 บริษัท ลี จำกัด ทำการผลิตผลิตภัณฑ์สามชนิด ส่วนช่วยเหลือจากผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดปรากฏดังนี้ :

ส่วนช่วยเหลือจาก W_1 = 9 บาทต่อหน่วย

ส่วนช่วยเหลือจาก W_2 = 6 บาทต่อหน่วย

ส่วนช่วยเหลือจาก W_3 = 12 บาทต่อหน่วย

ผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดทำจากวัตถุดิบสามชนิด จำนวนวัตถุดิบที่ต้องใช้ในการผลิตปรากฏดังนี้ :

	วัตถุดิบ ชนิดที่ 1	วัตถุดิบ ชนิดที่ 2	วัตถุดิบ ชนิดที่ 3
W_1 ต้องใช้	4 ปอนด์/หน่วย	8 ปอนด์/หน่วย	5 ปอนด์/หน่วย
W_2 ต้องใช้	3 ปอนด์/หน่วย	6 ปอนด์/หน่วย	6 ปอนด์/หน่วย
W_3 ต้องใช้	6 ปอนด์/หน่วย	12 ปอนด์/หน่วย	6 ปอนด์/หน่วย
จำนวนปอนด์ที่มีอยู่ทั้งสิ้น	480	480	600

จากข้อมูลที่กำหนดให้ข้างต้น ให้ท่านกำหนดส่วนผสมผลิตภัณฑ์ที่ดีที่สุด และส่วนช่วยเหลือสูงสุดโดยการใช้โปรแกรมแบบเส้นตรงวิธีพีชคณิต

บทที่ 9

การโปรแกรมแบบเส้นตรง : วิธีซิมเพล็กซ์
(LINEAR PROGRAMMING : SIMPLEX METHOD)

ธุรกิจโดยทั่วไปมักจะมีปัญหาเกี่ยวกับส่วนผสมของผลิตภัณฑ์ ที่เกี่ยวเนื่องไปถึงผลิตภัณฑ์หลายชนิด และศูนย์เครื่องจักรหลายศูนย์ ตัวอย่างเช่น ปัญหาที่เกี่ยวเนื่องกับผลิตภัณฑ์ 10 ชนิดและศูนย์เครื่องจักร 15 ศูนย์ ในกรณีเช่นนั้นเราไม่อาจนำการโปรแกรมแบบเส้นตรงวิธีพีชคณิตตามที่ได้อธิบายไปแล้วในบทก่อนเข้ามาใช้ในการหาคำเฉลย ทั้งนี้เพราะว่าปัญหาเหล่านี้มีขนาดใหญ่จนเกินไป เราจึงต้องอาศัยวิธีการอีกอย่างหนึ่งคือ “วิธีซิมเพล็กซ์” (simplex method) ซึ่งเป็นวิธีที่จะช่วยให้เราสามารถแก้ปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรงที่มีความสลับซับซ้อนมากขึ้น

ตามวิธีซิมเพล็กซ์ งานทางด้านการคำนวณเป็นขบวนการที่ต้องทวนใหม่หลาย ๆ ครั้ง (iterative process) การทวนในที่นี้หมายถึงการทำซ้ำ ดังนั้น ในการคำนวณหาคำเฉลยที่ดีที่สุด งานทางด้านการคำนวณจึงเป็นการทำซ้ำแล้วซ้ำอีกตามกระสวนมาตรฐานที่ได้วางไว้และเป็นการพัฒนาคำเฉลยที่ต่อเนื่องกันในกระสวนที่เป็นระบบ จนกว่าจะได้คำเฉลยที่ดีที่สุด

ลักษณะของวิธีซิมเพล็กซ์อีกประการหนึ่งก็คือ คำเฉลยที่พัฒนาขึ้นมาใหม่แต่ละอันจะให้กำไรที่เท่ากับ หรือมากกว่าคำเฉลยที่ได้ก่อนหน้าคำเฉลยนั้น ลักษณะอันสำคัญนี้ทำให้เราเชื่อมั่นได้ว่า เรากำลังเคลื่อนเข้าไปใกล้คำตอบที่ดีที่สุดเสมอ และประการสุดท้ายวิธีนี้ยังชี้ให้เห็นว่าเราได้คำเฉลยที่ดีที่สุดเมื่อใด

ความสัมพันธ์ระหว่างวิธีซิมเพล็กซ์กับวิธีพีชคณิต
(Relationship between Simplex and Algebraic Methods)

การที่เรานำการโปรแกรมแบบเส้นตรงวิธีที่สอง คือ วิธีซิมเพล็กซ์เข้ามาเนื่องจากว่าในการโปรแกรมแบบเส้นตรงตามวิธีพีชคณิตนั้น เราจะต้องมีการคำนวณที่สับสนยุ่งยากมาก

วิธีซิมเพล็กซ์ที่เราจะศึกษาต่อไปก็ยังคงต้องอาศัยพีชคณิตเช่นกัน แต่ไม่ใช่พีชคณิตธรรมดา เราจะต้องใช้พีชคณิตเมตริกซ์ตามที่ได้ศึกษามาแล้วในบทที่ 7 แทนที่จะแก้สมการความสัมพันธ์แต่ละชุดพร้อม ๆ กัน (ดังที่ปรากฏในบทที่ 8) วิธีซิมเพล็กซ์จะต้องอาศัยพีชคณิตเมตริกซ์เข้าช่วย จากบทที่ 7 เราทราบแล้วว่าเราอาจแก้สมการชุดหนึ่งพร้อม ๆ กันได้ไม่ยากนัก โดยอาศัยแนวความคิดทางพีชคณิตเมตริกซ์ โดยเฉพาะในเรื่องเมตริกซ์ผกผัน

ในการหาคำเฉลยโดยวิธีซิมเพล็กซ์ที่จะกล่าวต่อไปนี้ แท้ที่จริงแล้วเรากำลังสร้างเมตริกซ์ผกผันเพื่อแก้สมการชุดหนึ่งพร้อม ๆ กัน จริงอยู่ การสร้างเมตริกซ์ผกผันอาจจะไม่ได้ดำเนินไปในลักษณะเดียวกับที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 7 แต่สิ่งที่เราได้ในขั้นสุดท้ายก็คือเมตริกซ์ผกผันนั่นเอง

การสร้างคำเฉลยขั้นมูลฐานเริ่มแรก
(Setting up the Initial Basic Solution)

การแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์จะต้องมีการ (1) จัดเรียงสมการและอสมการของปัญหาในลักษณะพิเศษ และ (2) ดำเนินการตามวิธีการและกฎที่ได้วางไว้อย่างเป็นระบบในการคำนวณหาคำเฉลย ในการอธิบายงานขั้นต่าง ๆ เหล่านี้ เราจะใช้ปัญหาส่วนผสมผลิตภัณฑ์ตามที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 8 กล่าวคือ

ทำให้กำไร $= 8P_1$ บาท $+ 6P_2$ บาท อยู่ในระดับสูงสุด

โดยขึ้นอยู่กับ $4P_1 + 2P_2 \le 60$ ชั่วโมง ศูนย์เครื่องจักรที่ 1

$2P_1 + 4P_2 \le 48$ ชั่วโมง ศูนย์เครื่องจักรที่ 2

ในขั้นแรกนี้ เราคงดำเนินการเช่นเดียวกับการหาคำเฉลยโดยวิธีพีชคณิต กล่าวคือ เปลี่ยนอสมการให้เป็นสมการโดยบวกเพิ่มด้วยตัวแปรผันส่วนขาด

$$4P_1 + 2P_2 + P_3 = 60 \text{ ชั่วโมง} \tag{9–1}$$

$$2P_1 + 4P_2 + P_4 = 48 \text{ ชั่วโมง} \tag{9–2}$$

ยกเว้นทางด้านการจัดเรียงแล้ว สมการเหล่านี้คงเหมือนกับสมการ (8–1) และ (8–2) ที่ใช้ในการคำนวณหาคำเฉลยตามวิธีพีชคณิต

ตามวิธีซิมเพล็กซ์ ตัวที่ไม่ทราบค่าใด ๆ ที่มีอยู่ในสมการหนึ่งจะต้องปรากฏในสมการทุกสมการ ตัวที่ไม่ทราบค่าที่ไม่กระทบกระเทือนสมการใดสมการหนึ่ง ก็ให้มีสัมประสิทธิ์ที่เท่ากับศูนย์ ตัวอย่างเช่น ในเมื่อ P_3 และ P_4 แทนเวลาที่ไม่ได้ใช้ซึ่งไม่ก่อให้เกิดกำไรเลย เราก็บวกตัวแปรผันเหล่านี้เข้าไปยังฟังก์ชั่นกำไร โดยมีศูนย์เป็นสัมประสิทธิ์ นอกจากนี้ในเมื่อ P_3 แทนเฉพาะเวลาที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 เราจึงบวก P_3 เข้าไปในสมการที่แทนศูนย์เครื่องจักรที่ 2 โดยมีศูนย์เป็นสัมประสิทธิ์ ด้วยเหตุผลอย่างเดียวกับที่กล่าวข้างต้น เราบวก $0P_4$ เข้าไปในสมการที่แทนข้อยับยั้งทางด้านเวลาในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 ดังนั้นสมการต่าง ๆ จะเป็นดังนี้

ทำให้กำไร $= 8P_1$ บาท $+ 6P_2$ บาท $0P_3$ บาท $+ 0P_4$ บาท อยู่ในระดับสูงสุด (8–3)

โดยขึ้นอยู่กับ: $4P_1 + 2P_2 + P_3 + 0P_4 = 60$ ชั่วโมง (9–1)

$2P_1 + 4P_2 + 0P_3 + P_4 = 48$ ชั่วโมง (9–2)

เพื่อความสะดวกในการดำเนินการเกี่ยวกับสมการต่าง ๆ ในปัญหานี้ เราอาจจะจัดเรียงสมการเหล่านี้ในรูปตาราง จากบทที่ 7 เราทราบแล้วว่า เราอาจแก้สมการชุดหนึ่งโดยใช้เฉพาะสัมประสิทธิ์เท่านั้น และไม่จำต้องเขียนตัวแปรผันใหม่ทุกครั้งไป

ตาราง 9–1

ส่วนต่าง ๆ ของตารางซิมเพล็กซ์

แถวตั้ง C_j (กำไรต่อหน่วย)

แถวตั้งส่วนผสมผลิตภัณฑ์

แถวตั้งตัวคงที่ (ปริมาณผลิตภัณฑ์ในส่วนผสม)

แถวตั้งตัวแปรผัน

C_j			8	6	0	0	←แถวนอน C_j
	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4	←แถวนอนตัวแปรผัน
0 บาท	P_3	60	4	2	1	0	แถวนอน 2 แถวนี้ แสดงสมการข้อยับยั้ง (เฉพาะสัมประสิทธิ์เท่านั้น)
0 บาท	P_4	48	2	4	0	1	

ตัวเมตริกซ์ เมตริกซ์ไอเดนติตี้

ในการอธิบายตารางซิมเพล็กซ์ และชี้ให้เห็นส่วนประกอบต่าง ๆ ของตารางนี้ตลอดจนหน้าที่ของส่วนประกอบแต่ละส่วนคงมีส่วนช่วยทำให้เราเข้าใจวิธีนี้ได้ดียิ่งขึ้น ก่อนอื่นให้ดูตาราง 9–1 เราได้แสดงสมการข้อยับยั้งทั้งสองสมการไว้ในตารางซิมเพล็กซ์ ดังนี้ :

	P_1	P_2	P_3	P_4
60	4	2	1	0
48	2	4	0	1

ข้อที่น่าสังเกตประการแรกคือ แถวนอนที่ 1 (4, 2, 1, 0) แทนสัมประสิทธิ์ของสมการแรก และแถวนอนที่ 2 (2, 4, 0, 1) แทนสัมประสิทธิ์ของสมการที่ 2 ประการที่สองแถวตั้งตัวแปรผันแต่ละแถวจะประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของตัวที่ยังไม่ทราบค่าแต่ละตัว ตัวอย่างเช่นเราเขียน $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ไว้ใต้ P_1 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ไว้ใต้ P_2 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ไว้ใต้ P_3 และ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ไว้ใต้ P_4 ประการที่สาม ตัวคงที่ (60 และ 48) อยู่ทางซ้ายมือของสมการ การสร้างตารางซิมเพล็กซ์จึงเป็นแต่เพียงจัดเรียงจำนวนต่าง ๆ ของสมการข้อยับยั้งเสียใหม่เท่านั้น

เช่นเดียวกับวิธีพีชคณิตตามที่ได้อธิบายไปแล้วในบทที่ 8 เราต้องกำหนดคำเฉลยเริ่มแรกขึ้นมาอันหนึ่ง คำเฉลยที่เป็นจุดเริ่มต้นนี้จะเป็นคำเฉลยที่ให้กำไรเท่ากับศูนย์ ตามคำเฉลยนี้จะไม่มีการผลิตโต๊ะและเก้าอี้ และไม่ได้ใช้เวลาที่มีอยู่เลย ดังนั้นกำไรที่ได้รับจึงเท่ากับศูนย์ เราทราบจากวิธีพีชคณิตแล้วว่า ถ้าไม่มีการผลิตโต๊ะและเก้าอี้ กล่าวคือ ถ้า $P_1 = 0$ และ $P_2 = 0$ คำเฉลยอันแรกจะเป็นดังนี้ :

$$P_1 = 0$$
$$P_2 = 0$$
$$P_3 = 60$$
$$P_4 = 48$$

คำเฉลยอันแรกที่อาจเป็นไปได้ดังกล่าวปรากฏในตารางซิมเพล็กซ์ดังนี้ :

ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4
P_3	60	4	2	1	0
P_4	48	2	4	0	1

จะสังเกตได้ว่า แถวตั้งส่วนผสมผลิตภัณฑ์ประกอบด้วยตัวแปรผันที่มีอยู่ในคำเฉลย ตัวแปรผันที่อยู่ในคำเฉลยอันแรกคือ P_3 และ P_4 (ตัวแปรผันส่วนขาด) จากแถวตั้งปริมาณเราทราบปริมาณของตัวแปรผันที่ปรากฏในคำเฉลย ดังนี้

$P_3 =$ 60 ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1

$P_4 =$ 48 ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2

เนื่องจากตัวแปรผัน P_1 และ P_2 ไม่ปรากฏอยู่ในส่วนผสม ตัวแปรผันทั้งสองจึงเท่ากับศูนย์

กำไรต่อหน่วยของตัวแปรผัน P_3 และ P_4 ปรากฏอยู่ในแถวตั้ง C_j ของตาราง 9–1 ตัวอย่างเช่น เลขศูนย์ที่ปรากฏอยู่ทางซ้ายมือของแถวนอน P_3 ในตาราง 9–1 หมายความว่า กำไรต่อหน่วยของ P_3 เท่ากับศูนย์

เมตริกซ์ไอเดนติตี้ในตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันส่วนขาด ที่เพิ่มเข้าไปในอสมการข้อยับยั้งเพื่อทำให้อสมการเหล่านั้นเป็นสมการ

ตัวเมตริกซ์ประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันผลิตภัณฑ์ที่แท้จริง คือ P_1 และ P_2 ตัวอย่างเช่น ค่า 4 ในแถวตั้ง P_1 ของตัวเมตริกซ์หมายความว่า ถ้าเราต้องการที่จะผลิต P_1 1 หน่วย กล่าวคือ นำโต๊ะเข้ามาในคำเฉลย 1 ตัว เราจะต้องสละ P_3 ที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 เป็นจำนวน 4 ชั่วโมง

ในทำนองเดียวกัน ค่า 2 ในแถวตั้ง P_2 ชี้ให้เห็นว่า การผลิต P_2 1 หน่วย กล่าวคือ นำเก้าอี้เข้ามาในคำเฉลย 1 ตัว จะบังคับให้เราต้องสละ P_3 ที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 เป็นจำนวน 2 ชั่วโมง

ดังนั้น ค่าต่าง ๆ ที่ปรากฏอยู่ในตัวเมตริกซ์จึงแทนอัตราการทดแทน (rates of substitution) นั่นเอง

ค่า 1 ในแถวตั้ง P_3 ชี้ให้เราทราบว่า การนำ P_3 เข้ามา 1 ชม. กล่าวคือ จัดให้มี P_3 เพิ่มขึ้น 1 ชั่วโมง เราจะต้องสละ P_3 1 ใน 60 ชั่วโมงที่มีอยู่ในคำเฉลยในขณะนี้ เนื่องจากศูนย์ที่ 1 มีเวลาอยู่เพียง 60 ชั่วโมงเท่านั้น เราจึงต้องสละ 1 ใน 60 ชั่วโมง ถ้าเราต้องการนำเวลา 1 ชั่วโมงไปใช้เพื่อวัตถุประสงค์อย่างอื่น นี่ก็คล้ายกับการนำเอา 1 ชั่วโมงออกจากส่วนบนของเวลาที่มีอยู่ทั้งหมด และนำอีกชั่วโมงหนึ่งเพิ่มเข้าไปที่ส่วนล่างของเวลาที่มีอยู่นั้น

เลขศูนย์ในแถวตั้ง P_4 ที่อยู่ใต้ P_4 หมายความว่า ถ้าจะนำเวลาที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 ไปใช้เพื่อวัตถุประสงค์อื่น 1 ชั่วโมง จะไม่มีผลต่อ P_3 ซึ่งเป็นชั่วโมงว่างของศูนย์ที่ 1 เลย

ดังนั้นในการพิจารณาอัตราการทดแทน เราได้แยกการกระทำออกเป็น 2 อย่าง

1. การเพิ่มผลิตภัณฑ์ที่แท้จริงคือ P_1 และ P_2 เข้าไปในตารางการผลิตหรือคำเฉลย

2. การดึงเวลาคือ P_3 และ P_4 จากจำนวนชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งสิ้น ในศูนย์เครื่องจักรแต่ละศูนย์ เพื่อนำไปใช้สำหรับวัตถุประสงค์อย่างอื่น

เท่าที่ได้อธิบายมาถึงจุดนี้ การสร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรกยังไม่มีการคำนวณเข้ามาเกี่ยวข้องอยู่ด้วยเลย เราเพียงแต่จัดสมการของปัญหาเสียใหม่เพื่อสร้างเป็นตารางซิมเพล็กซ์ตารางแรกเท่านั้น

ตาราง 9—2

ตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรกที่สำเร็จบริบูรณ์ (เพิ่มแถวนอนสองแถว)						
C_j			8	6	0	0
	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4
0 บาท	P_3	60	4	2	1	0
0 บาท	P_4	48	2	4	0	1
แถวนอนสอง	Z_j	0 บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท
แถวที่บวกเพิ่ม	$C_j—Z_j$		8 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท

ในการคำนวณกำไรของคำเฉลยแต่ละอัน และการพิจารณาว่าเราสามารถทำให้คำเฉลยที่ได้ดียิ่งขึ้นหรือไม่ เราจำเป็นต้องเพิ่มแถวนอนเข้าไปในตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรกอีก 2 แถว คือ แถวนอน Z_j และแถวนอน $C_j—Z_j$ ดังที่ปรากฏในตาราง 9—2 มูลค่าในแถวนอน Z_j ที่อยู่ภายใต้แถวตั้งปริมาณแทนกำไรทั้งสิ้นที่ได้รับจากคำเฉลยนี้ ในกรณีนี้คือ 0 บาท ในคำเฉลยอันแรกนี้ เรามีเวลาที่ไม่ได้ใช้ 60 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 ($P_3 = 60$) และมีเวลาที่ไม่ได้ใช้ 48 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 ($P_4 = 48$) กำไรทั้งสิ้นของคำเฉลยนี้ ได้มาโดยการคูณกำไรต่อหน่วยของ P_3 (0 บาท) ด้วยปริมาณ P_3 ในคำเฉลย (60 ชั่วโมง) บวกกำไรต่อหน่วยของ P_4 (0 บาท) คูณปริมาณ P_4 ในคำเฉลย (48 ชั่วโมง)

กำไรทั้งสิ้นจากคำเฉลยอันแรก :

จำนวนชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้ P_3	= 60	
คูณกำไรต่อหน่วยของ P_3	× 0 บาท	= 0 บาท
จำนวนชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้ P_4	= 48	
คูณกำไรต่อหน่วยของ P_4	× 0 บาท	= 0 บาท
กำไรทั้งสิ้น		= 0

มูลค่า Z_j ทั้งสี่ที่อยู่ภายใต้แถวตั้งตัวแปรผัน (ซึ่งเท่ากับ 0 ทั้งหมด) คือจำนวนกำไรที่ลดลงถ้าเพิ่มตัวแปรผันตัวใดตัวหนึ่ง (P_1, P_2, P_3, P_4) เข้าไปในส่วนผสม 1 หน่วย ตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการผลิต P_1 1 หน่วย ค่า $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ในตัวเมตริกซ์จะชี้ให้เราทราบว่า เราต้องสละ P_3 4 ชั่วโมง และ P_4 2 ชั่วโมง แต่เวลาที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์เครื่องจักรแต่ละศูนย์มีค่าเท่ากับ 0 บาทต่อชั่วโมง เมื่อเป็นเช่นนี้จึงไม่ทำให้กำไรที่ได้รับลดลงแต่อย่างใด

เราจะสูญเสียกำไรเป็นจำนวนเท่าไร ถ้าเพิ่ม P_1 เข้าไปในตารางการผลิตหรือคำเฉลย 1 หน่วย ?

จำนวนชั่วโมง P_3 ที่สูญเสียไป	=	4		
คูณกำไรต่อหน่วยของ P_3	×	0 บาท	=	0 บาท
จำนวนชั่วโมง P_4 ที่สูญเสียไป	=	2		
คูณกำไรต่อหน่วยของ P_4	×	0 บาท	=	0 บาท
กำไรทั้งสิ้นที่สูญเสียไป			=	0 บาท

C_j คือกำไรต่อหน่วยตามที่ได้นิยามไว้แล้ว สำหรับโต๊ะ (P_1) C_j เท่ากับ 8 บาทต่อหน่วย

C_j-Z_j คือ กำไรสุทธิที่ได้จากการนำตัวแปรผันตัวใดตัวหนึ่งเพิ่มเข้าไปในตารางการผลิตหรือคำเฉลยเป็นจำนวนหนึ่งหน่วย ตัวอย่างเช่น ถ้า P_1 1 หน่วยเพิ่มกำไรให้แก่คำเฉลยเป็นจำนวน 8 บาท และถ้าการนำ P_1 เข้ามาไม่ก่อให้เกิดความสูญเสียแต่อย่างใด ดังนั้น C_j-Z_j สำหรับ P_1 จึง = 8 บาท

การคำนวณค่าของ Z_j สำหรับตาราง 9—2 ปรากฏดังนี้ :

Z_j (กำไรทั้งสิ้น) = (0 บาท) (60) + (0 บาท) (48) = 0 บาท

Z_j สำหรับแถวตั้ง P_1 = (0 บาท) (4) + (0 บาท) (2) = 0 บาท

Z_j สำหรับแถวตั้ง P_2 = (0 บาท) (2) + (0 บาท) (4) = 0 บาท

Z_j สำหรับแถวตั้ง P_3 = (0 บาท) (1) + (0 บาท) (0) = 0 บาท

Z_j สำหรับแถวตั้ง P_4 = (0 บาท) (0) + (0 บาท) (1) = 0 บาท

การคำนวณกำไรสุทธิต่อหน่วยของตัวแปรผันแต่ละตัวปรากฏดังนี้ :

ตัวแปรผัน	กำไร/หน่วย (C_j)	−	กำไรที่สูญเสียไป/หน่วย (Z_j)	=	กำไรสุทธิ/หน่วย (C_j-Z_j)
P_1	8 บาท	−	0 บาท	=	8 บาท
P_2	6 บาท	−	0 บาท	=	6 บาท
P_3	0 บาท	−	0 บาท	=	0 บาท
P_4	0 บาท	−	0 บาท	=	0 บาท

เมื่อพิจารณาจากตัวเลขในแถวนอน C_j-Z_j ของตาราง 9—2 เราจะเห็นได้ว่า เราสามารถทำให้กำไรทั้งสิ้นเพิ่มขึ้นเป็นจำนวน 8 บาท โดยการบวก P_1 (โต๊ะ) เข้าไปในส่วนผสมหนึ่งหน่วย หรือ 6 บาทโดยการบวก P_2 (เก้าอี้) เข้าไปในส่วนผสมหนึ่งหน่วย ดังนั้นตัวเลขที่มีค่าเป็นบวกในแถวนอน C_j-Z_j (8 บาทในกรณีของแถวตั้ง P_1) จึงชี้ให้เห็นว่า เราอาจ

ทำให้กำไรเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนดังกล่าวโดยการบวก P_1 เข้าไปหนึ่งหน่วย ในทางกลับกัน ตัวเลขที่มีค่าเป็นลบในแถวนอน C_j-Z_j จะชี้ให้เห็นว่า ถ้านำตัวแปรผันของแถวตั้งแถวนั้นเข้ามาในคำเฉลย 1 หน่วย จะทำให้จำนวนกำไรที่ได้รับลดลงเป็นจำนวนเท่าใด เพราะฉะนั้น เราจะได้คำเฉลยที่ดีที่สุดต่อเมื่อไม่มีตัวเลขที่มีค่าเป็นบวกปรากฏอยู่ในแถวนอน C_j-Z_j หมายความว่า เราไม่สามารถทำกำไรได้มากกว่านั้นอีกแล้ว

การพัฒนาคำเฉลยที่ดีขึ้น
(Developing the Improved Solutions)

หลังจากที่ได้สร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรกแล้ว งานขั้นถัดไปได้แก่การพิจารณาดูว่าเราสามารถทำให้ตารางนี้ดีขึ้นได้หรือไม่ การคำนวณคำเฉลยที่สองจะต้องดำเนินการตามวิธีการดังต่อไปนี้

1. พิจารณาดูว่า ตัวแปรผันใดเพิ่มกำไรต่อหน่วยให้แก่กำไรได้มากที่สุด ตัวเลขในแถวนอน C_j-Z_j ชี้ให้เห็นอย่างแน่นอนว่าผลิตภัณฑ์ใดเพิ่มกำไรได้มากที่สุด เราได้กล่าวแล้วว่าตัวเลขที่มีค่าเป็นบวกตามที่ปรากฏในแถวนอน C_j-Z_j จะเป็นเครื่องชี้ให้เห็นว่าเราสามารถทำให้กำไรที่ได้รับเพิ่มขึ้นได้ เพราะฉะนั้นถ้าตัวเลขที่มีค่าเป็นบวกยิ่งสูงเพียงใด กำไรที่ได้รับเพิ่มขึ้นก็จะมีจำนวนมากเพียงนั้น

เราเลือกตัวแปรผันที่ทำกำไรต่อหน่วยสูงสุด เป็นตัวแปรผันที่จะเพิ่มเข้าไปในคำเฉลยอันแรกเช่นเดียวกับวิธีพีชคณิต จากตาราง 9—3 การนำ P_1 (โต๊ะ) เข้ามา 1 หน่วย จะทำให้กำไรเพิ่มขึ้น 8 บาท แถวตั้ง P_1 จึงเป็นแถวตั้งที่ดีที่สุด

ตาราง 9—3

แถวตั้งที่ดีที่สุดในตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก

C_j			8	6	0	0
	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4
0 บาท	P_3	60	4	2	1	0
0 บาท	P_4	48	2	4	0	1
	Z_j	0 บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท
	C_j-Z_j		8 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท

↑ แถวตั้งที่ดีที่สุด

จากคำนิยาม แถวตั้งที่ดีที่สุด (ตาราง 9–3) คือ แถวตั้งที่มีค่าบวกสูงสุดในแถวนอน $C_j–Z_j$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ แถวตั้งของผลิตภัณฑ์ที่ทำกำไรต่อหน่วยสูงสุด

เมื่อพิจารณาจากแถวตั้งที่ดีที่สุด เราจะเห็นได้ว่า ควรจะเพิ่มตัวแปรผัน P_1 (โต๊ะ) เข้าไปในส่วนผสม เพื่อแทนที่ตัวแปรผันตัวใดตัวหนึ่งที่มีอยู่ในส่วนผสมในขณะนี้

2. งานขั้นถัดไป ได้แก่การพิจารณาว่าตัวแปรผัน P_1 ควรจะเข้ามาแทนที่ตัวแปรผันตัวใด ในการพิจารณานี้ เราจะต้องดำเนินการในลักษณะดังต่อไปนี้ : หาร 60 และ 48 ในแถวตั้งปริมาณด้วยตัวเลขที่อยู่ในแถวตั้งที่ดีที่สุดและแถวนอนเดียวกัน และเลือกแถวนอนที่มีอัตราส่วนที่น้อยกว่าหรือน้อยที่สุดเป็นแถวนอนที่ถูกแทนที่ ในกรณีนี้อัตราส่วนดังกล่าวจะเป็นดังนี้ :

$$\text{แถวนอน } P_3 \quad \frac{60 \text{ ชั่วโมงที่มีอยู่}}{4 \text{ ชั่วโมงที่ต้องใช้ต่อหน่วย}} \quad = \quad P_1 \ 15 \text{ หน่วย}$$

$$\text{แถวนอน } P_4 \quad \frac{48 \text{ ชั่วโมงที่มีอยู่}}{2 \text{ ชั่วโมงที่ต้องใช้ต่อหน่วย}} \quad = \quad P_1 \ 24 \text{ หน่วย}$$

ในเมื่อแถวนอน P_3 มีอัตราส่วนที่มีค่าเป็นบวกน้อยกว่าแถวนอน P_4 (15 : 1 เมื่อเปรียบเทียบกับ 24 : 1) เราจึงเรียกแถวนอนนี้ว่าเป็น "แถวนอนที่ถูกแทนที่" (replaced row) เพราะแถวนอนนี้จะถูกแทนที่ด้วย P_1 15 หน่วยในคำเฉลยถัดไป ค่าที่อยู่ระหว่างแถวนอน P_3 หรือ P_4 กับแถวตั้งที่ดีที่สุด เรียกว่า "ค่าที่ตัดกัน" (intersectional elements) ดังนั้น ค่าที่ตัดกันของแถวนอนที่ถูกแทนที่คือ 4 และค่าที่ตัดกันของแถวนอน P_4 คือ 2 (ดูตาราง 9–4) การแทนที่แถวนอนในที่นี้หมายความว่าตัวแปรผัน P_1 15 หน่วย (โต๊ะ 15 ตัว) จะเข้ามาแทนที่ P_3 (เวลาที่ไม่ได้ใช้) ในคำเฉลยถัดไป

ตาราง 9–4

แถวนอนที่ถูกแทนที่และค่าที่ตัดกัน ในตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก

C_j	ส่วนผสม ผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	8	6	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
0 บาท	P_3	60	4	2	1	0
0 บาท	P_4	48	2	4	0	1
	Z_j	0 บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท
	$C_j–Z_j$		8 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท

← แถวนอนที่ถูกแทนที่

ค่าที่ตัดกัน

↑ แถวตั้งที่ดีที่สุด

3. หลังจากที่ได้เลือกแถวตั้งที่ดีที่สุดและแถวนอนที่ถูกแทนที่แล้ว เราก็สามารถพัฒนาคำเฉลยซิมเพล็กซ์อันที่ 2 ซึ่งเป็นคำเฉลยที่ดีกว่าเดิม

ส่วนแรกของตารางอันใหม่ที่เราจะพัฒนาขึ้นมาคือ แถวนอน P_1 แถวนอน P_1 จะเข้ามาแทนที่แถวนอนที่ถูกแทนที่ (P_3) ตามที่ปรากฏในตาราง 9—4 แถวนอน P_1 ของตารางอันใหม่คำนวณได้ดังนี้ : หารตัวเลขแต่ละตัวที่อยู่ในแถวนอนที่ถูกแทนที่ (แถวนอน P_3) ด้วยค่าที่ตัดกัน (4) ของแถวนอนที่ถูกแทนที่

$60/4 = 15 \quad 4/4 = 1 \quad 2/4 = 1/2 \quad 1/4 = 1/4 \quad 0/4 = 0$

ดังนั้น แถวนอน P_1 ใหม่ควรจะเป็น (15, 1, 1/2, 1/4, 0)

จากตาราง 9—5 จะสังเกตได้ว่า มีตัวเลขจำนวนเงิน (8 บาทต่อหน่วย) ไปปรากฏอยู่ในแถวตั้ง C_j เป็นครั้งแรก และจะสังเกตได้อีกว่า P_4 และกำไรต่อหน่วยของ P_4 (0 บาท) ยังคงปรากฏอยู่ในตารางอันใหม่

ตาราง 9—5

แถวนอนที่เข้ามาแทนที่ในตารางซิมเพล็กซ์ที่สอง							
C_j			8 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท	
	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4	
8 บาท	P_1	15	1	1/2	1/4	0	←—แถวนอนที่เข้ามาแทนที่
0 บาท	P_4						
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

4. เพื่อทำให้ตารางที่สองสำเร็จบริบูรณ์ เราจะต้องคำนวณค่าต่าง ๆ ของแถวนอนที่เหลือ แถวนอนที่เหลือทุกแถวของตัวแปรผันต่าง ๆ ที่อยู่ในตารางคำนวณโดยใช้สูตรต่อไปนี้ :

$$\left(\begin{array}{c}\text{ค่าของ}\\\text{แถวนอนเดิม}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{ค่าที่ตัดกัน}\\\text{ของแถวนอนเดิม}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{ค่าที่อยู่ตรงกันใน}\\\text{แถวนอนที่เข้ามาแทนที่}\end{array}\right) = \text{แถวนอนใหม่}$$

จากสูตรนี้ แถวนอน P_4 ใหม่ คือ :

(ค่าของแถวนอน P_4 เดิม)	−	(ค่าที่ตัดกันของแถวนอน P_4)	×	(ค่าที่อยู่ตรงกันในแถวนอนที่เข้ามาแทนที่)	=	แถวนอน P_4 ใหม่
48	−	(2	×	15)	=	18
2	−	(2	×	1)	=	0
4	−	(2	×	1/2)	=	3
0	−	(2	×	1/4)	=	−1/2
1	−	(2	×	0)	=	1

ตาราง 9—6 แสดงแถวนอน P_4 ใหม่ตามที่ปรากฏในตารางที่สอง วิธีการคำนวณแถวนอน Z_j และ $C_j - Z_j$ (โอกาสการทำกำไร) ได้อธิบายไปแล้วในการพัฒนาตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก

ตาราง 9—6

แถวนอนที่เข้ามาแทนที่และแถวนอน P_4 ใหม่ในตารางที่สอง

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	8 บาท P_1	6 บาท P_2	0 บาท P_3	0 บาท P_4
8 บาท	P_1	15	1	1/2	1/4	0
0 บาท	P_4	18	0	3	−1/2	1
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

การคำนวณแถวนอน Z_j ของตารางที่สองปรากฏดังนี้ :

Z_j (กำไรทั้งสิ้น) = (8 บาท) (15) + (0 บาท) (18) = 120 บาท = กำไรทั้งสิ้นของคำเฉลยที่ 2

Z_j สำหรับ P_1 = (8 บาท) (1) + (0 บาท) (0) = 8 บาท
Z_j สำหรับ P_2 = (8 บาท) (1/2) + (0 บาท) (3) = 4 บาท
Z_j สำหรับ P_3 = (8 บาท) (1/4) + (0 บาท) (−1/2) = 2 บาท
Z_j สำหรับ P_4 = (8 บาท) (0) + (0 บาท) (1) = 2 บาท

กำไรที่ต้องสูญเสียไป ถ้านำเอาตัวแปรผันเหล่านี้เข้ามา 1 หน่วย

ดังนั้น การคำนวณข้างต้นจึงชี้ให้เห็นว่าการนำ P_1 เข้ามา 1 หน่วยจะทำให้เราเสียหาย 8 บาท ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ?

ก. ในขณะนี้เราทำการผลิต P_1 15 หน่วย

ข. การผลิตโต๊ะ 15 ตัวจะต้องใช้เวลาทั้งหมดที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1

ค. ถ้าจะนำ P_1 เข้ามาอีกหนึ่งหน่วย เราจะต้องสละ P_1 1 ใน 15 หน่วยที่ผลิตอยู่ในขณะนี้

ง. การลดการผลิตโต๊ะ 1 ตัวจะก่อให้เกิดต้นทุนแก่เรา 8 บาท

แถวนอน $C_j - Z_j$ (กำไรสุทธิต่อหน่วย) ใหม่ คือ :

ตัวแปรผัน	กำไร/หน่วย (C_j)	–	กำไรที่สูญเสียไป/หน่วย (Z_j)	=	กำไรสุทธิ/หน่วย ($C_j - Z_j$)
P_1	8 บาท	–	8 บาท	=	0 บาท
P_2	6 บาท	–	4 บาท	=	2 บาท
P_3	0 บาท	–	2 บาท	=	–2 บาท
P_4	0 บาท	–	0 บาท	=	0 บาท

ตาราง 9–7 แสดงตารางที่สองที่สำเร็จบริบูรณ์ กำไรทั้งสิ้นจากคำเฉลยอันที่ 2 (120 บาท) ดีกว่ากำไรที่เท่ากับศูนย์ตามคำเฉลยอันแรกมาก

ตาราง 9–7

ตารางซิมเพล็กซ์ที่สองที่สำเร็จบริบูรณ์						
C_j			8 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท
	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4
8 บาท	P_1	15	1	1/2	1/4	0
0 บาท	P_4	18	0	3	–1/2	1
	Z_j	120 บาท	8 บาท	4 บาท	2 บาท	0 บาท
	$C_j - Z_j$		0 บาท	2 บาท	–2 บาท	0 บาท

ตัวเลขที่มีค่าเป็นบวก (2 บาท) ตามที่ปรากฏอยู่ในแถวตั้ง P_2 และแถวนอน $C_j - Z$ ของคำเฉลยอันที่ 2 (ตาราง 9–7) ชี้ให้เห็นว่าเราอาจทำให้กำไรที่ได้รับสูงขึ้นอีกได้ เพราะฉะนั้น ในการพัฒนาคำเฉลยอันที่ 3 เราจะต้องดำเนินการตามขบวนการที่ใช้ในการพัฒนาคำเฉลยอันที่ 2 อีกครั้งหนึ่ง

1. ถ้าพิจารณาจากแถวนอน $C_j - Z_j$ ของตารางที่สอง (ตาราง 9–7) จะเห็นได้ว่า P_2 หรือเก้าอี้ทำกำไรสุทธิต่อหน่วย 2 บาท

C_j	กำไรต่อหน่วยของ P_2	6 บาท
Z_j	กำไรที่สูญเสียไปต่อหน่วยของ P_2	(–)4 บาท
$C_j - Z_j$	กำไรสุทธิต่อหน่วยของ P_2	2 บาท

เพราะฉะนั้น แถวตั้งที่ดีที่สุดในตาราง 9–7 คือแถวตั้ง P_2 ต่อไปเราจะเพิ่มเก้าอี้เข้าไปเพื่อแทนที่ตัวแปรผันตัวใดตัวหนึ่งคือ P_1 หรือ P_4 ที่มีอยู่ในคำเฉลยอันที่ 2

2. การหาแถวนอนที่ถูกแทนที่คงดำเนินการอย่างเดียวกับที่ได้ทำไปแล้ว โดยหาร 15 และ 18 ในแถวตั้งปริมาณด้วยตัวเลขที่อยู่ในแถวตั้งที่ดีที่สุดและแถวนอนเดียวกัน และเลือกแถวนอนที่มีอัตราส่วนที่น้อยกว่าเป็นแถวนอนที่ถูกแทนที่

แถวนอน P_1 $\quad \frac{15}{1/2} = 30$

แถวนอน P_4 $\quad \frac{18}{3} = 6$

แถวนอน P_4 ซึ่งมีอัตราส่วนที่น้อยกว่าจึงเป็นแถวนอนที่ถูกแทนที่ ตาราง 9–8 แสดงแถวตั้งที่ดีที่สุด แถวนอนที่ถูกแทนที่ และค่าที่ตัดกันของตารางที่สอง

ตาราง 9–8

แถวตั้งที่ดีที่สุด แถวนอนที่ถูกแทนที่
และค่าที่ตัดกันของตารางที่สอง

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	8 บาท P_1	6 บาท P_2	0 บาท P_3	0 บาท P_4
8 บาท	P_1	15	1	1/2	1/4	0
0 บาท	P_4	18	0	3	–1/2	1
	Z_j	120 บาท	8 บาท	4 บาท	2 บาท	0 บาท
	$C_j - Z_j$		0 บาท	2 บาท	–2 บาท	0 บาท

ค่าที่ตัดกันของแถวนอน P_1

แถวนอนที่ถูกแทนที่ (P_4)

ค่าที่ตัดกันของแถวนอน P_4 (แถวนอนที่ถูกแทนที่)

แถวตั้งที่ดีที่สุด

3. ในการคำนวณแถวนอนที่เข้ามาแทนที่ในตารางที่สาม เราหารตัวเลขแต่ละตัวในแถวนอนที่ถูกแทนที่ด้วยค่าที่ตัดกันของแถวนอนที่ถูกแทนที่

$$\frac{18}{3} = 6 \quad \frac{0}{3} = 0 \quad \frac{3}{3} = 1 \quad \frac{-1/2}{3} = -1/6 \quad \frac{1}{3} = 1/3$$

ดังนั้น แถวนอนที่เข้ามาแทนที่ในตารางที่สาม คือ (6, 0, 1, − 1/6, 1/3) แถวนอนนี้จะเข้ามาอยู่ในตำแหน่งแถวนอนเดียวกับแถวนอนที่ถูกแทนที่ในตารางที่สอง (ดูตาราง 9—9)

ตาราง 9—9

แถวนอนที่เข้ามาแทนที่ในตารางที่สาม							
			8 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท	
C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4	
8 บาท	P_1						
6 บาท	P_2	6	0	1	−1/6	1/3	← แถวนอนที่เข้ามาแทนที่
	Z_j						
	C_j-Z_j						

4. ค่าของแถวนอน P_1 ใหม่ คือ :

(ค่าของแถวนอน P_1 เดิม)	−	(ค่าที่ตัดกันของแถวนอน P_1)	×	(ค่าที่อยู่ตรงกันในแถวนอนที่เข้ามาแทนที่)	=	แถวนอน P_1 ใหม่
15	−	(1/2	×	6)	=	12
1	−	(1/2	×	0)	=	1
1/2	−	(1/2	×	1)	=	0
1/4	−	(1/2	×	−1/6)	=	1/3
0	−	(1/2	×	1/3)	=	−1/6

แถวนอน P_1 ใหม่คือ (12, 1, 0, 1/3, −1/6) เราได้เพิ่มแถวนอนนี้เข้าไปในตารางที่สามตามที่ปรากฏในตาราง 9—10

ตาราง 9—10

แถวนอนที่เข้ามาแทนที่และแถวนอน P_1 ใหม่ในตารางที่สาม						
			8 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท
C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4
8 บาท	P_1	12	1	0	1/3	—1/6
6 บาท	P_2	6	0	1	—1/6	1/3
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

Z_j ในตารางที่สามคำนวณได้ดังนี้ :

Z ทั้งสิ้น = (8 บาท) (12) + (6 บาท) (6) = 132 บาท = กำไรทั้งสิ้นจากคำเฉลยที่สาม

Z_{P_1} = (8 บาท) (1) + (6 บาท) (0) = 8 บาท

Z_{P_2} = (8 บาท) (0) + (6 บาท) (1) = 6 บาท

Z_{P_3} = (8 บาท) (1/3) + (6 บาท) (—1/6) = 5/3 บาท

Z_{P_4} = (8 บาท) (—1/6) + (6 บาท) (1/3) = 2/3 บาท

แถวนอน $C_j - Z_j$ ใหม่ (กำไรสุทธิต่อหน่วย) คำนวณได้ดังนี้ :

ตัวแปรผัน	กำไร/หน่วย (C_j)	—	กำไรที่สูญเสียไป/หน่วย (Z_j)	=	กำไรสุทธิ/หน่วย ($C_j - Z_j$)
P_1	8 บาท	—	8 บาท	=	บาท 0
P_2	6 บาท	—	6 บาท	=	0
P_3	0 บาท	—	5/3 บาท	=	—5/3
P_4	0 บาท	—	2/3 บาท	=	—2/3

ตาราง 9—11 แสดงตารางที่สามที่สำเร็จบริบูรณ์ ในเมื่อไม่มีค่า $C_j - Z_j$ ใดมีค่าเป็นบวก เราจึงไม่อาจทำให้กำไรที่ได้รับมีจำนวนสูงกว่านี้ คำเฉลยที่ได้จึงเป็นคำเฉลยที่ดีที่สุด คำเฉลยที่ดีที่สุด คือ :

$$P_1 = 12$$
$$P_2 = 6$$
$$P_3 = 0$$
$$P_4 = 0$$

กำไรที่ได้รับจะอยู่ในระดับสูงสุด เมื่อมีการผลิตโต๊ะ 12 ตัว และเก้าอี้ 6 ตัวและไม่มีเวลาที่ไม่ได้ใช้ในศูนย์เครื่องจักรทั้งสอง ตัวแปรผัน P_1 และ P_2 ปรากฏอยู่ในแถวตั้ง ส่วนผสมผลิตภัณฑ์พร้อมด้วยจำนวนตามที่แสดงไว้ในแถวตั้งปริมาณ ตัวแปรผัน P_3 และ P_4 ไม่ได้ปรากฏในแถวตั้งส่วนผสมผลิตภัณฑ์ เพราะฉะนั้นจึงมีค่าเท่ากับศูนย์

ตาราง 9—11

ตารางซิมเพล็กซ์ที่สามที่สำเร็จบริบูรณ์						
			8 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท
C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4
8 บาท	P_1	12	1	0	(1/3	—1/6)
6 บาท	P_2	6	0	1	(—1/6	1/3)
	Z_j	132 บาท	8 บาท	6 บาท	5/3 บาท	2/3 บาท
	$C_j - Z_j$		0 บาท	0 บาท	—5/3 บาท	—2/3 บาท

←เมตริกซ์ผกผันของตัวเมตริกซ์เดิม

Z_j ทั้งสิ้น 132 บาทแทนกำไรที่ได้รับภายใต้คำเฉลยที่ดีที่สุด เราอาจพิสูจน์คำเฉลยนี้ได้โดยแทนค่าในสมการเริ่มแรกของปัญหา ดังนี้ :

ฟังก์ชั่นกำไร :

$$Z = 8P_1 \text{ บาท} + 6P_2 + 0\ (P_3 + P_4) \text{ บาท}$$
$$= 8(12) \text{ บาท} + 6\ (6) \text{ บาท} + 0 \text{ บาท}$$
$$= 132 \text{ บาท}$$

ข้อยับยั้งของปัญหา :

$$4P_1 + 2P_2 \leq 60 \quad \text{ศูนย์เครื่องจักรที่ 1}$$
$$4(12) + 2(6) \leq 60$$
$$60 \leq 60$$
$$2P_1 + 4P_2 \leq 48 \quad \text{ศูนย์เครื่องจักรที่ 2}$$
$$2(12) + 4(6) \leq 48$$
$$48 \leq 48$$

การตีความโดยทั่วไปเกี่ยวกับค่าต่าง ๆ ตามที่ปรากฏในตารางซิมเพล็กซ์

(General Interpretation of all Elements in Simplex Tableau)

เท่าที่ได้กล่าวมาแล้วทั้งหมด เราสนใจเฉพาะกลไกหรือกฎเกณฑ์ และวิธีการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องในการแก้ปัญหาซิมเพล็กซ์ แต่อย่างไรก็ดีนอกเหนือไปจากคำเฉลยที่ได้แล้ว วิธีซิมเพล็กซ์ยังทำให้เราได้ข้อสนเทศสำคัญ ๆ เกี่ยวกับคำเฉลยต่าง ๆ ที่มีอยู่ และผลของการเปลี่ยนแปลงในข้อมูลขั้นมูลฐานที่มีต่อคำเฉลยเหล่านั้นอีกด้วย ข้อสนเทศเหล่านี้มักจะมีคุณค่า และทำให้เราทราบข้อเท็จจริงอะไรบางอย่างเช่นเดียวกับคำตอบที่คำนวณออกมาได้

ดังนั้น จุดมุ่งหมายของเราในตอนนี้คือ การอธิบายให้เห็นถึงความสำคัญทางเศรษฐกิจของค่าต่าง ๆ ที่ปรากฏอยู่ในตารางซิมเพล็กซ์ กล่าวคือเป็นการให้ความหมายกับวิธีการต่าง ๆ ที่เราได้ศึกษาไปแล้ว

ในตาราง 9—12 เราได้สร้างตารางซิมเพล็กซ์ที่สองจากตอนก่อนอีกครั้งหนึ่ง (ดูตาราง 9—7) และเขียนตัวเลขกำกับค่าแต่ละค่าไว้ การอธิบายโดยทั่วไปเกี่ยวกับค่าต่าง ๆ ตามตัวเลขที่มีวงกลมล้อมรอบมีดังต่อไปนี้ :

แถวตั้งปริมาณ (The quantity column)

① จากตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก (ตาราง 9—2) เราได้สังเกตแล้วว่า P_1 (โต๊ะ) ทำ

ตาราง 9—12

ตารางซิมเพล็กซ์ที่สองโดยมีตัวเลขกำกับค่าแต่ละค่า						
C_j			8 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท
	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	P_1	P_2	P_3	P_4
		①	⑫	⑯	④	⑧
8 บาท	P_1	15	1	1/2	1/4	0
			⑬	⑰	⑤	⑨
0 บาท	P_4	18	0	3	−1/2	1
		③	⑭	⑱	⑥	⑩
	Z_j	120 บาท	8 บาท	4 บาท	2 บาท	0 บาท
			⑮	⑲	⑦	⑪
	$C_j - Z_j$		0 บาท	2 บาท	−2 บาท	0 บาท

กำไรต่อหน่วยสูงกว่า ดังนั้นจึงควรที่จะนำมาเพิ่มเข้าไปในคำเฉลยอันที่สอง และเราได้ดำเนินการคำนวณจำนวนที่จะนำมาเพิ่มเข้าไปดังนี้ :

$$\frac{\text{60 ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์ที่ 1}}{\text{4 ชั่วโมงที่ต้องใช้ต่อโต๊ะ 1 ตัว}} = \text{โต๊ะ 15 ตัว}$$

ปรากฏว่าปริมาณโต๊ะที่สูงที่สุดที่เราอาจทำการผลิตได้โดยไม่ขัดต่อข้อจำกัดทางด้านเวลาในศูนย์เครื่องจักรทั้งสองคือ 15 ตัว

การผลิตโต๊ะ 15 ตัวต้องใช้เวลาที่มีอยู่ทั้งหมดในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 (4 ชั่วโมงต่อหน่วย × 15 หน่วย = 60 ชั่วโมง) ดังนั้น P_1 จึงเข้ามาแทนที่ P_3 ในคำเฉลย

② โต๊ะแต่ละตัวต้องใช้ 2 ชั่วโมงในศูนย์เครื่องจักรที่ 2 ดังนั้นการผลิตโต๊ะ 15 ตัวจึงต้องใช้ 30 ชั่วโมง (2 ชั่วโมงต่อหน่วย × 15 หน่วย) เนื่องจากเวลาที่มีอยู่ในศูนย์ที่ 2 เท่ากับ 48 ชั่วโมงและต้องการใช้เพียง 30 ชั่วโมง เราจึงมีเวลาเหลืออยู่ในศูนย์นี้ 18 ชั่วโมง

ในแถวตั้งปริมาณ เราจะเห็นได้ว่ามีโต๊ะ 15 ตัว 18 ชั่วโมง และ 120 บาท การรวมรายการที่แตกต่างกันสามชนิดไว้ในแถวตั้งแถวเดียวกันนี้อาจทำให้สับสนบ้าง แต่อย่างไรก็ดีเราจะไม่บวกรายการต่าง ๆ ที่อยู่ในแถวตั้งปริมาณนี้เข้าด้วยกัน ตัวเลข 15 มีความสำคัญในฐานะที่เป็นค่า ๆ หนึ่งของแถวนอน P_1 ไม่ใช่ในฐานะที่เป็นค่า ๆ หนึ่งของแถวตั้งปริมาณ ในทำนองเดียวกัน 18 เป็นค่า ๆ หนึ่งของแถวนอน P_4 และ 120 บาทเป็นค่า ๆ หนึ่งของแถวนอน Z_j

③ 120 บาทแทนกำไรทั้งสิ้นที่ได้จากตัวแปรผันต่าง ๆ ตามที่ปรากฏอยู่ในส่วนผสมผลิตภัณฑ์

จำนวนหน่วยของ P_1 (โต๊ะ)	= 15		
คูณกำไรต่อหน่วยของ P_1	× 8 บาท	=	120 บาท
จำนวนหน่วยของ P_4 (ชั่วโมงที่ไม่ได้ใช้)	= 18		
คูณกำไรต่อหน่วยของ P_4	× 0 บาท	=	0 บาท
กำไรทั้งสิ้นของส่วนผสมที่สอง			120 บาท

ตัวเมตริกซ์และเมตริกซ์ไอเด็นติตี้ (The body and identity matrices)

ค่าต่าง ๆ ตามที่ปรากฏในตัวเมตริกซ์ และเมตริกซ์ไอเด็นติตี้ในตารางซิมเพล็กซ์แทนอัตราการทดแทน เราอาจอธิบายอัตราการทดแทนได้ดังนี้ :

④ ในเมื่อ P_1 1 หน่วย (โต๊ะ 1 ตัว) ต้องใช้ 4 ชั่วโมงในศูนย์ที่ 1 คำเฉลยอันที่ 2 จึงใช้ 60 ชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งหมดในศูนย์ที่ 1 เพราะฉะนั้น ถ้าจะผลิตสิ่งอื่นใดในศูนย์เครื่องจักรนี้

เราจะต้องสละการผลิตโต๊ะลงบ้าง ตัวอย่างเช่น ถ้าจะนำ P_3 1 หน่วย (1 ชั่วโมง) ไปใช้เพื่อวัตถุประสงค์อื่น เราจะต้องลดการผลิตโต๊ะลง 1/4 ตัว หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ทุก ๆ 1 ชั่วโมงของ P_3 ที่เพิ่มเข้าไปในคำเฉลยจะลดการผลิต P_1 (โต๊ะ) ลง 1/4 หน่วย

⑤ การลดการผลิต P_1 (โต๊ะ) ลง 1/4 หน่วยจะต้องมีผลต่อศูนย์ที่ 2 ด้วย เพราะเราจะต้องผลิตเก้าอี้และโต๊ะผ่านศูนย์เครื่องจักรทั้งสอง ในเมื่อ P_1 ต้องใช้ 2 ชั่วโมงต่อหน่วยในศูนย์ที่ 2 และการเพิ่ม P_3 1 หน่วยจะทำให้การผลิต P_1 (โต๊ะ) ลดลง 1/4 หน่วย เพราะฉะนั้น จึงปล่อยให้ศูนย์ที่ 2 มีเวลาว่าง $1/4 \times 2 = 1/2$ ชั่วโมง เราอาจอธิบายได้อีกทางหนึ่งดังนี้

จำนวนหน่วยของ P_1 ที่มีอยู่ในส่วนผสมในขณะนี้		15
ถ้าเพิ่ม P_3 เข้าไปในส่วนผสม 1 หน่วยจะลด P_1 ลง	−	1/4
ปริมาณของ P_1 ใหม่		14 3/4
P_1 หนึ่งหน่วยต้องใช้ 2 ชั่วโมงในศูนย์ที่ 2	×	2
ชั่วโมงที่ต้องใช้ทั้งสิ้นในการผลิต P_1 $14\frac{3}{4}$ หน่วย (ในศูนย์ที่ 2)		29 1/2
ชั่วโมงที่ต้องใช้ทั้งสิ้นในการผลิต P_1 15 หน่วย (2×15)		30
ชั่วโมงทั้งสิ้นที่ปล่อยให้ว่างถ้าเพิ่ม P_3 1 หน่วย		1/2

⑧ การเพิ่ม P_4 เข้าไป 1 หน่วยไม่มีผล (0) ต่อ P_1 เลย ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? ทั้งนี้เพราะว่า ศูนย์เครื่องจักรที่ 1 เป็นศูนย์จำกัด (ได้มีการใช้ชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งหมด) การนำ P_4 ที่มีอยู่ในศูนย์ที่ 2 ไปใช้ 1 ชั่วโมงจึงไม่มีผลต่อการผลิตโต๊ะ เนื่องจากศูนย์ที่ 2 ยังคงมีเวลาเหลืออยู่ 18 ชั่วโมง เราอาจนำ 1 ใน 18 ชั่วโมงที่เหลืออยู่นี้ไปใช้ประโยชน์อย่างอื่นได้โดยไม่ต้องลดการผลิตโต๊ะลงเลย

⑨ การถอน P_4 ออกไป 1 หน่วยเท่ากับเป็นการโยกย้าย P_4 1 หน่วย ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? ในเมื่อเวลาที่มีอยู่ในศูนย์ที่ 2 เท่ากับ 18 ชั่วโมงตามที่ปรากฏในคำเฉลยอันที่ 2 เราอาจจะถอน 1 ชั่วโมง ($1P_4$) ออกไปก็โดยการโยกย้าย 1 ชั่วโมง ($1P_4$) จาก 18 ชั่วโมงที่มีอยู่ในขณะนี้ การเพิ่ม 1 ชั่วโมง ($1P_4$) เข้าไปในศูนย์ที่ 2 จะทำให้เวลาที่มีอยู่ในศูนย์นี้เพิ่มขึ้นเป็น 49 ชั่วโมง แต่นี่เป็นไปไม่ได้ เพราะเวลาที่มีอยู่ทั้งสิ้นในศูนย์ที่ 2 เท่ากับ 48 ชั่วโมง ดังนั้น ในคำเฉลยอันที่ 2 ถ้าเราเพิ่มเข้าไป 1 ชั่วโมง ($1P_4$) เราจะต้องหักออก 1 ชั่วโมง ($1P_4$) เพื่อให้เวลาที่มีอยู่ทั้งสิ้นไม่เกิน 48 ชั่วโมง

⑫ ในที่นี้เรามีอัตราการทดแทน 1 ต่อ 1 กล่าวคือ P_1 1 หน่วยที่เพิ่มเข้าไปในตารางการผลิตจะเข้าแทนที่ P_1 1 หน่วยที่มีอยู่ในคำเฉลย จาก ① เราทราบแล้วว่า ปริมาณโต๊ะที่สูงที่สุดที่อาจผลิตได้ในศูนย์ที่ 1 เท่ากับ 15 ตัว ดังนั้น ถ้าจะเพิ่มโต๊ะเข้าไปอีกหนึ่งตัว และใน

ขณะเดียวกันก็เป็นไปตามข้อจำกัดทางด้านเวลาในศูนย์ที่ 1 (60 ชั่วโมงที่มีอยู่) เราจะต้องหักหรือสละโต๊ะ 1 ตัว เพื่อให้มีเวลาตามที่ต้องการ

⑬ การเพิ่ม P_1 1 หน่วยเข้าไปในตารางการผลิตไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อ P_4 ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? จาก ⑫ เราทราบแล้วว่า ถ้าจะเพิ่มโต๊ะเข้าไปในคำเฉลย 1 ตัว ($1P_1$) จะต้องสละโต๊ะที่มีอยู่ในคำเฉลยในขณะนี้ 1 ตัว เพื่อให้การเปลี่ยนแปลงสุทธิในศูนย์ที่ 2 เท่ากับ 0 ($1-1=0$) ในเมื่อไม่มีการเปลี่ยนแปลงที่แท้จริงในศูนย์ที่ 1 จึงไม่มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ เกิดขึ้นในศูนย์ที่ 2 และไม่ต้องการชั่วโมงเพิ่มขึ้น

⑯ การเพิ่ม P_2 (เก้าอี้) 1 หน่วยเข้าไปในโปรแกรมจะแทนที่ $1/2P_1$ (โต๊ะ) เก้าอี้หนึ่งตัว ($1P_2$) ต้องใช้ 2 ชั่วโมงต่อหน่วยในศูนย์ที่ 1 และโต๊ะหนึ่งตัว ($1P_1$) ต้องใช้ 4 ชั่วโมง ในขณะนี้เนื่องจากศูนย์ที่ 1 เป็นศูนย์จำกัด (เวลาที่มีอยู่ถูกใช้หมดไป) ถ้าจะผลิตเก้าอี้ 1 ตัวจะต้องสละการผลิตโต๊ะ 2/4 หรือ 1/2 ตัว ($1/2P_1$) กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ การผลิตเก้าอี้ 1 ตัวในศูนย์ที่ 1 ต้องใช้ 2 ใน 4 ชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตโต๊ะ 1 ตัว ดังนั้น สำหรับเก้าอี้แต่ละตัวที่ผลิตในศูนย์ที่ 1 จะต้องสละการผลิตโต๊ะ 1/2 ตัว เพื่อให้มีเวลาตามที่ต้องการ 2 ชั่วโมง

⑰ การเพิ่ม P_2 (เก้าอี้) 1 หน่วยจะเข้าแทนที่ P_4 3 หน่วย (3 ชั่วโมง) แต่ปัญหานี้ได้ระบุไว้แต่เดิมว่า $1P_2$ ต้องใช้ 4 ชั่วโมงในศูนย์ที่ 2 เราจะอธิบายและให้เหตุผลเกี่ยวกับความขัดแย้งที่เห็นได้อย่างชัดแจ้งนี้อย่างไร ? ประการแรก จะสังเกตได้ว่าเก้าอี้ 1 ตัว ($1P_2$) จะเข้าแทนที่โต๊ะ 1/2 ตัว จาก ⑯ ประการที่สอง โต๊ะ 1 ตัวต้องใช้เวลา 2 ชั่วโมงในศูนย์ที่ 2 ดังนั้นการสละโต๊ะ 1/2 ตัวจะทำให้เกิดชั่วโมงว่างขึ้น 1 ชั่วโมงในศูนย์ที่ 2 ($1/2 \times 2$ ชั่วโมงที่ต้องใช้สำหรับ P_1 หนึ่งหน่วย = 1 ชั่วโมง) เมื่อนำ 4 ชั่วโมงที่ต้องใช้สำหรับการผลิตโต๊ะหนึ่งตัวในศูนย์ที่ 2 หักด้วยชั่วโมงที่ปล่อยว่าง 1 ชั่วโมง จึงเท่ากับการเปลี่ยนแปลงสุทธิ 3 ชั่วโมง การผลิตเก้าอี้หนึ่งตัวยังคงต้องใช้เวลา 4 ชั่วโมงต่อหน่วย คือ 3 ชั่วโมงบวกด้วย 1 ชั่วโมงที่ปล่อยว่างเท่ากับ 4 ชั่วโมงตามที่ต้องการ เพราะฉะนั้น เมื่อเราพิจารณาถึงผลของการเปลี่ยนแปลงที่มีต่อศูนย์เครื่องจักรทั้งสอง ไม่ใช่เพียงศูนย์เดียว ความขัดแย้งดังกล่าวก็จะหมดไป โต๊ะและเก้าอี้จะต้องผลิตผ่านศูนย์เครื่องจักรทั้งสองจึงจะเป็นหน่วยที่สำเร็จบริบูรณ์ ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงใด ๆ ที่เกิดขึ้นในศูนย์ที่ 1 จะต้องมีผลต่อศูนย์ที่ 2

โดยสรุป ค่าต่าง ๆ ที่อยู่ภายในตัวเมตริกซ์และเมตริกซ์ไอเด็นติตี้ของตารางซิมเพล็กซ์แทนอัตราการทดแทนสุดท้าย ระหว่างตัวแปรผันที่อยู่ในส่วนผสมผลิตภัณฑ์และตัวแปรผันของแถวตั้งนั้น ๆ เราทราบแล้วว่าอัตราการทดแทนที่มีค่าเป็นบวก เช่น ⑯ ชี้ให้เห็นจำนวน P_1 ที่ลดลง ถ้าเพิ่ม P_2 เข้าไปในโปรแกรม 1 หน่วย ในทางตรงกันข้าม อัตราการทดแทนที่มีค่าเป็นลบ เช่น ⑤ ชี้ให้เห็นจำนวน P_4 ที่เพิ่มขึ้น (กล่าวคือ มีเวลาว่าง 1/2 ชั่วโมง) ถ้าเพิ่ม P_3 เข้าไปในโปรแกรม 1 หน่วย

แถวนอน Z_j (The Z_j row)

ต่อไปเราจะอธิบายเกี่ยวกับค่าต่าง ๆ ที่อยู่ในแถวนอน Z_j ค่าเหล่านี้แทนกำไรที่สูญเสียไปอันเนื่องจากการเพิ่มตัวแปรผันของแถวตั้งนั้นเข้าไปในคำเฉลย 1 หน่วย

⑥ การเพิ่ม P_3 เข้าไป 1 หน่วยก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลง 2 อย่าง ประการแรก P_1 ลดลง 1/4 หน่วย (ดู ④) ประการที่สอง P_4 เพิ่มขึ้น 1/2 หน่วย (เวลาที่ว่าง 1/2 ชั่วโมงดู ⑤) ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวทั้งสองอย่าง เราจะสูญเสียกำไรเป็นจำนวนเท่าไร? เนื่องจากกำไรต่อหน่วยของ P_1 เท่ากับ 8 บาท และ P_1 ลดลง 1/4 หน่วย กำไรที่สูญเสียไปที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงนี้จึงเท่ากับ 8 บาท × 1/4 P_1 = 2 บาท เพราะว่ากำไรต่อหน่วยของ P_4 เท่ากับ 0 บาท การเพิ่มของ P_4 1/2 หน่วยจึงไม่ก่อให้เกิดการสูญเสีย (0 บาท × 1/2 P_4 = 0 บาท) ดังนั้น กำไรทั้งสิ้นที่สูญเสียไปจึงเท่ากับผลรวมของการสูญเสียที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงทั้งสอง หรือ 2 บาท + 0 บาท = 2 บาท

กระบวนการให้เหตุผลอย่างเดียวกันนี้ อาจนำไปใช้กับค่าอื่น ๆ ที่อยู่ในแถวนอน Z_j ได้ สิ่งที่เราต้องการทราบคือ ประการแรก การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นเมื่อเพิ่มตัวแปรผันของแถวตั้งนั้นเข้าไป 1 หน่วย ประการที่สอง การสูญเสียกำไรที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงแต่ละอย่าง และประการที่สาม กำไรทั้งสิ้นที่สูญเสียไปซึ่งเท่ากับผลรวมของการสูญเสียที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงแต่ละอย่าง

⑩ เมื่อเพิ่ม P_4 1 หน่วย :

การเปลี่ยนแปลงที่ 1 ไม่มีการเปลี่ยนแปลงใน P_1 (ดู ⑧)	0	
กำไรต่อหน่วยของ P_1	× 8 บาท	
การสูญเสีย		0 บาท
การเปลี่ยนแปลงที่ 2 สละ P_4 1 หน่วย (ดู ⑨)	1	
กำไรต่อหน่วยของ P_4	× 0 บาท	
การสูญเสีย		0 บาท
การสูญเสียทั้งสิ้น		0 บาท

⑭ เมื่อเพิ่ม P_1 1 หน่วย :

การเปลี่ยนแปลงที่ 1 สละ P_1 1 หน่วย (ดู ⑫)	1	
กำไรต่อหน่วยของ P_1	× 8 บาท	
การสูญเสีย		8 บาท

การเปลี่ยนแปลงที่ 2 ไม่มีการเปลี่ยนแปลงใน P_4 (ดู 13)   0
กำไรต่อหน่วยของ P_4 × 0

    การสูญเสีย   0 บาท

การสูญเสียทั้งสิ้น   8 บาท

18 เมื่อเพิ่ม P_2 1 หน่วย :

การเปลี่ยนแปลงที่ 1 สละ P_1 1/2 หน่วย (ดู 16)   1/2
กำไรต่อหน่วยของ P_1 × 8 บาท

    การสูญเสีย   4 บาท

การเปลี่ยนแปลงที่ 2 สละ P_4 3 หน่วย (ดู 17)   3
กำไรต่อหน่วยของ P_4 × 0 บาท

    การสูญเสีย   0 บาท

การสูญเสียทั้งสิ้น   4 บาท

แถวนอน $C_j - Z_j$ (The $C_j - Z_j$ row)

ตัวเลขที่มีค่าเป็นบวกแต่ละตัวในแถวนอน C_j–Z_j แทนกำไรสุทธิที่ได้รับถ้าเพิ่มตัวแปรผันของแถวตั้งนั้นเข้าไปในคำเฉลย 1 หน่วย อธิบายได้โดยอาศัยตัวอย่างต่อไปนี้ :

19 ตัวเลขที่มีค่าเป็นบวก 2 แทนกำไรสุทธิที่ได้รับถ้าเพิ่ม P_2 1 หน่วย (เก้าอี้ 1 ตัว)

กำไรทั้งสิ้นต่อหน่วยของ P_2	6 บาท
หักกำไรทั้งสิ้นต่อหน่วยที่สูญเสียไป (ดู 18)	– 4 บาท
กำไรสุทธิ	2 บาท

ตราบใดที่ยังมีตัวเลขจำนวนเงินที่มีค่าเป็นบวกในแถวนอน C_j–Z_j เราสามารถที่จะทำให้กำไรที่ได้รับสูงขึ้นและเป็นสิ่งที่ควรจะทำ ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? เพราะเราสามารถทำให้กำไร 120 บาทเพิ่มขึ้นเป็นจำนวน 2 บาทต่อ P_2 หนึ่งหน่วยที่เพิ่มเข้าไปในคำเฉลย ค่า 2 (18 ชั่วโมง) และค่า 17 (3 ชั่วโมงต่อเก้าอี้หนึ่งตัว) ชี้ให้เห็นว่า เราสามารถเพิ่มเก้าอี้เข้าไปได้ 18/3 หรือ 6 ตัว

15 กำไรทั้งสิ้นต่อหน่วยของ P_1	8 บาท
กำไรทั้งสิ้นต่อหน่วยที่สูญเสียไป (ดู 14)	– 8 บาท
กำไรสุทธิ	0 บาท

P_1 แต่ละหน่วยที่เพิ่มเข้าไปจะไม่ทำให้กำไรทั้งสิ้นเปลี่ยนแปลง ทั้งนี้อาจอธิบายได้ว่า เรากำลังผลิตโต๊ะในจำนวนที่สูงที่สุดเท่าที่จะทำได้ภายใต้ข้อจำกัดทางด้านเวลาในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 อยู่แล้ว ถ้าจะเพิ่ม P_1 เข้าไปในคำเฉลย 1 หน่วย เราจะต้องสละ P_1 1 หน่วย การเพิ่ม P_1 1 หน่วยจะทำให้กำไรเพิ่มขึ้น 8 บาท แต่การสละ P_1 1 หน่วยทำให้กำไรลดลง 8 บาท ดังนั้นกำไรทั้งสิ้นจึงไม่เปลี่ยนแปลงแต่อย่างใด

⑪	กำไรทั้งสิ้นต่อหน่วยของ P_4	0 บาท
	กำไรทั้งสิ้นต่อหน่วยที่สูญเสียไป (ดู ⑩)	– 0 บาท
	กำไรสุทธิ	0 บาท

P_4 แต่ละหน่วยที่เพิ่มเข้าไปในโปรแกรมจะไม่ทำให้กำไรทั้งสิ้นเปลี่ยนแปลง เราอาจอธิบายได้อีกครั้งหนึ่งว่า ศูนย์ที่ 1 จำกัดการผลิตโต๊ะให้อยู่ในจำนวนเพียง 15 ตัว เพราะฉะนั้น การเพิ่ม P_4 1 หน่วยจึงไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อ P_1 ดู(⑧) ดังนั้น เราไม่สามารถทำให้กำไรทั้งสิ้นเพิ่มขึ้นได้โดยการเพิ่ม P_4 หน่วยใดหน่วยหนึ่งเข้าไปในคำเฉลย

⑦	กำไรทั้งสิ้นต่อหน่วยของ P_3	0 บาท
	หักกำไรทั้งสิ้นต่อหน่วยที่สูญเสียไป (ดู ⑥)	– 2 บาท
	การสูญเสียสุทธิ	– 2 บาท

ตัวเลขที่มีค่าเป็นลบ (การสูญเสียสุทธิ) ในแถวนอน $C_j - Z_j$ ชี้ให้เห็นว่า ถ้าเพิ่มตัวแปรผันของแถวตั้งนั้นเข้ามาในส่วนผสมผลิตภัณฑ์ 1 หน่วย จะทำให้กำไรทั้งสิ้นที่ได้รับลดลงเป็นจำนวนเท่าใด ? ในกรณีนี้การเพิ่ม P_3 เข้าไปในโปรแกรมหนึ่งหน่วยจะทำให้กำไรลดลงเป็นจำนวน 2 บาท ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? จาก ④ เราทราบว่า ถ้าจะเพิ่ม P_3 เข้าไป 1 หน่วย เราจะต้องสละการผลิตโต๊ะ 1/4 ตัว กำไรต่อหน่วยของ P_3 เท่ากับ 0 บาท แต่กำไรต่อหน่วยของ P_1 เท่ากับ 8 บาท เพราะฉะนั้น การเพิ่ม P_3 เข้าไปในคำเฉลยหนึ่งหน่วยจึงทำให้เกิดการสูญเสีย 2 บาท (8 บาท × 1/4 = 2 บาท)

ตัวเลขที่มีค่าเป็นลบในแถวนอน $C_j - Z_j$ ภายใต้แถวตั้งที่แทนเวลา (P_3 หรือ P_4) จะต้องตีความอีกอย่างหนึ่ง ตัวเลขที่มีค่าเป็นลบในที่นี้แทนกำไรทั้งสิ้นที่เพิ่มขึ้นถ้าสามารถทำให้จำนวนชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์นั้น ๆ เพิ่มขึ้น 1 ชั่วโมง ตัวอย่างเช่น จาก ⑦ ถ้าชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์เครื่องจักรที่ 1 เพิ่มขึ้น 1 ชั่วโมง (กล่าวคือ ถ้า $P_3 = 61$ แทนที่จะเป็น 60 ตามที่ปรากฏอยู่ในคำเฉลยเริ่มแรก ตาราง 9–2) กำไรทั้งสิ้นจะเพิ่มขึ้นเป็นจำนวน 2 บาท พิสูจน์ได้โดยใช้สมการที่แทนข้อจำกัดทางด้านเวลาในศูนย์ที่ 1 ที่ดัดแปลงให้เวลาที่มีอยู่เพิ่มขึ้น 1 ชั่วโมง

ถ้า $4P_1 + 2P_2 + P_3 = 61$ (9–3)

และให้ $P_3 = 0$ เนื่องจาก P_2 และ P_3 ไม่ปรากฏอยู่ในคำเฉลยที่สอง

$P_2 = 0$ P_2 และ P_3 จึงเท่ากับ 0

ดังนั้น $4P_1 + 2(0) + 0 = 61$

$$4P_1 = 61 - 2(0) - 0$$
$$= 61$$
$$P_1 = 61/4$$

แทนค่า P_1 ที่ $= 61/4$ สำหรับ P_1 ที่ปรากฏในฟังก์ชั่นกำไร เราจะได้กำไรทั้งสิ้นดังนี้ :

$$\text{กำไร} = 8P_1 \text{ บาท} + 6P_2 \text{ บาท} + 0P_3 \text{ บาท} + 0P_4 \text{ บาท} \quad (8\text{–}3)$$
$$= 8(61/4) \text{ บาท} + 6(0) \text{ บาท} + 0 \text{ บาท} + 0 \text{ บาท}$$
$$= 122 \text{ บาท}$$

จะสังเกตได้ว่า ถ้าทำให้ชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์ที่ 1 เพิ่มขึ้นหนึ่งชั่วโมง จะทำให้กำไรทั้งสิ้นเพิ่มขึ้นเป็นจำนวน 2 บาท

เมื่อมีข้อสนเทศเช่นนี้ ผู้จัดการอาจต้องการที่จะสืบหาว่าพอจะมีทางขยายกำลังการผลิตของศูนย์ที่ 1 ได้หรือไม่

โดยสรุป ตัวเลขที่มีค่าเป็นบวกในแถวนอน $C_j–Z_j$ ชี้ให้เห็นว่าเราอาจจะทำให้กำไรทั้งสิ้นเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนเท่าใด ถ้าเพิ่มตัวแปรผันของแถวตั้งนั้นเข้าไปในคำเฉลย 1 หน่วย ตัวเลขที่มีค่าเป็นลบในแถวนอน $C_j–Z_j$ ชี้ให้เห็นจำนวนกำไรทั้งสิ้นที่ลดลงถ้าเพิ่มตัวแปรผันของแถวตั้งนั้นเข้าไปในคำเฉลย 1 หน่วย ตัวเลขที่มีค่าเป็นลบในแถวนอน $C_j–Z_j$ ภายใต้เมตริกซ์ไอเด็นติตี้ ยังอาจถือได้ว่าเป็นจำนวนที่จะทำให้กำไรทั้งสิ้นเพิ่มขึ้นถ้าสามารถจัดให้มีเวลาในศูนย์เครื่องจักรตามแถวตั้งนั้น ๆ เพิ่มขึ้นอีก 1 ชั่วโมง

ปัญหาการทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุด

(A Minimization Problem)

เท่าที่ได้กล่าวมาแล้ว เราได้อธิบายเกี่ยวกับปัญหาการทำให้กำไรอยู่ในระดับสูงสุด แต่วิธีซิมเพล็กซ์นี้ ยังอาจนำไปใช้สำหรับปัญหาที่มีวัตถุประสงค์ที่จะทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุดอีกด้วย

ตัวอย่างเช่น บริษัทผลิตอาหารสัตว์แห่งหนึ่ง จะต้องผลิตของผสมอย่างหนึ่งซึ่งประกอบด้วย X_1 และ X_2 เป็นจำนวน 200 ปอนด์ X_1 มีต้นทุนปอนด์ละ 3 บาท X_2 มีต้นทุน

ปอนด์ละ 8 บาท ของผสมนี้จะมี X_1 เกิน 80 ปอนด์ไม่ได้ แต่จะต้องมี X_2 อย่างน้อยที่สุด 60 ปอนด์ ปัญหาจึงมีอยู่ว่า ถ้าต้องการที่จะทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุด บริษัทควรจะใช้ส่วนผสมทั้งสองอย่างละเท่าไร ?

เราอาจเขียนฟังก์ชั่นต้นทุนได้ ดังนี้ :

ต้นทุน $= 3X_1$ บาท $+ 8X_2$ บาท

ข้อกำกัดหรือข้อยับยั้งข้อแรกของปัญหานี้ คือ เราจะต้องผลิตของผสมนี้ 200 ปอนด์ไม่มากหรือน้อยกว่านี้ ถ้าจะพูดในเชิงคณิตศาสตร์ ข้อกำกัดนี้ คือ

$$X_1 + X_2 = 200 \text{ ปอนด์}$$

สมการนี้หมายความว่าจำนวนปอนด์ของ X_1 และจำนวนปอนด์ของ X_2 รวมกันเข้าจะต้องเท่ากับ 200 ปอนด์พอดี

ข้อกำกัดข้อที่สองคือ เราจะใช้ X_1 เกิน 80 ปอนด์ไม่ได้ เราอาจจะใช้น้อยกว่า 80 ปอนด์ได้ แต่จะต้องไม่เกิน 80 ปอนด์ ในภาษาคณิตศาสตร์ เราอาจเขียนข้อกำกัดนี้ได้ดังนี้ :

$$X_1 \leq 80 \text{ ปอนด์}$$

ข้อกำกัดข้อที่สามคือ เราจะต้องใช้ X_2 อย่างน้อยที่สุด 60 ปอนด์ เราอาจจะใช้มากกว่า 60 ปอนด์ได้ แต่จะต้องไม่น้อยกว่า 60 ปอนด์ ในเชิงคณิตศาสตร์เราอาจเขียนข้อกำกัดนี้ได้ดังนี้ :

$$X_2 \geq 60 \text{ ปอนด์}$$

โดยสรุป ถ้าจะเขียนปัญหานี้ในรูปคณิตศาสตร์จะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
&\text{ทำให้} && \text{ต้นทุน} = 3X_1 \text{ บาท} + 8X_2 \text{ บาท อยู่ในระดับต่ำสุด} \\
&\text{โดยขึ้นอยู่กับ:} && X_1 + X_2 = 200 \text{ ปอนด์} \\
& && X_1 \leq 80 \text{ ปอนด์} \qquad (9\text{—}4) \\
& && X_2 \geq 60 \text{ ปอนด์}
\end{aligned}$$

มาถึงขั้นนี้ เราอาจกล่าวได้ว่า ไม่ว่าจุดมุ่งหมายจะเป็นการทำให้กำไรอยู่ในระดับสูงสุดหรือการทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุดก็ตาม ขั้นต่าง ๆ ในการสร้างปัญหานั้นคงคล้ายคลึงกันและหลังจากที่ได้สร้างคำเฉลยอันแรกแล้ว วิธีการดำเนินการขั้นถัดไป ก็เหมือนกับที่เราได้อธิบายไปแล้วทุกอย่าง

ต่อไป ลองพิจารณาข้อกำกัดข้อแรกของปัญหาการทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุด ซึ่งแสดงออกมาในรูปสมการดังนี้

$$X_1 + X_2 = 200 \text{ ปอนด์}$$

จากปัญหาของผู้ผลิตตามตัวอย่างแรกเราคงจำได้ว่า ในขั้นแรกเราจะต้องหาคำเฉลยอันหนึ่งซึ่งเป็นคำเฉลยใด ๆ ก็ได้ที่อาจเป็นไปได้ในทางเทคนิค เพื่อที่เราจะได้เริ่มเคลื่อนไปสู่คำเฉลยสุดท้ายซึ่งเป็นคำเฉลยที่ดีที่สุด คำเฉลยอันแรกสำหรับปัญหาของผู้ผลิตดังกล่าวทำให้เราได้รับกำไรที่เท่ากับศูนย์ ถ้าพิจารณาจากกำไรที่ได้รับแล้ว คำเฉลยนี้เป็นคำเฉลยที่ไม่สมเหตุสมผลเลย แต่ก็ได้ทำหน้าที่เป็นจุดเริ่มหรือฐานสำหรับการพัฒนาคำเฉลยที่ดีกว่าหรือเพื่อการขัดเกลาต่อไป

สำหรับปัญหาการทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุดนี้ เราก็ต้องมีคำเฉลยเริ่มต้นอันหนึ่ง คำเฉลยนี้ก็เป็นคำเฉลยที่ไม่สมเหตุสมผลเช่นกันถ้าพิจารณาจากทางด้านต้นทุน แต่จะทำหน้าที่เป็นจุดเริ่มในการเสาะแสวงหาของผสมที่มีต้นทุนต่ำสุดต่อไป

สมมติว่าถ้าเราตัดสินใจที่จะให้ $X_1 = 0$ และ $X_2 = 200$ ก็เท่ากับว่าเราได้ปฏิบัติตามข้อกำกัดทั้งหมด คำเฉลยของเราในกรณีนี้ คือ :

$$X_1 + X_2 = 200$$
$$0 + 200 = 200$$
$$200 = 200 \qquad \text{(เป็นไปตามข้อกำกัด)}$$

$$X_1 \leq 80$$
$$0 \leq 80 \qquad \text{(เป็นไปตามข้อกำกัด)}$$

$$X_2 \geq 60$$
$$200 \geq 60 \qquad \text{(เป็นไปตามข้อกำกัด)}$$

แต่ถ้าเป็นปัญหาที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่านี้ เป็นต้นว่า ปัญหาที่เกี่ยวพันไปถึงส่วนผสม 12 อย่าง (และส่วนผสมแต่ละอย่างก็มีข้อกำกัดของมันเอง) เราจะไม่สามารถหาคำเฉลยอันแรกโดยอาศัยการตรวจตราดู ดังนั้นจุดมุ่งหมายของเราในที่นี้ คือกำหนดวิธีการง่าย ๆ ซึ่งจะช่วยให้เราได้คำเฉลยอันแรกสำหรับปัญหาทุกปัญหา ไม่ว่าปัญหานั้นจะมีความสลับซับซ้อนเพียงใดก็ตาม

เราจะเริ่มโดยไม่มี X_1 หรือ X_2 ในคำเฉลยอันแรกของเราเลย แต่จะเริ่มด้วย X_3 200 ปอนด์แทน X_3 นี้เป็นตัวแปรผันเทียม (artificial variable) ตัวหนึ่ง ซึ่งแทนส่วนผสมใหม่อีกชนิดหนึ่ง

$$X_1 + X_2 + X_3 = 200$$
$$0 + 0 + 200 = 200$$
$$200 = 200 \qquad \text{(เป็นไปตามข้อกำกัด)}$$

แต่ X_3 คืออะไร ? X_3 นี้อาจถือได้ว่าเป็นวัตถุที่แพงมากชนิดหนึ่ง (ปอนด์ละ 100 บาท) ซึ่งอาจนำมาใช้ในการผลิตผลิตภัณฑ์ตามที่เราต้องการแทน X_1 และ X_2 ได้

เมื่อเป็นเช่นนี้ คำเฉลยอันแรกของเราจึงประกอบด้วย X_3 200 ปอนด์ในราคาปอนด์ละ 100 บาท ถ้าพิจารณาจากทางด้านต้นทุน คำเฉลยนี้เป็นคำเฉลยที่ไม่สมเหตุสมผล แต่ก็เป็นคำเฉลยที่อาจเป็นไปได้ในทางเทคนิค กล่าวคือ ผลิตภัณฑ์ที่เราผลิตได้เป็นไปตามความต้องการของลูกค้า

เนื่องจาก X_3 มีราคาสูงมาก (100 บาท เมื่อเปรียบเทียบกับ 8 บาทและ 3 บาท) X_3 จะต้องไม่ปรากฏอยู่ในคำเฉลยที่ดีที่สุดของเรา

สำหรับศัพท์เฉพาะทางด้านการโปรแกรมแบบเส้นตรง ตัวแปรผันชนิดนี้ (X_3) เรียกว่า "ตัวแปรผันเทียม" (artificial variable) ตัวแปรผันเทียมมีคุณค่าเฉพาะในฐานะเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งในการคำนวณเท่านั้น ตัวแปรผันชนิดนี้ทำให้เราสามารถดำเนินการกับข้อกำกัดอีกสองชนิดได้ คือชนิดสมการและชนิดมากกว่าหรือเท่ากับ

ข้อกำกัดข้อที่สองของปัญหานี้ เป็นชนิดที่เราคุ้นเคยอยู่แล้ว

$$X_1 \quad \leq \quad 80 \text{ ปอนด์}$$

เนื่องจากในคำเฉลยอันสุดท้ายของเราอาจปรากฏว่ามี X_1 น้อยกว่า 80 ปอนด์ เพราะฉะนั้น เราจึงต้องบวกด้วยตัวแปรผันส่วนขาดเพื่อทำให้เป็นสมการ ดังนี้ :

$$X_1 + X_4 = 80 \text{ ปอนด์}$$

ตัวแปรผันส่วนขาด X_4 แทนผลต่างระหว่าง X_1 80 ปอนด์ กับจำนวนปอนด์ของ X_1 ที่มีอยู่จริงในคำเฉลยอันสุดท้าย

ในที่สุดเรายังมีข้อกำกัดข้อที่ 3 :

$$X_2 \quad \geq \quad 60 \text{ ปอนด์}$$

ในการเปลี่ยนอสมการนี้ให้เป็นสมการ เราจะต้องหักด้วยตัวแปรผันส่วนขาดตัวหนึ่ง

$$X_2 - X_5 = 60 \text{ ปอนด์}$$

ตัวแปรผันส่วนขาดที่มีค่าเป็นลบ X_5 แทนจำนวน X_2 ที่อยู่ในคำเฉลยอันสุดท้ายที่มากกว่า 60 ปอนด์ ตัวอย่างเช่น ถ้า X_2 ในคำเฉลยอันสุดท้ายเท่ากับ 130 ปอนด์ เพื่อให้เป็นไปตามสมการข้างต้น X_5 จะต้องเท่ากับ 70 ปอนด์ แต่ถ้าในคำเฉลยอันสุดท้ายมี X_2 อยู่ 60 ปอนด์ ค่าของ X_5 ก็จะเท่ากับ 0

เราเห็นได้ทันทีว่า ถ้า $X_2 = 0$ ในคำเฉลยอันแรก $0 - X_5 = 60$ หรือ $X_5 = -60$ สมการนี้เป็นสมการที่ใช้ไม่ได้สำหรับคำเฉลยอันแรก เพราะเป็นสิ่งที่เป็นไปไม่ได้ที่จะมีส่วนผสมชนิดหนึ่งเท่ากับ – 60 ปอนด์ เช่นเดียวกับ โต๊ะ – 12 ตัวหรือเก้าอี้ – 6 ตัว จำนวน – 60 ปอนด์นี้จึงไม่มีความหมายแต่อย่างใด เราจะทำอย่างไรต่อไป ?

วิธีการอย่างหนึ่งคือกันมิให้ X_5 เข้ามาปรากฏอยู่ในคำเฉลยอันแรก แต่เราจะนำอะไรเข้ามาแทนที่ X_5 เพื่อทำให้สมการได้ดุลกัน ? ถ้า X_2 และ X_5 ต่างเท่ากับศูนย์ในคำเฉลยอันแรก เราจะต้องนำส่วนผสมชนิดใหม่เข้ามาอีกชนิดหนึ่ง เป็นส่วนผสมที่ใช้แทน X_2 ได้และจะแทนที่ X_2 ในคำเฉลยอันแรก เช่นเดียวกับกรณี X_3 ส่วนผสมชนิดใหม่นี้ (X_6) อาจถือได้ว่าเป็นวัตถุที่แพงมากอีกชนิดหนึ่ง ราคาปอนด์ละ 100 บาท ราคาของ X_6 ที่แพงมากเช่นนี้ทำให้เราเชื่อมั่นได้ว่า X_6 จะไม่ปรากฏอยู่ในคำเฉลยอันสุดท้ายของเรา ดังนั้นข้อกำกัดเดิม $X_2 \geq 60$ ก็จะถูกเปลี่ยนมาเป็น $X_2 - X_5 = 60$ ก่อน โดยการเพิ่มตัวแปรผันส่วนขาดเข้าไปตัวหนึ่ง ถัดจากนั้นจึงเปลี่ยนเป็น $X_2 - X_5 + X_6 = 60$ โดยรวมตัวแปรผันเทียมเข้าไปอีกตัวหนึ่ง สมการนี้ตามปรากฏในคำเฉลยอันแรกยังคงได้ดุลกัน เพราะว่า $X_2 = 0$ และ $X_5 = 0$

เราได้กล่าวแล้วว่า เราจะกำหนดให้ตัวแปรผันเทียม X_3 และ X_6 มีต้นทุนสูงมากคือปอนด์ละ 100 บาท เพื่อหลีกเลี่ยงการที่จะต้องคำนวณตัวเลขที่มีค่าสูงมาก ๆ เราจะให้ $M = 100$ บาท การกำหนดให้ $M = 100$ นี้ จะทำให้สะดวกต่อการคำนวณในตอนต่อไป

ฟังก์ชั่นกำไรและสมการข้อกำกัดสำหรับตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรกปรากฏดังข้างล่างนี้:

ทำให้ ต้นทุน $= 3X_1$ บาท $+ 8X_2$ บาท อยู่ในระดับต่ำสุด

$$
\begin{aligned}
\text{โดยขึ้นอยู่กับ: } X_1 + X_2 + X_3 \quad &= 200 \\
X_1 \quad + X_4 \quad &= 80 \\
X_2 \quad -X_5 + X_6 &= 60
\end{aligned}
\qquad (9\text{—}5)
$$

เราจะต้องแสดงต้นทุนสำหรับตัวแปรผันส่วนขาด X_4 และ X_5 เท่ากับศูนย์ และต้นทุนสำหรับตัวแปรผันเทียม X_3 และ X_6 เท่ากับ M บาท โดยรวมต้นทุนเหล่านี้ไว้ในฟังก์ชั่นต้นทุนดังนี้ :

ต้นทุน $= 3X_1$ บาท $+ 8X_2$ บาท $+ MX_3$ บาท $+ 0X_4$ บาท $+ 0X_5$ บาท $+ MX_6$ บาท

ในตอนที่เราจัดทำสมการข้อยับยั้งชุดแรกคือสมการ (9—1) และสมการ (9—2) เราได้สังเกตแล้วว่า ตัวที่ไม่ทราบค่าใด ๆ ที่ปรากฏในสมการข้อยับยั้งหนึ่ง จะต้องปรากฏในสมการอื่น ๆ ทั้งหมด เมื่อเป็นเช่นนี้เราจึงต้องเติมตัวแปรผันที่ถูกต้องพร้อมด้วยสัมประสิทธิ์ที่เท่ากับศูนย์เข้าไปในสมการข้อยับยั้งต่าง ๆ

ตาราง 9—13

ตารางซิมเพล็กซ์เริ่มแรก : ปัญหาการทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุด

C_j			3 บาท	8 บาท	M บาท	0 บาท	0 บาท	M บาท	
	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
M บาท	X_3	200	1	1	1	0	0	0	
0 บาท	X_4	80	1	0	0	1	0	0	
M บาท	X_6	60	0	1	0	0	—1	1	← แถวนอนที่ถูกแทนที่
	Z_j	260 M บาท	M บาท	2 M บาท	M บาท	0 บาท	— M บาท	M บาท	
	$C_j—Z_j$		3—M บาท	8—2 M บาท	0 บาท	0 บาท	M บาท	0 บาท	
				↑ แถวตั้งที่ดีที่สุด					

ต่อไปนี้เป็นปัญหาของเราซึ่งพร้อมที่จะใช้ในการคำนวณหาคำเฉลยตามวิธีซิมเพล็กซ์ :

$$\text{ทำให้ต้นทุน} = 3X_1 \text{ บาท} + 8X_2 \text{ บาท} + MX_3 \text{ บาท} + 0X_4 \text{ บาท} + 0X_5 \text{ บาท} + MX_6 \text{ บาท อยู่ในระดับต่ำสุด}$$

$$\begin{aligned} \text{โดยขึ้นอยู่กับ} \quad & X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 200 \\ & X_1 + 0X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 80 \\ & 0X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 - X_5 + X_6 = 60 \end{aligned} \tag{9--6}$$

ตาราง 9–3 แสดงตารางซิมเพล็กซ์ตารางแรก จะสังเกตได้ว่า ต้นทุนของคำเฉลยอันแรกเท่ากับ 260M บาท ซึ่งเป็นจำนวนที่สูงมาก เนื่องจากวัตถุประสงค์ของเราคือทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุด เพราะฉะนั้นเราจึงหาแถวตั้งที่ดีที่สุดโดยเลือกแถวตั้งที่มีค่าในแถวนอน $C_j - Z_j$ เป็นค่าลบสูงสุด (แถวนอนที่มีค่าที่จะลดต้นทุนได้มากที่สุด) เมื่อพิจารณาจากแถวนอน $C_j - Z_j$ ปรากฏว่ามีค่าติดลบอยู่ 2 ค่าเท่านั้น คือ 3—M บาท และ 8—2M บาท ในเมื่อ 8—2M บาทเป็นตัวเลขในแถวนอน $C_j - Z_j$ ที่มีค่าเป็นลบที่สูงกว่า (8—2M บาทเท่ากับ —192 บาท แต่ 3—M บาทเท่ากับ 97 บาทเท่านั้น) X_2 จึงเป็นแถวตั้งที่ดีที่สุด

วิธีการคำนวณหาแถวนอนที่ถูกแทนที่ แถวนอนที่เข้ามาแทนที่ แถวนอนใหม่อื่น ๆ แถวนอน Z_j และแถวนอน $C_j - Z_j$ คงเหมือนกับวิธีการคำนวณที่ใช้สำหรับปัญหาการทำให้กำไรอยู่ในระดับสูงสุดทุกประการ

การคำนวณสำหรับตารางเริ่มแรก ตาราง 9–13 ปรากฏดังนี้ :

แถวนอน Z_j :

$$\begin{aligned} Z \text{ ทั้งสิ้น} &= (M \text{ บาท})(200) + (0 \text{ บาท})(80) + (M \text{ บาท})(60) = 260M \text{ บาท} \\ Z_{X_1} &= (M \text{ บาท})(1) + (0 \text{ บาท})(1) + (M \text{ บาท})(0) = M \text{ บาท} \\ Z_{X_2} &= (M \text{ บาท})(1) + (0 \text{ บาท})(0) + (M \text{ บาท})(1) = 2M \text{ บาท} \\ Z_{X_3} &= (M \text{ บาท})(1) + (0 \text{ บาท})(0) + (M \text{ บาท})(0) = M \text{ บาท} \\ Z_{X_4} &= (M \text{ บาท})(0) + (0 \text{ บาท})(1) + (M \text{ บาท})(0) = 0 \text{ บาท} \\ Z_{X_5} &= (M \text{ บาท})(0) + (0 \text{ บาท})(0) + (M \text{ บาท})(-1) = -M \text{ บาท} \\ Z_{X_6} &= (M \text{ บาท})(0) + (0 \text{ บาท})(0) + (M \text{ บาท})(1) = M \text{ บาท} \end{aligned}$$

แถวนอน $C_j - Z_j$:

$$\begin{aligned} C_{X_1} - Z_{X_1} &= 3 \text{ บาท} - M \text{ บาท} = 3 - M \text{ บาท} \\ C_{X_2} - Z_{X_2} &= 8 \text{ บาท} - 2M \text{ บาท} = 8 - 2M \text{ บาท} \\ C_{X_3} - Z_{X_3} &= M \text{ บาท} - M \text{ บาท} = 0 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ตาราง 9—14

ตารางซิมเพล็กซ์ที่สอง: ปัญหาการทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุด

C_j	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	3 บาท X_1	8 บาท X_2	M บาท X_3	0 บาท X_4	0 บาท X_5	M บาท X_6	
M บาท	X_3	140	1	0	1	0	1	—1	
0 บาท	X_4	80	1	0	0	1	0	0	← แถวนอนที่ถูกแทนที่
8 บาท	X_2	60	0	1	0	0	—1	1	
	Z_j	140 M + 480 บาท	M บาท	8 บาท	M บาท	0 บาท	M—8 บาท	8— M บาท	
	$C_j - Z_j$		3—M บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท	8—M บาท	2M—8 บาท	

↑ แถวตั้งที่ดีที่สุด (คอลัมน์ X_1)

$C_{X_4} - Z_{X_4} = 0$ บาท $- 0$ บาท $= 0$ บาท

$C_{X_5} - Z_{X_5} = 0$ บาท $- (-M)$ บาท $= M$ บาท

$C_{X_6} - Z_{X_6} = M$ บาท $- M$ บาท $= 0$ บาท

แถวนอนที่ถูกแทนที่ :

แถวนอน $X_3 = 200/1 = 200$

แถวนอน $X_4 = 80/0$ (เนื่องจาก 80/0 ไม่ใช่แนวความคิดทางคณิตศาสตร์เราจึงไม่พิจารณาแถวนอนแถวนี้)

แถวนอน $X_6 = 60/1 = 60$ แถวนอนที่ถูกแทนที่ (ผลหารที่น้อยกว่า)

ตาราง 9–14 แสดงคำเฉลยอันที่สอง การคำนวณสำหรับตารางซิมเพล็กซ์ที่สองปรากฏดังนี้ :

แถวนอนที่เข้ามาแทนที่ (X_2) :

$60/1 = 60$

$0/1 = 0$

$1/1 = 1$

$0/1 = 0$

$0/1 = 0$

$-1/1 = -1$

$1/1 = 1$

แถวนอน X_3:

$200 - 1(60) = 140$

$1 - 1(0) = 1$

$1 - 1(1) = 0$

$1 - 1(0) = 1$

$0 - 1(0) = 0$

$0 - 1(-1) = 1$

$0 - 1(1) = -1$

แถวนอน X_4 ;

$80 - 0(60) = 80$

$1 - 0(0) = 1$

$0 - 0(1) = 0$

$0 - 0(0) = 0$

$1 - 0(0) = 1$

$0 - 0(-1) = 0$

$0 - 0(1) = 0$

แถวนอน Z_j :

Z ทั้งสิ้น $= (M$ บาท$)(140) + (0$ บาท$)(80) + (8$ บาท$)(60) = 140M + 480$ บาท

$Z_{X_1} = (M$ บาท$)(1) + (0$ บาท$)(1) + (8$ บาท$)(0) = M$ บาท

$Z_{X_2} = (M$ บาท$)(0) + (0$ บาท$)(0) + (8$ บาท$)(1) = 8$ บาท

Z_{x_3} = (M บาท) (1) + (0 บาท) (0) + (8 บาท) (0) = M บาท
Z_{x_4} = (M บาท) (0) + (0 บาท) (1) + (8 บาท) (0) = 0 บาท
Z_{x_5} = (M บาท) (1) + (0 บาท) (0) + (0 บาท) (−1) = M − 8 บาท
Z_{x_6} = (M บาท) (−1) + (0 บาท) (0) + (8 บาท) (1) = 8 − M บาท

แถวนอน $C_j - Z_j$:

$C_{x_1} - Z_{x_1}$ = 3 บาท − M บาท = 3 − M บาท
$C_{x_2} - Z_{x_2}$ = 8 บาท − 8 บาท = 0 บาท
$C_{x_3} - Z_{x_3}$ = M บาท − M บาท = 0 บาท
$C_{x_4} - Z_{x_4}$ = 0 บาท − 0 บาท = 0 บาท
$C_{x_5} - Z_{x_5}$ = 0 บาท − (M−8) บาท = 8 − M บาท
$C_{x_6} - Z_{x_6}$ = M บาท − (8−M) บาท = 2M − 8 บาท

แถวนอนที่ถูกแทนที่ :
แถวนอน X_3 140/1 = 140
แถวนอน X_4 80/1 = 80 (แถวนอนที่ถูกแทนที่)
แถวนอน X_2 60/0 (นิยามไม่ได้)

ตาราง 9–15 แสดงตารางซิมเพล็กซ์ที่สาม การคำนวณสำหรับตารางซิมเพล็กซ์ที่สามปรากฏดังนี้ :

แถวนอนที่เข้ามาแทนที่ (X_1) :

80/1 = 80
1/1 = 1
0/1 = 0
0/1 = 0
1/1 = 1
0/1 = 0
0/1 = 0

แถวนอน X_3:

140 − 1(80) = 60
1 − 1 (1) = 0
0 − 1 (0) = 0

แถวนอน X_2:

60 − 0(80) = 60
0 − 0 (1) = 0
1 − 0 (0) = 1

ตาราง 9—15

ตารางซิมเพล็กซ์ที่สาม : ปัญหาการทำให้ต้นทุนในระดับต่ำสุด

C_j	ส่วนผสม ผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	3 บาท	8 บาท	M บาท	0 บาท	0 บาท	M บาท
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
M บาท	X_3	60	0	0	1	—1	1	—1
3 บาท	X_1	80	1	0	0	1	0	0
8 บาท	X_2	60	0	1	0	0	—1	1
	Z_j	60 M + 720 บาท	3 บาท	8 บาท	M บาท	3— M บาท	M—8 บาท	8—M บาท
	$C_j - Z_j$		0 บาท	0 บาท	0 บาท	M—3 บาท	8—M บาท	2M—8 บาท

แถวนอนที่ถูกแทนที่

แถวนอนที่ดีที่สุด

$1 - 1\ (0) = 1$ $\quad$ $0 - 0\ (0) = 0$

$0 - 1\ (1) = -1$ $\quad$ $0 - 0\ (1) = 0$

$1 - 1\ (0) = 1$ $\quad$ $-1 - 0\ (0) = -1$

$-1 - 1\ (0) = -1$ $\quad$ $1 - 0\ (0) = 1$

แถวนอน Z_j :

Z ทั้งสิ้น = (M บาท) (60) + (3 บาท) (80) + (8 บาท) (60) = 720 + 60M บาท

Z_{X_1} = (M บาท) (0) + (3 บาท) (1) + (8 บาท) (0) = 3 บาท

Z_{X_2} = (M บาท) (0) + (3 บาท) (0) + (8 บาท) (1) = 8 บาท

Z_{X_3} = (M บาท) (1) + (3 บาท) (0) + (8 บาท) (0) = M บาท

Z_{X_4} = (M บาท) (−1) + (3 บาท) (1) + (8 บาท) (0) = 3−M บาท

Z_{X_5} = (M บาท) (1) + (3 บาท) (0) + (8 บาท) (−1) = M−8 บาท

Z_{X_6} = (M บาท) (−1) + (3 บาท) (0) + (8 บาท) (1) = 8−M บาท

แถวนอน $C_j - Z_j$:

$C_{X_1} - Z_{X_1}$ = 3 บาท − 3 บาท = 0 บาท

$C_{X_2} - Z_{X_2}$ = 8 บาท − 8 บาท = 0 บาท

$C_{X_3} - Z_{X_3}$ = M บาท − M บาท = 0 บาท

$C_{X_4} - Z_{X_4}$ = 0 บาท − (3 − M) บาท = M − 3 บาท

$C_{X_5} - Z_{X_5}$ = 0 บาท − (M − 8) บาท = 8 − M บาท

$C_{X_6} - Z_{X_6}$ = M บาท − (8 − M) บาท = 2M − 8 บาท

แถวนอนที่ถูกแทนที่ :

แถวนอน X_3 61/1 = 60 (แถวนอนที่ถูกแทนที่)

แถวนอน X_1 80/0 (นิยามไม่ได้ทางคณิตศาสตร์)

แถวนอน X_2 60/(−1) = −60

ตาราง 9–16 แสดงตารางซิมเพล็กซ์ที่สี่ การคำนวณสำหรับตารางที่สี่ ปรากฏดังนี้ :
แถวนอนที่เข้ามาแทนที่ (X_5) :

$60/1 = 60$

$0/1 = 0$

$0/1 = 0$

$1/1 = 1$

$-1/1 = -1$

ตาราง 9—16

ตารางซิมเพล็กซ์ที่สี่ (คำเฉลยที่ดีที่สุด) : ปัญหาการทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุด								
C_j			3 บาท	8 บาท	M บาท	0 บาท	0 บาท	M บาท
	ส่วนผสมผลิตภัณฑ์	ปริมาณ	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0 บาท	X_5	60	0	0	1	—1	1	—1
3 บาท	X_1	80	1	0	0	1	0	0
8 บาท	X_2	120	0	1	1	—1	0	0
	Z_j	1,200 บาท	3 บาท	8 บาท	8 บาท	—5 บาท	0 บาท	0 บาท
	$C_j—Z_j$		0 บาท	0 บาท	M—8 บาท	5 บาท	0 บาท	M บาท

$1/1 = 1$

$-1/1 = -1$

แถวนอน X_1 :

$80 - 0\ (60) = 80$

$1 - 0\ (0) = 1$

$0 - 0\ (0) = 0$

$0 - 0\ (1) = 0$

$1 - 0\ (-1) = 1$

$0 - 0\ (1) = 0$

$0 - 0\ (-1) = 0$

แถวนอน X_2 :

$60 - (-1)\ (60) = 120$

$0 - (-1)\ (0) = 0$

$1 - (-1)\ (0) = 1$

$0 - (-1)\ (1) = 1$

$0 - (-1)\ (-1) = -1$

$-1 - (-1)\ (1) = 0$

$1 - (-1)\ (-1) = 0$

แถวนอน Z_j :

Z ทั้งสิ้น = (0 บาท) (60) + (3 บาท) (80) + (8 บาท) (120) = 1,200 บาท

Z_{X_1} = (0 บาท) (0) + (3 บาท) (1) + (8 บาท) (0) = 3 บาท

Z_{X_2} = (0 บาท) (0) + (3 บาท) (0) + (8 บาท) (1) = 8 บาท

Z_{X_3} = (0 บาท) (1) + (3 บาท) (0) + (8 บาท) (1) = 8 บาท

Z_{X_4} = (0 บาท) (−1) + (3 บาท) (1) + (8 บาท) (−1) = −5 บาท

Z_{X_5} = (0 บาท) (1) + (3 บาท) (0) + (8 บาท) (0) = 0 บาท

Z_{X_6} = (0 บาท) (−1) + (3 บาท) (0) + (8 บาท) (0) = 0 บาท

แถวนอน $C_j - Z_j$:

$C_{X_1} - Z_{X_1}$ = 3 บาท − 3 บาท = 0 บาท

$C_{X_2} - Z_{X_2}$ = 8 บาท − 8 บาท = 0 บาท

$C_{X_3} - Z_{X_3}$ = M บาท − 8 บาท = M − 8 บาท

$C_{X_4} - Z_{X_4}$ = 0 บาท − (−5 บาท) = 5 บาท

$C_{X_5} - Z_{X_5}$ = 0 บาท − 0 บาท = 0 บาท

$C_{X_6} - Z_{X_6}$ = M บาท − 0 บาท = M บาท

เนื่องจากตารางที่สี่ (ตาราง 9–16) ไม่มีค่าลบเหลืออยู่ในแถวนอน $C_j - Z_j$ คำเฉลยนี้จึงเป็นคำเฉลยที่ดีที่สุด คือใช้ X_1 80 ปอนด์ และ X_2 120 ปอนด์ ต้นทุนของคำเฉลยอันนี้เท่ากับ 1,200 บาท เป็นการผสม X_1 และ X_2 เข้าด้วยกันโดยจ่ายต้นทุนน้อยที่สุดและเป็นไป

ตามข้อกำกัดต่าง ๆ ที่มีอยู่ในปัญหานี้ เราได้ของผสม 200 ปอนด์ (120+80) ตามที่เราต้องการ จะสังเกตได้ว่าตัวแปรผันส่วนขาด X_5 ก็อยู่ในคำเฉลยนี้ด้วย X_5 แทนจำนวน X_2 ที่ใช้มากกว่าปริมาณต่ำสุดตามที่เราต้องการ (60 ปอนด์) เมื่อแทนค่า X_2 และ X_5 ในสมการข้อยับยั้ง (9–5) $X_2 - X_5 + X_6 = 60$ เราจะได้

$$120 - 60 + 0 = 60$$
$$60 = 60$$

เนื่องจากตัวแปรผันเทียม X_6 ไม่อยู่ในคำเฉลย ตัวแปรผันนี้จึงมีค่าเท่ากับศูนย์

การแก้ปัญหาการขนส่งโดยการโปรแกรมแบบเส้นตรง
(Linear Programming Solution to the Transportation Problem)

ในบทที่ 1 เราได้กล่าวถึงปัญหาของฝ่ายจัดการประเภทหนึ่ง ซึ่งสามารถที่จะหาคำเฉลยทางเชิงปริมาณได้โดยตรง โดยทั่วไปเราเรียกปัญหาชนิดนี้ว่าเป็นปัญหาการขนส่ง ซึ่งพอจะแสดงให้เห็นได้โดยอาศัยตัวอย่างต่อไปนี้ :

บริษัท อะแจกซ์ จำกัด มีโรงงาน 2 แห่งซึ่งตั้งอยู่ห่างจากกันคือ A และ B และส่งสินค้าไปยังคลังสินค้าที่ตั้งอยู่ตามท้องถิ่นต่าง ๆ 3 แห่งคือ R, S และ T ผู้จัดการการขนส่งจะต้องวางแผนการส่งสินค้าสำหรับสัปดาห์ถัดไปตามตารางข้างล่างนี้ :

โรงงาน A มีสินค้าอยู่ 100 ตัน
โรงงาน B มีสินค้าอยู่ 200 ตัน
คลังสินค้า R ต้องการสินค้า 70 ตัน
คลังสินค้า S ต้องการสินค้า 60 ตัน
คลังสินค้า T ต้องการสินค้า 50 ตัน

ต้นทุนในการส่งสินค้า ปรากฏดังนี้ :

A ถึง R	3 บาทต่อตัน	B ถึง R	2 บาทต่อตัน
A ถึง S	1 บาทต่อตัน	B ถึง S	4 บาทต่อตัน
A ถึง T	5 บาทต่อตัน	B ถึง T	6 บาทต่อตัน

เราอาจจะส่งสินค้าจากโรงงานแต่ละแห่ง ไปยังคลังสินค้าแต่ละแห่งในลักษณะที่แตกต่างกันได้มากมาย คำเฉลยเหล่านี้ต่างก็จะสนองความต้องการของคลังสินค้าแต่ละแห่ง และในขณะเดียวกัน ก็ไม่เกินสินค้าที่มีอยู่ในโรงงานทั้งสองแห่ง ผู้จัดการไม่แน่ใจว่าคำเฉลยที่มีอยู่ทั้งหมดเหล่านี้ คำเฉลยใดจะทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นในการส่งสินค้าประจำสัปดาห์อยู่ในระดับต่ำสุด ตัวอย่างเช่น ถ้าเขาจะจัดส่งสินค้าดังนี้ :

A ถึง R	70 ตัน	@ 3 บาท	=	210 บาท
A ถึง S	0 ตัน			
A ถึง T	0 ตัน			
B ถึง R	0 ตัน			
B ถึง S	60 ตัน	@4 บาท	=	240 บาท
B ถึง T	50 ตัน	@ 6 บาท	=	300 บาท
	ต้นทุนทั้งสิ้น			750 บาท

ถ้าดัดแปลงแผนการส่งสินค้าดังปรากฏข้างล่างนี้ จะทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นลดลงเป็นจำนวนมาก

A ถึง R	0 ตัน			
A ถึง S	60 ตัน	@ 1 บาท	=	60 บาท
A ถึง T	0 ตัน			
B ถึง R	70 ตัน	@ 2 บาท	=	140 บาท
B ถึง S	0 ตัน			
B ถึง T	50 ตัน	@ 6 บาท	=	300 บาท
	ต้นทุนทั้งสิ้น			500 บาท

ในการหาแผนการขนส่งที่ถูกที่สุด เราอาจจะคำนวณต้นทุนที่เกิดจากการส่งสินค้าจากโรงงานไปยังคลังเก็บในลักษณะและจำนวนที่แตกต่างกันมากมายจนหมดก็ได้

แต่แทนที่จะใช้วิธีการดังกล่าว เราจะใช้การโปรแกรมแบบเส้นตรงในการหาคำเฉลยที่จะต้องจ่ายต้นทุนน้อยที่สุด เราอาจเริ่มด้วยการมองปัญหานี้ในลักษณะดังต่อไปนี้ :

คลังสินค้า R	S	T		
			A 100 ตัน	โรงงาน
			B 200 ตัน	
70 ตัน	60 ตัน	50 ตัน		

เรากำลังหาปริมาณผลิตภัณฑ์สำเร็จรูปที่ดีที่สุด ที่จะจัดส่งจากโรงงานแต่ละแห่งไปยังคลังสินค้าแต่ละแห่ง เพราะฉะนั้นให้ค่า X ต่าง ๆ ต่อไปนี้แทนปริมาณเหล่านี้ :

ให้ X_1 แทนปริมาณที่ส่งจาก A ไปยัง R

X_2 แทนปริมาณที่ส่งจาก A ไปยัง S

X_3 แทนปริมาณที่ส่งจาก A ไปยัง T

X_4 แทนปริมาณที่ส่งจาก B ไปยัง R

X_5 แทนปริมาณที่ส่งจาก B ไปยัง S

X_6 แทนปริมาณที่ส่งจาก B ไปยัง T

ต่อไป ปัญหานี้จะปรากฏดังข้างล่างนี้ :

คลังสินค้า R	คลังสินค้า S	คลังสินค้า T		
X_1	X_2	X_3	A 100 ตัน	โรงงาน
X_4	X_5	X_6	B 200 ตัน	
70 ตัน	60 ตัน	50 ตัน		

เราจะพัฒนาข้อกำกัดต่าง ๆ ที่จะใช้ในการคำนวณหาคำเฉลยตามวิธีซิมเพล็กซ์ในการโปรแกรมแบบเส้นตรง ดังนี้ :

ในเมื่อคลังสินค้า R ต้องการ 70 ตัน $X_1 + X_4$ จะต้อง $= 70$

ในเมื่อคลังสินค้า S ต้องการ 60 ตัน $X_2 + X_5$ จะต้อง $= 60$

ในเมื่อคลังสินค้า T ต้องการ 50 ตัน $X_3 + X_6$ จะต้อง $= 50$

และ

เนื่องจากโรงงาน A มีอยู่เพียง 100 ตัน $X_1 + X_2 + X_3$ จะต้อง ≤ 100

เนื่องจากโรงงาน B มีอยู่เพียง 200 ตัน $X_4 + X_5 + X_6$ จะต้อง ≤ 200

ดังนั้น คำเฉลยที่ดีที่สุดของเราจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขทั้งห้าประการดังกล่าวข้างต้น

ในขั้นแรกนี้ เราจะเขียนปัญหาดังกล่าวในรูปของภาษาการโปรแกรมแบบเส้นตรง โดยเขียนสัมประสิทธิ์ต้นทุนต่อตันควบเข้ากับตัวแปรผันที่ไม่ทราบค่าแต่ละตัวดังนี้ :

ทำให้ $3X_1$ บาท + $1X_2$ บาท + $5X_3$ บาท + $2X_4$ บาท + $4X_5$ บาท + $6X_6$ บาท อยู่ในระดับต่ำสุด

โดยขึ้นอยู่กับ :

$$\begin{aligned} X_1 + X_4 &= 70 \\ X_2 + X_5 &= 60 \\ X_3 + X_6 &= 50 \\ X_1 + X_2 + X_3 &\leqq 100 \\ X_4 + X_5 + X_6 &\leqq 200 \end{aligned} \qquad (9\text{–}7)$$

เราสามารถเปลี่ยนอสมการทั้งสอง ให้เป็นสมการโดยบวกด้วยตัวแปรผันส่วนขาด X_7 และ X_8 ดังนี้ :

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_4 &= 70 \\
X_2 + X_5 &= 60 \\
X_3 + X_6 &= 50 \\
X_1 + X_2 + X_3 + X_7 &= 100 \\
X_4 + X_5 + X_6 + X_8 &= 200
\end{aligned}
$$

ต่อไปเราจะต้องเพิ่มตัวแปรผันเทียม (X_9, X_{10} และ X_{11}) เข้าไปยังสมการ 3 สมการแรกเพื่อสร้างเป็นคำเฉลยเริ่มแรก

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_4 + X_9 &= 70 \\
X_2 + X_5 + X_{10} &= 60 \\
X_3 + X_6 + X_{11} &= 50 \\
X_1 + X_2 + X_3 + X_7 &= 100 \\
X_4 + X_5 + X_6 + X_8 &= 200
\end{aligned}
\qquad (9\text{–}8)
$$

คำเฉลยเริ่มแรก คือ :

$$
\begin{aligned}
X_9 &= 70 \\
X_{10} &= 60 \\
X_{11} &= 50 \\
X_7 &= 100 \\
X_8 &= 200
\end{aligned}
$$

ข้อกำกัดต่าง ๆ สำหรับตารางซิมเพล็กซ์ตารางแรก ปรากฏดังต่อไปนี้ :

$$
\begin{aligned}
X_1 + 0X_2 + 0X_3 + X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + X_9 + 0X_{10} + 0X_{11} &= 70 \\
0X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 + X_5 + 0X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 + X_{10} + 0X_{11} &= 60 \\
0X_1 + 0X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + X_6 + 0X_7 + 0X_8 + 0X_9 + 0X_{10} + X_{11} &= 50 \\
X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + X_7 + 0X_8 + 0X_9 + 0X_{10} + 0X_{11} &= 100 \\
0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + 0X_7 + X_8 + 0X_9 + 0X_{10} + 0X_{11} &= 200
\end{aligned}
$$

ตาราง 9–17 แสดงตารางซิมเพล็กซ์ตารางแรก ตารางซิมเพล็กซ์ที่มีขนาดเช่นนี้ดูคล้ายกับว่าจะต้องมีการคำนวณมากมาย จากปัญหาการทำให้ต้นทุนอยู่ในระดับต่ำสุดตามที่เราได้กล่าวไปแล้วในตอนก่อนท่านคงจำได้ว่าการคำนวณเป็นเรื่องไม่ยุ่งยากเลย เพราะตัวตารางประกอบขึ้นด้วยตัวเลขศูนย์และหนึ่ง ความจริง ถ้าเราดำเนินการคำนวณเพียง 4 ชั้นเราก็จะได้

คำเฉลยของปัญหานี้ ตารางการส่งสินค้าที่ดีที่สุดตามที่คำนวณได้ ปรากฏดังนี้ :

A	ส่งไปให้	R	0	ตัน
	ส่งไปให้	S	60	ตัน
	ส่งไปให้	T	40	ตัน

และ

B	ส่งไปให้	R	70	ตัน
	ส่งไปให้	S	0	ตัน
	ส่งไปให้	T	10	ตัน

ต้นทุนในการขนส่งทั้งสิ้นเท่ากับ 460 บาท

การคำนวณตามวิธีซิมเพล็กซ์มีประโยชน์มากในการแก้ปัญหาชนิดต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการเลือกทางใดทางหนึ่งจากทางเลือกที่มีอยู่เป็นจำนวนมากจนไม่อาจที่จะดำเนินการได้ตามวิธีเลขคณิตธรรมดา เราได้แสดงการนำวิธีการนี้ไปใช้ประโยชน์ทางด้านปัญหาการขนส่ง เพราะในปัจจุบันนี้ในวงงานอุตสาหกรรมได้มีผู้นำวิธีนี้ไปใช้กันอย่างกว้างขวาง

วิธีดำเนินการเป็นขั้น ๆ (Stepping-stone method)

เราอาจจะหาคำเฉลยให้กับปัญหาการขนส่งประเภทที่เราเพิ่งพิจารณาไปแล้วนี้ได้ โดยวิธีอีกวิธีหนึ่งที่เรียกว่า วิธีดำเนินการเป็นขั้น ๆ (Stepping-stone method) วิธีดำเนินการเป็นขั้น ๆ ไม่ต้องใช้การคำนวณตามวิธีซิมเพล็กซ์ ดังนั้นถ้านำมาใช้กับปัญหาที่มีขนาดเล็ก วิธีนี้จะให้คำตอบได้รวดเร็วกว่า

เดิมทีคำเฉลยเริ่มแรกตามวิธีดำเนินการเป็นขั้น ๆ ได้มาจากการทดลองและแก้ไขข้อผิดพลาดไปเรื่อย ๆ ซึ่งเป็นเรื่องที่ต้องสิ้นเปลืองเวลามาก ดังนั้นในระยะหลังนี้จึงได้มีผู้คิดค้นวิธีการที่จะได้คำเฉลยเริ่มแรกที่สิ้นเปลืองเวลาน้อยลง

เนื่องจากท่านได้เรียนรู้วิธีซิมเพล็กซ์ไปแล้ว (ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้ได้ทั่วไปโดยไม่ต้องคำนึงถึงขนาดของปัญหา) ผู้เขียนจึงมีความเห็นว่าไม่มีความจำเป็นที่จะต้องเสนอวิธีอีกวิธีหนึ่งโดยละเอียด

ตาราง 9—17

ตารางซิมแพล็กซ์เริ่มแรก : ปัญหาการขนส่ง													
C_j			3 บาท	1 บาท	5 บาท	2 บาท	4 บาท	6 บาท	0 บาท	0 บาท	Mบาท	Mบาท	Mบาท
	ส่วนผสม การส่งสินค้า	ปริมาณ	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
Mบาท	X_9	70	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
Mบาท	X_{10}	60	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
Mบาท	X_{11}	50	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0 บาท	X_7	100	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0 บาท	X_8	200	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
	Z_j	180Mบาท	M บาท	M บาท	M บาท	M บาท	M บาท	M บาท	0 บาท	0 บาท	Mบาท	Mบาท	Mบาท
	$C_j—Z_j$		3—M บาท	1—M บาท	5—M บาท	2—M บาท	4—M บาท	6—M บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท	0 บาท

← แถวนอนที่ดีที่สุด

↑ แถวตั้งที่ดีที่สุด

($C_j—Z_j$ ที่มีค่าลบสูงสุด)

แบบฝึกหัด

9–1 บริษัท อะแจกซ์การผลิต จำกัด ผลิตภัณฑ์ 3 ชนิด ผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดให้ส่วนช่วยเหลือต่อหน่วยดังนี้

X_1	2 บาท
X_2	4 บาท
X_3	3 บาท

ผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดผ่านศูนย์การผลิต 3 ศูนย์ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของขบวนการผลิต เวลาที่ต้องใช้ในศูนย์แต่ละศูนย์ในการผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละชนิด 1 หน่วยปรากฏดังนี้ :

ผลิตภัณฑ์	ศูนย์ที่ 1	ศูนย์ที่ 2	ศูนย์ที่ 3
X_1	3 ชั่วโมงต่อหน่วย	2 ชั่วโมงต่อหน่วย	1 ชั่วโมงต่อหน่วย
X_2	4 ชั่วโมงต่อหน่วย	1 ชั่วโมงต่อหน่วย	3 ชั่วโมงต่อหน่วย
X_3	2 ชั่วโมงต่อหน่วย	2 ชั่วโมงต่อหน่วย	2 ชั่วโมงต่อหน่วย

สำหรับสัปดาห์ถัดไป เวลาที่ศูนย์แต่ละศูนย์มีอยู่ ปรากฏดังนี้ :

ศูนย์ที่ 1	60 ชั่วโมง
ศูนย์ที่ 2	40 ชั่วโมง
ศูนย์ที่ 3	80 ชั่วโมง

ให้กำหนดส่วนผสมผลิตภัณฑ์ที่ดีที่สุดสำหรับตารางการผลิตในสัปดาห์ถัดไป

9–2 จงทำให้ $2X_1 + 4X_2 + X_3 + X_4$ อยู่ในระดับสูงสุด โดยขึ้นอยู่กับข้อกำกัดเหล่านี้:

$$X_1 + 3X_2 + X_4 \leq 4$$
$$2X_1 + X_2 \leq 3$$
$$X_2 + 4X_3 + X_4 \leq 3$$

9–3 ลูกค้าคนหนึ่งของบริษัท รีกัล ต้องการของผสมทางเคมีชนิดหนึ่ง 1,000 ปอนด์ ของผสมทางเคมีชนิดนี้ประกอบด้วยวัตถุดิบ 3 ชนิด ต้นทุนต่อปอนด์ของวัตถุดิบแต่ละชนิดปรากฏดังนี้ :

X_1	2 บาทต่อปอนด์
X_2	3 บาทต่อปอนด์
X_3	4 บาทต่อปอนด์

ลูกค้าต้องการให้ของผสมนี้เป็นไปตามเงื่อนไขต่าง ๆ ข้างล่างนี้ :

ก. ของผสมนี้จะต้องมี X_2 อย่างน้อยที่สุด 200 ปอนด์

ข. ของผสมนี้จะมี X_1 เกินกว่า 400 ปอนด์ไม่ได้

ค. ของผสมนี้จะต้องมี X_3 อย่างน้อยที่สุด 100 ปอนด์

ให้กำหนดของผสมที่มีต้นทุนน้อยที่สุดสำหรับของผสม 1,000 ปอนด์ ตามความต้องการของลูกค้า

9–4 ผู้ผลิตหินปูนโดโลไมต์สำหรับใช้ทางการเกษตรคนหนึ่งมีแหล่งระเบิดปูนขาวอยู่ 3 แห่ง แหล่งระเบิดเหล่านี้ ส่งปูนขาวไปให้แก่คลังสินค้าที่อยู่ในท้องถิ่นต่าง ๆ 5 แห่ง ฐานะของคงคลังของแหล่งระเบิดแต่ละแห่งสำหรับสัปดาห์นี้ มีดังต่อไปนี้ :

แหล่งระเบิด	**ปูนขาวที่มีอยู่ (ตัน)**
ที่ 1	200
ที่ 2	100
ที่ 3	150

ต้นทุนในการขนส่งต่อตัน จากแหล่งระเบิดแต่ละแหล่ง ถึงคลังสินค้าท้องถิ่นแต่ละแห่ง ปรากฏในตารางต่อไปนี้ :

	คลังสินค้า				
แหล่งระเบิด	**ที่ 1**	**ที่ 2**	**ที่ 3**	**ที่ 4**	**ที่ 5**
ที่ 1	5 บาท/ตัน	1 บาท/ตัน	6 บาท/ตัน	3 บาท/ตัน	1 บาท/ตัน
ที่ 2	2 บาท/ตัน	3 บาท/ตัน	4 บาท/ตัน	5 บาท/ตัน	4 บาท/ตัน
ที่ 3	4 บาท/ตัน	2 บาท/ตัน	3 บาท/ตัน	2 บาท/ตัน	3 บาท/ตัน

ในสัปดาห์ถัดไปคลังสินค้าแต่ละแห่งต้องการปูนขาวในปริมาณต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ :

คลังสินค้าที่ 1	80 ตัน
คลังสินค้าที่ 2	90 ตัน
คลังสินค้าที่ 3	100 ตัน
คลังสินค้าที่ 4	70 ตัน
คลังสินค้าที่ 5	60 ตัน

ให้กำหนดตารางการส่งหินปูนสำหรับสัปดาห์ถัดไป ที่จะต้องจ่ายต้นทุนทั้งสิ้นในการขนส่งหินปูนน้อยที่สุดและให้เป็นไปตามความต้องการของคลังสินค้าทั้ง 5 แห่ง

9–5 ในระหว่างสัปดาห์ถัดไป โรงงานแห่งหนึ่งสามารถผลิตผลิตภัณฑ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ :

ผลิตภัณฑ์	**ส่วนช่วยเหลือต่อหน่วย**
X_1	3 บาท
X_2	4 บาท
X_3	5 บาท
X_4	2 บาท
X_5	6 บาท

บริษัทแบ่งอุปกรณ์การผลิตออกเป็นศูนย์ 4 ศูนย์ ผลิตภัณฑ์ทั้ง 5 ชนิดอาจผ่านหรือไม่ต้องผ่านศูนย์ทั้งสี่ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความต้องการทางด้านการผลิตของผลิตภัณฑ์แต่ละอย่าง จำนวนชั่วโมงที่ต้องใช้ในการผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดและจำนวนชั่วโมงที่มีอยู่ในศูนย์แต่ละศูนย์ปรากฏดังนี้ :

ผลิตภัณฑ์	ศูนย์ที่ 1	ศูนย์ที่ 2	ศูนย์ที่ 3	ศูนย์ที่ 4
X_1	3 ชม./หน่วย	8 ชม./หน่วย	2 ชม./หน่วย	6 ชม./หน่วย
X_2	4 ชม./หน่วย	3 ชม./หน่วย	1 ชม./หน่วย	0 ชม./หน่วย
X_3	2 ชม./หน่วย	2 ชม./หน่วย	0 ชม./หน่วย	2 ชม./หน่วย
X_4	2 ชม./หน่วย	1 ชม./หน่วย	3 ชม./หน่วย	4 ชม./หน่วย
X_5	5 ชม./หน่วย	4 ชม./หน่วย	4 ชม./หน่วย	3 ชม./หน่วย
ชั่วโมงที่มีอยู่ทั้งสิ้น	700	600	400	900

นอกจากข้อกำกัดทางด้านปริมาณการผลิตดังกล่าวข้างต้นแล้ว การขายที่คาดไว้สูงสุดสำหรับผลิตภัณฑ์ทั้งห้าชนิด ในระหว่างสัปดาห์ถัดไปปรากฏดังตารางข้างล่างนี้บริษัทไม่มีการผลิตเพื่อเก็บไว้เป็นของคงคลัง

X_1	100 ตัน
X_2	50 ตัน
X_3	90 ตัน
X_4	70 ตัน
X_5	30 ตัน

ผลิตภัณฑ์แต่ละชนิดทำจากวัตถุดิบ 5 ชนิดคือ A, B, C, D และ E ตารางข้างล่างนี้แสดงจำนวนปอนด์ที่ต้องใช้ต่อหน่วยในการผลิตผลิตภัณฑ์แต่ละชนิด และจำนวนวัตถุดิบที่มีอยู่ทั้งสิ้นในสัปดาห์ถัดไป

ผลิตภัณฑ์	A	B	C	D	E
X_1	4 ปอนด์/หน่วย	2 ปอนด์/หน่วย	0 ปอนด์/หน่วย	1 ปอนด์/หน่วย	3 ปอนด์/หน่วย
X_2	7 ปอนด์/หน่วย	4 ปอนด์/หน่วย	4 ปอนด์/หน่วย	0 ปอนด์/หน่วย	4 ปอนด์/หน่วย
X_3	6 ปอนด์/หน่วย	2 ปอนด์/หน่วย	5 ปอนด์/หน่วย	7 ปอนด์/หน่วย	0 ปอนด์/หน่วย
X_4	1 ปอนด์/หน่วย	1 ปอนด์/หน่วย	6 ปอนด์/หน่วย	4 ปอนด์/หน่วย	2 ปอนด์/หน่วย
X_5	3 ปอนด์/หน่วย	0 ปอนด์/หน่วย	2 ปอนด์/หน่วย	3 ปอนด์/หน่วย	4 ปอนด์/หน่วย
จำนวนปอนด์ที่มีอยู่ทั้งสิ้น	1,000	900	300	400	1,600

ถ้าบริษัทประสงค์ที่จะทำให้ส่วนช่วยเหลือที่จะไปชดเชยต้นทุนคงที่ และเหลือเป็นกำไรอยู่ในระดับสูงสุด ตารางการผลิตสำหรับสัปดาห์ถัดไปควรจะเป็นอย่างไร ?

บทที่ 10

เกมและกลยุทธ์
(GAMES AND STRATEGIES)

คำว่า "เกม" ที่ใช้ในบทนี้ หมายถึงสถานการณ์แห่งการขัดแย้งโดยทั่วไป ณ ขณะใดขณะหนึ่ง พวกเราส่วนมากคงจะคุ้นเคยกับกีฬาในร่มบางอย่าง (บริดจ์ โปกเกอร์ หมากรุก) ซึ่งผู้ที่เข้าร่วมต่างก็ทราบจุดมุ่งหมายและกฎเกณฑ์ของกีฬานั้น ๆ เป็นอย่างดี นอกจากนี้เรายังทราบว่า โดยอาศัยประสบการณ์ผู้เล่นสามารถคาดคะเนล่วงหน้าถึงปฏิกิริยาของอีกฝ่ายหนึ่งที่มีต่อกลยุทธ์บางอย่างที่ตนนำมาใช้ได้อย่างถูกต้องพอสมควร ในการเล่นเกม ผู้ที่เข้าร่วมคือคู่แข่งขัน และโดยปกติความสำเร็จของผู้ที่เข้าร่วมคนหนึ่งคนใด ย่อมหมายถึงความเสียหายของผู้ที่เข้าร่วมคนอื่น ๆ ผู้เล่นแต่ละคนต่างเลือกและใช้กลยุทธ์และยุทธวิธีต่าง ๆ ที่เชื่อว่าจะนำมาซึ่งชัยชนะในการเล่นเกมนั้น ๆ

สถานการณ์แห่งการขัดแย้งทางธุรกิจหลายต่อหลายอย่าง มีลักษณะที่คล้ายคลึงกับลักษณะบางอย่างของเกมง่าย ๆ ในการเล่นเกม ผู้เล่นต่างก็ใช้ประโยชน์จากเทคนิคทางคณิตศาสตร์ทั้งที่เป็นการอุปมานและการอนุมาน โดยพยายามกำหนดกลยุทธ์ที่ดีที่สุดเพื่อที่จะได้มาซึ่งชัยชนะ เราจึงสนใจในคณิตศาสตร์เกี่ยวกับทฤษฎีเกมด้วยเหตุผลดังกล่าว

เกมระหว่างบุคคลสองคนที่มีผลรวมเท่ากับศูนย์
(Two-Person Zero-Sum Games)

ทฤษฎีเกมที่เราจะกล่าวต่อไปนี้จำกัดเฉพาะเกมระหว่างบุคคลสองคน กล่าวคือเป็นสถานการณ์แห่งการขัดแย้งของผู้ที่เข้าร่วมเพียงสองคนเท่านั้น แน่ละ สถานการณ์ทางด้านการจัดการหลายอย่าง เป็นเรื่องที่เกี่ยวพันไปถึงการมีส่วนเข้าร่วมของบุคคลหลายคนด้วยกัน เพราะฉะนั้นจึงไม่ใช่ตัวอย่างของเกมระหว่างบุคคลสองคน อย่างไรก็ดี คณิตศาสตร์สำหรับเกมระหว่างบุคคลสามคนหรือมากกว่านี้ มีความสลับซับซ้อนเกินกว่าที่จะนำมารวมไว้ในตำราเรียนชนิดนี้ แต่ข้อเท็จจริงมีอยู่ว่าหลักมูลฐานที่แฝงอยู่เบื้องหลังการกำหนดกลยุทธ์ที่ดีที่สุดหรือกลยุทธ์ที่จะให้ได้มาซึ่งชัยชนะภายใต้สถานการณ์แห่งการขัดแย้ง จะต้องเป็นไปตามหลักตรรกวิทยาการอนุมาน และการอุปมานไม่ว่าจำนวนของผู้ที่เข้าร่วมจะมีมากน้อยเพียงใดก็ตาม

ตาราง 10—1

เกมระหว่างบุคคลสองคน		
	ผู้เล่น Y	
ผู้เล่น X	กลยุทธ์ Q	กลยุทธ์ R
กลยุทธ์ M	X ได้ 2 คะแนน	X ได้ 3 คะแนน
กลยุทธ์ N	Y ได้ 1 คะแนน	Y ได้ 2 คะแนน

ตาราง 10—1 แสดงเกมระหว่างบุคคลสองคน ผู้เล่น X และ Y ต่างก็มีความเฉลียวฉลาดและความสามารถเท่าเทียมกัน ทั้งสองคนต่างมีกลยุทธ์ให้เลือก 2 อย่าง แต่ละคนต่างก็ทราบผลลัพธ์ (ที่เรียกว่า ผลตอบแทน) จากส่วนผสมของกลยุทธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดตามที่ปรากฏอยู่ในตัวตาราง จะสังเกตได้ว่าเกมนี้มีอคติต่อผู้เล่น Y แต่ในเมื่อเขาจำเป็นต้องเล่นเกมนี้เขาก็ต้องเล่นให้ดีที่สุดเท่าที่เขาจะทำได้ สภาพการณ์เช่นนี้เทียบเคียงได้โดยคร่าว ๆ กับสถานการณ์ทางธุรกิจที่จำเป็นต้องยอมรับผลขาดทุนระยะสั้น เมื่อเป็นเช่นนี้ จึงต้องทำให้ผลขาดทุนอยู่ในระดับต่ำที่สุดโดยอาศัยกลยุทธ์ที่ดี เราอาจจะหาคำตอบสำหรับเกมง่าย ๆ นี้ได้ไม่ยากนัก โดยการวิเคราะห์กลยุทธ์ที่อาจเป็นไปได้ของผู้เล่นแต่ละคน ดังนี้ :

1. X จะเป็นฝ่ายได้จากเกมนี้ต่อเมื่อเล่นกลยุทธ์ M เท่านั้น ดังนั้น เขาจะเล่นกลยุทธ์ M ตลอดเวลา

2. Y เข้าใจดีว่า X จะเล่นกลยุทธ์ M ตลอดเวลา เพื่อทำให้จำนวนที่ X ได้อยู่ในระดับต่ำสุด เขาจะเล่นกลยุทธ์ Q

3. ดังนั้น คำตอบสำหรับเกมนี้คือ M, Q (กลยุทธ์ M และกลยุทธ์ Q)

4. ทุกครั้งที่มีการเล่นเกมนี้ X จะได้ 2 คะแนน (Y เสีย 2 คะแนน) ดังนั้น ค่าของเกมสำหรับ X คือ 2 ค่าของเกมสำหรับ Y คือ −2

คำว่า "ค่าของเกม" (value of the game) ที่ใช้ในความหมายนี้ คือจำนวนที่ผู้เล่นฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งได้โดยถัวเฉลี่ยต่อการเล่นหนึ่งครั้ง หลังจากที่เล่นเกมนั้น ๆ ต่อเนื่องกันหลาย ๆ ครั้ง แม้ว่าเกมนี้ทำให้ผู้เล่น Y เป็นฝ่ายเสียก็ตาม เขาก็ยังคงเล่นตามกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของเขา กล่าวคือ ทำให้จำนวนที่เสียของเขาอยู่ในระดับต่ำสุด ถ้าเขาใช้กลยุทธ์ R จำนวนที่เขาต้องเสียโดยถัวเฉลี่ยจะเท่ากับ 3 คะแนน

เกมง่าย ๆ ตามที่ปรากฏในตาราง 10—1 เป็นเกมระหว่างบุคคลสองคนที่มีผลรวมเท่ากับศูนย์ เราใช้คำว่า "ผลรวมเท่ากับศูนย์" เพราะผลรวมของจำนวนที่ฝ่ายหนึ่งได้ (X ได้ 2

คะแนนในการเล่นแต่ละครั้ง) เท่ากันพอดีกับผลรวมของจำนวนที่อีกฝ่ายหนึ่งเสีย (Y เสีย 2 คะแนนในการเล่นแต่ละครั้ง) เกมที่เราจะกล่าวต่อไปจึงเป็นเกมชนิดระหว่างบุคคลสองคน ซึ่งมีผลรวมเท่ากับศูนย์ที่สามารถหาคำตอบได้ โดยอาศัยพีชคณิตธรรมดาหรือพีชคณิตเมตริกซ์

ภาษามาตรฐานของเกม

(Standard Language for Games)

ถ้าใช้ภาษาที่เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป เราอาจเขียนเกมในรูปที่กะทัดรัดกว่าที่ปรากฏในรูป 10–1 มาก เกมเดียวกันนี้อาจเขียนในรูปที่ย่นย่อกว่า ดังนี้ :

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10\text{–}1)$$

เราเขียนเกมข้างต้นนี้ในรูปเมตริกซ์ เมตริกซ์นี้เรียกว่า เมตริกซ์ค่าตอบแทน (payoff or payout matrix) โอกาสที่จะเกิดค่าตอบแทนแต่ละอย่างซึ่งมีอยู่สี่ค่า ได้แสดงออกมาในรูปของตัวเลข ตัวเลขที่มีค่าเป็นบวกชี้ให้เห็นค่าตอบแทนที่ตกเป็นของผู้เล่นที่เล่นแถวนอน (X) ตัวเลขที่มีค่าเป็นลบชี้ให้เห็นค่าตอบแทนที่ตกเป็นของผู้เล่นที่เล่นแถวตั้ง (Y) ผู้เล่น X อาจเลือกเล่นกลยุทธ์ตามแถวนอนที่ 1 หรือแถวนอนที่ 2 (อ่านจากบนไปล่างเช่นเดียวกับในรูปเมตริกซ์มาตรฐาน) Y อาจเลือกเล่นกลยุทธ์ตามแถวตั้งที่ 1 หรือแถวตั้งที่ 2 (อ่านจากซ้ายไปขวาเช่นเดียวกับในรูปเมตริกซ์มาตรฐาน)

ต่อไปนี้เป็นเมตริกซ์ค่าตอบแทน โดยมีคำอธิบายละเอียดเกี่ยวกับโอกาสที่จะเกิดค่าตอบแทน ในลักษณะต่าง ๆ เขียนกำกับไว้ทางด้านขวามือของตัวอย่างแต่ละตัวอย่าง

ก. $\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$ X

Y

	R	Q
M	X ได้ 2 คะแนน	X ได้ 4 คะแนน
N	X ได้ 1 คะแนน	X ได้ 3 คะแนน

ข. $\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$ X

Y

	Q	R	S
M	X ได้ 2 คะแนน	ไม่มีใครได้	X ได้ 4 คะแนน
N	X ได้ 1 คะแนน	Y ได้ 3 คะแนน	X ได้ 2 คะแนน

Y

ค. X $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ X

Y

	Q	R
M	X ได้ 1 คะแนน	Y ได้ 3 คะแนน
N	X ได้ 2 คะแนน	X ได้ 4 คะแนน
O	Y ได้ 1 คะแนน	X ได้ 5 คะแนน

Y

ง. X $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ X

Y
R

	Q	R	S
M	X ได้ 3 คะแนน	X ได้ 2 คะแนน	Y ได้ 2 คะแนน
N	X ได้ 1 คะแนน	Y ได้ 3 คะแนน	Y ได้ 4 คะแนน
O	ไม่มีใครได้	X ได้ 1 คะแนน	Y ได้ 3 คะแนน

Y

จ. X $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ X

Y

	Q	R
M	X ได้ 1 คะแนน	Y ได้ 3 คะแนน
N	X ได้ 4 คะแนน	ไม่มีใครได้
O	X ได้ 3 คะแนน	Y ได้ 1 คะแนน

ในกรณี ข, ค, ง และ จ ผู้เล่นคนหนึ่งคนใดหรือทั้งสองคนมีทางเลือกกลยุทธ์มากกว่า 2 อย่าง เกมทั้งหมดเหล่านี้ยังคงเป็นเกมระหว่างบุคคลสองคนโดยไม่ต้องคำนึงถึงจำนวนกลยุทธ์ของผู้เล่นแต่ละคน

เราได้นำเมตริกซ์ตามที่แสดงไว้ข้างต้นมาเขียนซ้ำอีกครั้งหนึ่ง พร้อมด้วยคำอธิบายเกี่ยวกับการกำหนดกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของผู้เล่นแต่ละคนดังปรากฏข้างล่างนี้ ตัวเลขที่มีวงกลมล้อมรอบ คือ ค่าของเกมของแต่ละกรณี

Y

ก. X $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Y สังเกตว่าโอกาสที่เขาจะได้มีอยู่เพียงโอกาสเดียว คือ —3 จะเกิดขึ้นต่อเมื่อ X เล่นแถวนอนที่ 2 ด้วยเหตุผลดังกล่าวเขาเข้าใจดีว่า X จะไม่เล่นแถวนอนที่ 2 แต่จะเล่นแถวนอนที่ 1 ถ้าเช่นนั้น Y ต้องเล่นแถวตั้งที่ 1 เพื่อทำให้จำนวนที่เขาจะต้องเสียโดยถัวเฉลี่ยเท่ากับ 2 คะแนนแทนที่จะเป็น 4 คะแนน กลยุทธ์สุดท้ายคือ X, 1; Y, 1

$$\text{ข. } X \quad \begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

X สังเกตว่าโอกาสที่ Y จะได้มีอยู่เพียงโอกาสเดียว คือ −3 จะเกิดขึ้นต่อเมื่อ X เล่นแถวนอนที่ 2 ดังนั้น X จะเล่นแถวนอนที่ 1 ตลอดไป ถ้าเช่นนั้น Y จะต้องเล่นแถวตั้งที่ 2 เพื่อทำให้จำนวนที่เขาจะต้องเสียอยู่ในระดับต่ำสุด ไม่มีใครได้ใครเสีย กลยุทธ์คือ X, 1; Y, 2

$$\text{ค. } X \quad \begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

X สังเกตว่า Y จะไม่มีทางได้เลยถ้า X เล่นแถวนอนที่ 2 ดังนั้น X จะเล่นแถวนอนที่ 2 ตลอดไป ถ้าเช่นนั้น Y ต้องเล่นแถวตั้งที่ 2 เพื่อทำให้จำนวนที่เขาจะต้องเสียอยู่ในระดับต่ำสุด กลยุทธ์คือ X, 2; Y, 1

$$\text{ง. } X \quad \begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Y สังเกตว่า X จะไม่มีทางได้เลยถ้า Y เล่นแถวตั้งที่ 3 ดังนั้น Y จะเล่นแถวตั้งที่ 3 ตลอดไป ถ้าเช่นนั้น X ต้องเล่นแถวนอนที่ 1 เพื่อทำให้จำนวนที่เขาจะต้องเสียอยู่ในระดับต่ำสุด กลยุทธ์คือ X, 1; Y, 3

$$\text{จ. } X \quad \begin{array}{c} Y \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Y สังเกตว่าเขาสามารถกันมิให้ X ได้ในการเล่นแต่ละครั้งโดยเล่นแถวตั้งที่ 2 เพื่อให้เป็นที่แน่ใจว่าเขาไม่ต้องเสียให้กับ Y X โต้ด้วยการเล่นแถวนอนที่ 2 ตลอดไปไม่มีใครได้ใครเสีย กลยุทธ์คือ X, 2; Y, 2

กลยุทธ์แท้และจุดดุลศูนย์ถ่วง
(Pure Strategies and Saddle Points)

ในแต่ละกรณีดังที่กล่าวไปแล้วข้างต้น X มีกลยุทธ์อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว และ Y ก็มีกลยุทธ์อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว ซึ่งในที่สุดผู้เล่นทั้งสองจะเล่นกลยุทธ์นั้น ๆ ตลอดไป ผู้เล่นทั้งสองอาจทำการทดลองไปชั่วขณะหนึ่ง แต่ในไม่ช้าเขาก็จะใช้กลยุทธ์ตามที่เราได้อธิบายไปแล้ว แต่ทั้งนี้เราได้ตั้งข้อสมมติไว้ว่าผู้เล่นแต่ละคนมีความปรารถนาที่จะได้ (หรือถ้าไม่มีทางได้ก็จะพยายามทำให้จำนวนที่จะต้องเสียอยู่ในระดับต่ำสุด) ในแต่ละเกมดังกล่าวข้างต้น ผู้เล่นแต่ละคนต่างก็มีกลยุทธ์แท้ (Pure Strategy) อย่างหนึ่ง กลยุทธ์แท้คือกลยุทธ์ที่ผู้เล่นคนนั้น ๆ เล่นอยู่ตลอดเวลา ค่าตอบแทนที่ได้มาจากการที่ผู้เล่นแต่ละคนเล่นตามกลยุทธ์แท้ของเขาเรียกว่าจุดดุลศูนย์ถ่วง (Saddle Point) หรือถ้าจะอธิบายให้แตกต่างไปจากนี้เล็กน้อย จุดดุลศูนย์ถ่วงคือค่าของเกมในกรณีที่ผู้เล่นแต่ละคนต่างก็มีกลยุทธ์แท้

เราสามารถหาจุดดุลศูนย์ถ่วงได้ เพราะจุดนี้เป็นทั้งค่าทางตัวเลขที่น้อยที่สุดของแถวนอน และค่าทางตัวเลขที่สูงที่สุดของแถวตั้ง ลองพิจารณาความสำคัญของข้อความนี้สักครู่

ผู้เล่น Y ชอบที่จะให้มีค่าทางตัวเลขที่น้อยที่สุดของแถวนอนใดแถวนอนหนึ่ง เป็นค่าตอบแทน ผู้เล่น X ชอบที่จะให้มีค่าทางตัวเลขที่มากที่สุดของแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่งเป็นค่าตอบแทน ดังนั้น ถ้ามีค่าทางตัวเลขตัวหนึ่งตัวใดที่เป็นไปตามเงื่อนไขทั้งสองดังกล่าว (จุดดุลศูนย์ถ่วง) และถ้าผู้เล่นทั้งสองต่างก็เลือกเอาค่านั้น ก็จะเป็นการเล่นตามกลยุทธ์ที่ดีที่สุด แต่เกมระหว่างบุคคลสองคนไม่ใช่ว่าจะมีจุดดุลศูนย์ถ่วงเสมอไป ถ้าพิจารณาจากเมตริกซ์ของเกมเราอาจทราบได้ทันทีว่ามีจุดดุลศูนย์ถ่วงหรือไม่ ในกรณีที่มีจุดดุลศูนย์ถ่วงก็ไม่จำเป็นจะต้องคำนวณอย่างสลับซับซ้อน เพื่อกำหนดกลยุทธ์ที่ดีที่สุดและค่าของเกม

ต่อไปเราจะลองพิจารณาเกมอื่น ๆ ซึ่งเกมบางเกมก็มีจุดดุลศูนย์ถ่วง ในกรณีที่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง เราได้เขียนวงกลมล้อมรอบจุดดังกล่าวและแสดงกลยุทธ์และค่าของเกม

ก. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ ไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง (ไม่มีค่าตอบแทนใดที่เป็นทั้งค่าที่น้อยที่สุดของแถวนอน และค่าที่สูงที่สุดของแถวตั้ง)

ข. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ กลยุทธ์ : X, 1; Y, 2
ค่าของเกม : +2 (ค่าตอบแทน 2 เป็นค่าที่น้อยที่สุดของแถวนอน และเป็นค่าที่สูงที่สุดของแถวตั้ง)

ค. $\begin{pmatrix} -7 & 7 & 8 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ กลยุทธ์ : X, 2; Y, 1
ค่าของเกม : −4

ง. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง

จ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ ไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง

ฉ. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ กลยุทธ์ : X, 1; Y, 1
ค่าของเกม : 0

ช. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ -4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ กลยุทธ์ : X, 1; Y, 1
ค่าของเกม : +1

ซ. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & -9 \\ -4 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง

กลยุทธ์ผสม

(Mixed Strategies)

ในกรณีที่ไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง ผู้เล่นต้องหันไปใช้กลยุทธ์ผสม ผู้เล่น X จะเล่นแถวนอนแต่ละแถวของตนเป็นสัดส่วนหนึ่งของจำนวนครั้งทั้งหมดเพื่อทำให้จำนวนที่ได้อยู่ในระดับที่ดีที่สุด และผู้เล่น Y จะเล่นแถวตั้งแต่ละแถวของตนเป็นสัดส่วนหนึ่งของจำนวนครั้งทั้งหมดเช่นกัน X จะต้องตัดสินใจว่าควรจะเล่นแถวนอนแต่ละแถวเป็นสัดส่วนเท่าใดของจำนวนครั้งทั้งหมด และ Y ก็จะต้องตัดสินใจว่าควรจะเล่นแถวตั้งแต่ละแถวเป็นสัดส่วนเท่าใดของจำนวนครั้งทั้งหมด

ต่อไปนี้เป็นเกมระหว่างบุคคลสองคนที่มีผลรวมเท่ากับศูนย์ง่าย ๆ เกมหนึ่ง เนื่องจากว่าไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วงสำหรับเกมนี้ ผู้เล่นทั้งสองจึงไม่อาจนำกลยุทธ์แท้ไปใช้เพื่อเป็นประโยชน์แก่ตนมากที่สุด

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

ไม่มีค่าตอบแทนใดที่เป็นทั้งค่าที่น้อยที่สุดของแถวนอนและค่าที่สูงที่สุดของแถวตั้ง (10–2)

หน้าที่ของเราในที่นี้คือ การกำหนดสัดส่วนของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ผู้เล่น X ควรจะใช้ไปในการเล่นแถวนอนแต่ละแถวของเขา และสัดส่วนของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ผู้เล่น Y ควรจะใช้ไปในการเล่นแถวตั้งแต่ละแถวของเขา เนื่องจากเรากำลังพิจารณาสัดส่วนของจำนวนครั้งทั้งหมด จึงต้องแยกให้เห็นระหว่างจำนวนครั้งที่ X ใช้ไปในการเล่นแถวนอนที่ 1 และจำนวนครั้งที่ใช้ไปในการเล่นแถวนอนที่ 2 สำหรับผู้เล่น Y เราก็ต้องแบ่งแยกในทำนองเดียวกัน สมมติให้ Q เป็นสัดส่วนของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ผู้เล่น X ใช้ไปในการเล่นแถวนอนที่ 1 คำนวณออกมาในรูปเศษส่วน ถ้าเช่นนั้น สัดส่วนของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ X ใช้ไปในการเล่นแถวนอนที่ 2 จะต้องเท่ากับ 1–Q ตัวอย่างเช่น ถ้าผู้เล่น X เล่นแถวนอนที่ 1 3/4 ของจำนวนครั้งทั้งหมด จำนวนครั้งที่เขาใช้ไปในการเล่นแถวนอนที่ 2 จะต้องเท่ากับ 1 – 3/4 หรือ 1/4 แนวความคิดอย่างเดียวกันนี้อาจนำไปใช้ได้กับผู้เล่น Y และการแบ่งจำนวนครั้งทั้งหมดในระหว่างแถวตั้งของเขา การแบ่งในรูปสัดส่วนของจำนวนครั้งระหว่างแถวนอนและระหว่างแถวตั้งแสดงออกดังตัวอย่างข้างล่าง:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & 1-P \end{array} \\ \begin{array}{c} Q \\ 1-Q \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10\text{–}2)$$

สมการ (10–2) ชี้ให้เราทราบว่า :

1. ผู้เล่น X เล่นแถวนอนที่ 1 เป็นจำนวน Q ของจำนวนครั้งทั้งหมด (Q อยู่ระหว่าง 0 และ 100 เปอร์เซ็นต์)

2. ผู้เล่น X เล่นแถวนอนที่ 2 เป็นจำนวน 100% – Q ของจำนวนครั้งทั้งหมด

3. ผู้เล่น Y เล่นแถวตั้งที่ 1 เป็นจำนวน P ของจำนวนครั้งทั้งหมด (P อยู่ระหว่าง 0 และ 100 เปอร์เซ็นต์)

4. ผู้เล่น Y เล่นแถวตั้งที่ 2 เป็นจำนวน 100% – P ของจำนวนครั้งทั้งหมด

ต่อไป เราจะต้องคำนวณหาเศษส่วนที่ยังไม่ทราบค่าคือ P และ Q ลองพิจารณาผู้เล่น X ก่อน ในทางตรรกวิทยา X ต้องการแบ่งการเล่นในระหว่างแถวนอนของเขาเพื่อให้จำนวนที่ได้ที่คาดไว้จากการเล่นแถวนอนที่ 1 เท่ากับจำนวนที่ได้ที่คาดไว้จากการเล่นแถวนอนที่ 2 พอดี ไม่ว่า Y จะเล่นในลักษณะใดก็ตาม ทางด้านธุรกิจก็มีเหตุการณ์ที่คล้ายคลึงกันนี้เกิดขึ้น บริษัทแห่งหนึ่งจะดำเนินตามแนวการกระทำ A จนถึงจุดหนึ่งที่รู้สึกว่า B จะให้กำไรดีกว่า ณ จุดนี้ธุรกิจนั้นก็จะหันไปทาง B ต่อมาถ้า A น่าสนใจมากกว่า B ธุรกิจก็จะหันกลับไปทาง A อีก แต่เราได้ตั้งข้อสมมติไว้ว่าคู่ต่อสู้ของ X คือ Y มีความเฉลียวฉลาดเท่าเทียมกัน และ Y จะนำกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของเขาเข้ามาใช้ ในทางกลับกันถ้า Y ไม่มีความสามารถและนำกลยุทธ์ที่โง่เขลาเข้ามาใช้ X ก็ไม่อาจกำหนดกลยุทธ์โดยอาศัยการให้เหตุผลดังกล่าว เขาได้แต่เพียงคอยมองหาช่องโหว่ที่ชัดแจ้งในกลยุทธ์ของ Y และเล่นตามที่ตนเห็นว่าดีที่สุด

ตาราง 10–2 แทนจำนวนที่ได้ที่คาดไว้ของ X จากการเล่นแถวนอนที่ 1 เป็นจำนวน Q ของจำนวนครั้งทั้งหมด และแถวนอนที่ 2 เป็นจำนวน (1 – Q) ของจำนวนครั้งทั้งหมด

ตาราง 10–2

	จำนวนที่ได้ที่คาดไว้ของ X ถ้า Y เล่นแถวตั้งที่ 1	ถ้า Y เล่นแถวตั้งที่ 2
X เล่นแถวนอนที่ 1 Q ของจำนวนครั้งทั้งหมด	X ได้ 5 คะแนน Q ของจำนวนครั้งทั้งหมด	X ได้ 1 คะแนน Q ของจำนวนครั้งทั้งหมด
X เล่นแถวนอนที่ 2 (1–Q) ของจำนวนครั้งทั้งหมด	X ได้ 3 คะแนน (1 – Q) ของจำนวนครั้งทั้งหมด	X ได้ 4 คะแนน (1 – Q) ของจำนวนครั้งทั้งหมด
จำนวนที่ได้ที่คาดไว้ของ X	5Q + 3(1 – Q) เมื่อ Y เล่นแถวตั้งที่ 1	1Q + 4(1 – Q) เมื่อ Y เล่นแถวตั้งที่ 2

เพื่อทำให้จำนวนที่ได้ที่คาดไว้ของ X เมื่อ Y เล่นแถวตั้งที่ 1 เท่ากับจำนวนที่ได้ที่คาดไว้ของ X เมื่อ Y เล่นแถวตั้งที่ 2 เราให้ $5Q+3(1-Q)$ เท่ากับ $1Q+4(1-Q)$ และคำนวณหาค่าของ Q ที่จะทำให้การคาดหมายทั้งสองเท่ากัน ดังนี้ :

$$5Q+3(1-Q) = 1Q+4(1-Q) \tag{10–3}$$
$$5Q+3-3Q = 1Q+4-4Q$$
$$5Q = 1$$
$$Q = 1/5$$
เพราะฉะนั้น $1-Q = 4/5$

การหาคำเฉลยโดยวิธีพีชคณิตข้างต้นชี้ให้เห็นว่า ผู้เล่น X เล่นแถวนอนที่ 1 1/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และเล่นแถวนอนที่ 2 4/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด

ต่อไปเราจะต้องคำนวณหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดสำหรับผู้เล่น Y โดยใช้วิธีพีชคณิตอย่างเดียวกัน ผู้เล่น Y ต้องการที่จะแบ่งจำนวนครั้งทั้งหมดระหว่างแถวตั้งของเขา เพื่อทำให้จำนวนที่ได้ในระยะยาวอยู่ในระดับสูงสุด ไม่ว่า X จะจัดการกับแถวนอนของเขาในลักษณะใดก็ตาม ในลักษณะเช่นนั้น Y อยู่ในฐานะที่ไม่ต้องไปคำนึงว่า X จะเลือกกลยุทธ์ใด เพราะ Y จะทำให้จำนวนที่ได้ของเขาอยู่ในระดับสูงสุด (หรือทำให้จำนวนที่เสียอยู่ในระดับต่ำสุด) ไม่ว่า X จะเลือกกลยุทธ์ใดก็ตาม ข้อสังเกตเกี่ยวกับการเลือกกลยุทธ์ระหว่างแถวตั้งของ Y อาจแสดงแทนในรูปพีชคณิตเพื่อคำนวนหากลยุทธ์ที่ใช้ ตาราง 10–3 แสดงการคาดหมายของ Y จากการเล่นแถวตั้งที่ 1 เป็นจำนวน P ของจำนวนครั้งทั้งหมดและเล่นตามแถวตั้งที่ 2 เป็นจำนวน (1 – P) ของจำนวนครั้งทั้งหมด โดยไม่ต้องคำนึงถึงการกระทำของ X

ตาราง 10–3

	จำนวนที่เสียที่คาดไว้ของ Y		
	Y เล่นแถวตั้งที่ 1 และเล่นตามแถวตั้งที่ 2	P ของจำนวนครั้งทั้งหมด (1 – P) ของจำนวนครั้งทั้งหมด	จำนวนที่เสียที่คาดไว้ของ Y
ถ้า X เล่นแถวนอนที่ 1	Y เสีย 5 คะแนน P ของจำนวนครั้งทั้งหมด	Y เสีย 1 คะแนน (1–P) ของจำนวนครั้งทั้งหมด	$5P+1(1-P)$ เมื่อ X เล่นแถวนอนที่ 1
ถ้า X เล่นแถวนอนที่ 2	Y เสีย 3 คะแนน P ของจำนวนครั้งทั้งหมด	Y เสีย 4 คะแนน (1 – P) ของจำนวนครั้งทั้งหมด	$3P+4(1-P)$ เมื่อ X เล่นแถวนอนที่ 2

ต่อไป ทำให้จำนวนที่เสียที่คาดไว้ของ Y เมื่อ X เล่นแถวนอนที่ 1 เท่ากับจำนวนที่เสียที่คาดไว้ของ Y เมื่อ X เล่นแถวนอนที่ 2 :

$$5P + 1(1-P) \quad = \quad 3P + 4(1-P) \qquad (10-4)$$

หาค่าของ P :

$$\begin{aligned} 5P + 1 - P &= 3P + 4 - 4P \\ 4P + 1 &= 4 - P \\ 5P &= 3 \\ P &= 3/5 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $1 - P = 2/5$

กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ Y คือจะต้องเล่นแถวตั้งที่ 1 3/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมดและเล่นแถวตั้งที่ 2 2/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด การที่เราให้ผู้เล่นแต่ละคนเลือกเล่นตามทางเลือกแต่ละทางที่ตนมีอยู่เป็นอัตราส่วนหนึ่งของจำนวนครั้งทั้งหมด ย่อมเป็นที่เข้าใจกันว่าการแบ่งจำนวนครั้งทั้งหมดระหว่างแถวนอนหรือแถวตั้ง จะต้องกระทำไปในลักษณะเชิงสุ่มโดยปราศ-จากลักษณะที่อาจสังเกตได้ ถ้าผู้เล่นคนใดคนหนึ่งเริ่มจะสังเกตลักษณะการเล่นของฝ่ายตรงกันข้ามได้ เป็นต้นว่า X สังเกตได้ว่า Y จะเล่นแถวตั้งที่ 1 สามครั้ง และแล้วเล่นแถวตั้งที่ 2 สองครั้ง ในลักษณะเช่นนี้ครั้งแล้วครั้งเล่า ผู้เล่นคนนั้นจะปรับกลยุทธ์ของตนเพื่อถือเอาประโยชน์จากการที่ฝ่ายตรงข้ามเปิดเผยให้ทราบลักษณะการเล่นในครั้งต่อ ๆ ไป ในทางตรงกันข้ามถ้าผู้เล่นทั้งสองต่างก็เล่นตามกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของตนโดยปราศจากลักษณะที่อาจสังเกตได้ กล-ยุทธ์ตามที่คำนวณได้ก็จะเป็นการแบ่งจำนวนครั้งทั้งหมดระหว่างแถวนอนหรือแถวตั้งที่ดีที่สุด

ในเมื่อเราสามารถกำหนดกลยุทธ์ผสมที่ดีที่สุด เราก็อยู่ในฐานะที่จะคำนวณค่าของเกมนี้ได้ เกมเดิมพร้อมด้วยกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของผู้เล่นแต่ละคนปรากฏดังข้างล่างนี้ :

$$\begin{array}{ccc} & & \quad Y \\ & & \begin{array}{cc} 3/5 & 2/5 \end{array} \\ X & \begin{array}{c} 1/5 \\ 4/5 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10-2)$$

ถ้าพิจารณาเกมนี้จากทัศนะของผู้เล่น X เราอาจให้เหตุผลได้ ดังนี้ :

1. ในระหว่าง 3/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ Y เล่นแถวตั้งที่ 1 X ได้ 5 คะแนน 1/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และได้ 3 คะแนน 4/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด

2. ในระหว่าง 2/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ Y เล่นแถวตั้งที่ 2 X ได้ 1 คะแนน 1/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และได้ 4 คะแนน 4/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด

เพราะฉะนั้น จำนวนที่ได้ที่คาดไว้ทั้งสิ้นของ X ในระยะยาวคือผลรวมของข้อ 1 และ 2 ข้างต้น :

$$
\begin{array}{lcl}
\quad\quad 1 & & \quad\quad 2 \\
3/5\ [\,5(1/5) + 3(4/5)\,] & + & 2/5\ [\,1(1/5) + 4(4/5)\,] \\
3/5\ (5/5 + 12/5) & + & 2/5\ (1/5 + 16/5) \\
3/5\ (17/5) & + & 2/5\ (17/5) \\
\quad = 17/5 = \text{ค่าของเกม} & &
\end{array}
$$

นี่หมายความว่า ถ้าผู้เล่น X เล่นตามกลยุทธ์ที่ดีที่สุด เขาสามารถคาดได้ว่าจะได้ค่าตอบแทนถัวเฉลี่ยเท่ากับ 3 2/5 คะแนนจากการเล่นเกมนี้แต่ละครั้ง เราได้สังเกตตั้งแต่ในตอนเริ่มแรกแล้วว่า ตามเกมนี้ X จะเป็นผู้ได้เพราะค่าที่คำนวณได้เป็นตัวเลขที่มีค่าเป็นบวก ถ้าค่าของเกมเป็นตัวเลขที่มีค่าเป็นลบ Y ก็จะเป็นผู้ได้ แต่สำหรับเกมที่เรากำลังกล่าวถึงนี้ Y ไม่ใช่ผู้ได้ เพราะเกมนี้มีความโน้มเอียงไปทางให้ประโยชน์แก่ X เพราะในเมตริกซ์เดิม ไม่มีค่าตอบแทนค่าใดมีค่าเป็นบวกเลย

เมื่อพิจารณาเกมนี้จากทัศนะของผู้เล่น Y เราอาจคำนวณค่าของเกมที่มีค่าเท่ากันดังนี้ :

1. ในระหว่าง 1/5 ของจำนวนครั้งที่ X เล่นแถวนอนที่ 1 Y เสีย 5 คะแนน 3/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และเสีย 1 คะแนน 2/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด

2. ในระหว่าง 4/5 ของจำนวนครั้งที่ X เล่นแถวนอนที่ 2 Y เสีย 3 คะแนน 3/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และเสีย 4 คะแนน 2/5 ของจำนวนครั้งทั้งหมด

เพราะฉะนั้น จำนวนที่เสียที่คาดไว้ทั้งสิ้นของ Y ในระยะยาวคือผลรวมของข้อ 1 และ 2 ข้างต้น :

$$
\begin{array}{lcl}
\quad\quad 1 & & \quad\quad 2 \\
1/5\ [\,5(3/5) + 1(2/5)\,] & + & 4/5\ [\,3(3/5) + 4(2/5)\,] \\
1/5\ (15/5 + 2/5) & + & 4/5\ (9/5 + 8/5) \\
1/5\ (17/5) & + & 4/5\ (17/5) \\
\quad = 17/5 & &
\end{array}
$$

จะเห็นได้ว่าค่าของเกมเท่ากับ 3 2/5 อีกครั้งหนึ่ง เราทราบว่า X เป็นผู้ได้เพราะค่าของเกมเป็นตัวเลขที่มีค่าเป็นบวก คำว่า "ค่าของเกม" ไม่ได้หมายความว่า X จะชนะ 3 2/5 คะแนนทุกครั้งที่ผู้เล่นทั้งสองเล่นเกมนี้ แต่หมายความว่าจำนวนที่ X ได้จากการเล่นเกมนี้หลาย ๆ ครั้งถัวเฉลี่ยแล้วจะเท่ากับ 3 2/5 คะแนนต่อเกม

การหาคำเฉลยของเกมขนาด 2 × 2 โดยวิธีอื่น ๆ
(Alternate Solution Methods for 2 × 2 Games)

การหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดโดยวิธีเลขคณิต

(Arithmetic Method for finding optimum strategies)

ในการหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดของผู้เล่นแต่ละคนสำหรับเกมขนาด 2 × 2 เราอาจอาศัยวิธีเลขคณิตอย่างง่าย ๆ เพื่อเป็นการอธิบายวิธีเลขคณิตนี้ เราจะเขียนเกมตามตัวอย่างเดิมในตอนก่อนอีกครั้งหนึ่ง :

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10\text{—}2)$$

วิธีการหาคำเฉลยโดยเลขคณิตในขั้นแรก จะต้องหักค่าตอบแทนที่มากกว่าของแต่ละแถวนอนด้วยค่าตอบแทนที่น้อยกว่า และหักค่าตอบแทนที่มากกว่าของแต่ละแถวตั้งด้วยค่าตอบแทนที่น้อยกว่า ดังนี้ :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} & \end{array} \qquad \begin{matrix} 5 - 1 = 4 \\ 4 - 3 = 1 \end{matrix} \qquad \begin{array}{cc} 5 & 4 \\ \underline{-3} & \underline{-1} \\ 2 & 3 \end{array} \qquad (10\text{—}5)$$

ในขั้นถัดไปจึงสับตัวเลขตามที่หักได้แต่ละคู่ :

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 3 & 2 \end{matrix} & \end{array} \qquad (10\text{—}6)$$

ในการหากลยุทธ์ของผู้เล่น X เราเพียงแต่บวก 1 กับ 4 เข้าด้วยกัน และถัดจากนั้นจึงนำตัวเลขแต่ละตัวมาเขียนไว้บนผลรวมที่ได้ ในการหากลยุทธ์ของผู้เล่น Y เราบวก 3 กับ 2 เข้าด้วยกัน และถัดจากนั้นจึงนำตัวเลขแต่ละตัวมาเขียนไว้บนผลรวมที่ได้

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \frac{1}{1+4} \\ \frac{4}{1+4} \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \frac{3}{3+2} & \frac{2}{3+2} \end{matrix} & \end{array} = \begin{array}{ccc} & Y & \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{matrix} & \end{array} \quad \begin{matrix} X = 1/5, 4/5 \\ Y = 3/5, 2/5 \end{matrix} \qquad (10\text{—}7)$$

ท่านอาจพิสูจน์ความถูกต้องของกลยุทธ์ที่คำนวณได้ตามวิธีเลขคณิตนี้ โดยเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่คำนวณได้ตามวิธีพีชคณิตที่สับสนกว่า วิธีเลขคณิตเป็นวิธีที่มีประโยชน์มากเพราะมีความสลับซับซ้อนน้อยกว่าวิธีพีชคณิต เรามักจะใช้วิธีนี้คำนวณหากลยุทธ์ของเกมขนาด 2×2 แต่เป็นที่น่าเสียดายที่เราไม่อาจใช้วิธีนี้กับเกมที่มีขนาดใหญ่กว่านี้ได้

การหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดและค่าของเกมโดยวิธีพีชคณิตเมตริกซ์

(Matrix algebra method for finding optimum strategies and game value)

จากพีชคณิตเมตริกซ์ที่ได้ศึกษาไปแล้ว เราเรียนรู้วิธีคำนวณบางอย่างที่เป็นประโยชน์มากที่อาจนำไปใช้ในการคำนวณหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดและค่าของเกมขนาด 2×2

ถ้าใช้เมตริกซ์ค่าตอบแทนอันเดิม

$$\begin{array}{cc} & \text{Y} \\ \text{X} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{เมตริกซ์ A ของเกมเดิม} \qquad (10\text{–}2)$$

กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของผู้เล่นแต่ละคน และค่าของเกมนี้อาจหาได้โดยคำนวณค่าของเศษส่วนของเมตริกซ์ต่อไปนี้ :

$$\text{กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ X คือ} \quad \frac{(1\ \ 1)\ (\text{เมตริกซ์ประชิดของ A})}{(1\ \ 1)\ (\text{เมตริกซ์ประชิดของ A}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad (10\text{–}8)$$

$$\text{กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ Y คือ} \quad \frac{(1\ \ 1)\ (\text{เมตริกซ์สับที่ของเมตริกซ์ประชิดของ A})}{(1\ \ 1)\ (\text{เมตริกซ์ประชิดของ A}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad (10\text{–}9)$$

$$\text{ค่าของเกม คือ} \quad \frac{\left|\text{ดีเตอร์มินันต์ของ A}\right|}{(1\ \ 1)\ (\text{เมตริกซ์ประชิดของ A}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad (10\text{–}10)$$

เราอาจคำนวณค่าของเกมโดยหาค่าของ :

$$(\text{กลยุทธ์ของ X})\ (\text{เมตริกซ์ของเกม}) \begin{pmatrix} \text{ก} \\ \text{ล} \\ \text{ยุ} \\ \text{ท} \\ \text{ธ์} \\ \text{ข} \\ \text{อ} \\ \text{ง} \\ \text{Y} \end{pmatrix} \qquad (10\text{–}11)$$

เวคเตอร์	เมตริกซ์	เวคเตอร์
แถวนอน	A	แถวตั้ง

เราจะคำนวณหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ X ก่อน โดยอาศัยวิธีการหาคำเฉลยโดยพีชคณิตเมตริกซ์ตามสูตรที่ได้สรุปไว้ข้างต้น ดังนี้ :

$$X = \frac{(1 \quad 1)\ (\text{เมตริกซ์ประชิดของ A})}{(1 \quad 1)\ (\text{เมตริกซ์ประชิดของ A})\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \tag{10–8}$$

เมตริกซ์ประชิดของเมตริกซ์เดิม $\begin{pmatrix}5 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}$ อาจคำนวณได้ โดยใช้วิธีตามที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 7 ซึ่งจะชี้ให้เราทราบทันทีว่าเมตริกซ์ประชิดของเมตริกซ์เดิม คือ :

$$\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 5\end{pmatrix}$$

ถัดไป การคำนวณกลยุทธ์ของ X เป็นเพียงเรื่องของการคูณเมตริกซ์ง่าย ๆ ดังนี้ :

$$\frac{(1 \quad 1)\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 5\end{pmatrix}}{(1 \quad 1)\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

ซึ่งลดลงมาเหลือ $\dfrac{(1 \quad 4)}{(1 \quad 4)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

และในที่สุดเป็น $\dfrac{(1 \quad 4)}{(5)}$

ซึ่งอาจแยกออกเป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ X สำหรับแถวนอนทั้งสองของเขาดังนี้ :

$$1/5 \qquad 4/5$$

ในการคำนวณหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ Y เราหาค่าของ :

$$Y = \frac{(1 \quad 1)\begin{pmatrix}\text{เมตริกซ์สับที่ของเมตริกซ์}\\ \text{ประชิดของ A}\end{pmatrix}}{(1 \quad 1)\ (\text{เมตริกซ์ประชิดของ A})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \tag{10–9}$$

เมตริกซ์สับที่ของเมตริกซ์ประชิดได้มาจากการสับที่แถวนอนและแถวตั้งของเมตริกซ์ $\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 5\end{pmatrix}$ เมตริกซ์ที่ได้คือ $\begin{pmatrix}4 & -3\\-1 & 5\end{pmatrix}$ ถัดไปการคำนวณกลยุทธ์ของ Y เป็นเพียงเรื่องของการคูณเมตริกซ์ง่าย ๆ ดังนี้ :

$$\frac{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ซึ่งลดลงมาเหลือ $\dfrac{(3 \quad 2)}{(1 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

และในที่สุดเป็น $\dfrac{(3 \quad 2)}{(5)}$

ซึ่งอาจแยกออกเป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ Y สำหรับแถวตั้งทั้งสองของเขา ดังนี้ :

3/5 2/5

การคำนวณค่าของเกมโดยพีชคณิตเมตริกซ์อาจดำเนินการตามวิธีใดวิธีหนึ่ง ดังนี้ :

$$\text{ค่าของเกม} = \frac{|\text{ดีเตอร์มินันต์ของ A}|}{(1 \quad 1)\ (\text{เมตริกซ์ประชิดของ A})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{10–10}$$

หรือ

$$\text{ค่าของเกม} = (\text{กลยุทธ์ของ X})\ (\text{A}) \begin{pmatrix} \text{ก} \\ \text{ล} \\ \text{ยุ} \\ \text{ท} \\ \text{ธ์} \\ \text{ข} \\ \text{อ} \\ \text{ง} \\ \text{Y} \end{pmatrix} \tag{10–11}$$

ถ้าหาค่าของเกมโดยใช้สมการ (10–10) เราจะต้องหาคำเฉลยของ

$$\text{ค่าของเกม} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ซึ่งลดลงมาเหลือ $\dfrac{17}{(1 \quad 4)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

และในที่สุดเป็น 17/5 หรือ 3 2/5

การหาค่าของเกมโดยใช้สมการ (10–11) ปรากฏดังคำเฉลยข้างล่างนี้ :

$$\text{ค่าของเกม} = (1/5 \quad 4/5)\begin{pmatrix}5 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/5\\2/5\end{pmatrix}$$

$$= (17/5 \quad 17/5)\begin{pmatrix}3/5\\2/5\end{pmatrix}$$

$$= 17/5 \quad \text{หรือ} \quad 3\ 2/5$$

กล่าวโดยทั่วไป วิธีการหาคำเฉลยโดยพีชคณิตเมตริกซ์ตามสมการ (10–10) ใช้ได้จำกัดเฉพาะเกมขนาด 2 × 2 เท่านั้น ส่วนสมการ (10–11) อาจนำไปใช้ในการหาค่าของเกมใด ๆ ได้โดยไม่ต้องคำนึงถึงขนาดของเมตริกซ์ของเกม

การหาค่าของเกมโดยวิธีความน่าจะเป็นร่วม

(Joint probability method for obtaining game value)

ถ้าเราเขียนเมตริกซ์ของเกมเดิม และกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของเกมที่เรากำลังพิจารณากันอยู่ในบทนี้ อีกครั้งหนึ่ง :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Y} \\ & & \begin{array}{cc}3/5 & 2/5\end{array} \\ \text{X} & \begin{array}{c}1/5\\4/5\end{array} & \begin{pmatrix}5 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}\end{array} \qquad (10\text{–}2)$$

เราจะสังเกตได้ว่า กลยุทธ์ของผู้เล่นแต่ละคนประกอบด้วยความน่าจะเป็น 2 อย่าง กล่าวคือ ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่น X จะเล่นแถวนอนที่ 1 เท่ากับ 1/5 และความน่าจะเป็นที่ผู้เล่น X จะเล่นแถวนอนที่ 2 เท่ากับ 4/5 ในทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่น Y จะเล่นแถวตั้งที่ 1 เท่ากับ 3/5 และความน่าจะเป็นที่ Y จะเล่นแถวตั้งที่ 2 เท่ากับ 2/5 เนื่องจากผู้เล่นทั้งสองต่างก็เล่นเกมนี้อย่างอิสระ กล่าวคือ ไม่มีผู้เล่นคนใดทราบว่าผู้เล่นอีกคนหนึ่งจะเล่นกลยุทธ์ใดในครั้งถัดไป ความน่าจะเป็นของผู้เล่น X จึงเป็นอิสระจากความน่าจะเป็นของผู้เล่น Y

ค่าตอบแทนแต่ละค่าของเกม (5, 1, 3 และ 4) เกิดขึ้นต่อเมื่อมีการเล่นแถวนอนใดแถวนอนหนึ่ง และแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่งพร้อม ๆ กันเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ผู้เล่น X จะได้ 5 คะแนนต่อเมื่อเขาเล่นแถวนอนที่ 1 ในขณะเดียวกับที่ผู้เล่น Y เล่นแถวตั้งที่ 1 ความน่าจะเป็นที่จะมีการเล่นแถวนอนที่ 1 และแถวตั้งที่ 1 พร้อมกัน คือ ความน่าจะเป็นร่วมภายใต้สภาพการณ์ที่มีความเป็นอิสระทางเชิงสถิติ P (แถวนอนที่ 1, แถวตั้งที่ 1) = P (แถวนอนที่ 1) × P (แถวตั้งที่ 1) หรือในกรณีนี้คือ 1/5 × 3/5 หรือ 3/25 ดังนั้น ถ้าหากมีการเล่นเกมนี้ ความน่าจะเป็นที่ค่าตอบแทนจะเท่ากับ 5 จึงเท่ากับ 3/25

โดยการให้เหตุผลในทำนองเดียวกันนี้ เราอาจคำนวณความน่าจะเป็นร่วมที่จะได้ค่าตอบแทนแต่ละค่าดังนี้ :

ค่าตอบแทน	กลยุทธ์ที่ก่อให้เกิดค่าตอบแทนนี้	ความน่าจะเป็นของค่าตอบแทนนี้
5	แถวนอนที่ 1, แถวตั้งที่ 1	1/5 × 3/5 = 3/25
1	แถวนอนที่ 1, แถวตั้งที่ 2	1/5 × 2/5 = 2/25
3	แถวนอนที่ 2, แถวตั้งที่ 1	4/5 × 3/5 = 12/25
4	แถวนอนที่ 2, แถวตั้งที่ 2	4/5 × 2/5 = 8/25
รวม		1.0

ต่อไปเราสามารถคำนวณค่าของเกม โดยคูณค่าตอบแทนแต่ละค่าด้วยความน่าจะเป็นของค่าตอบแทนนั้น ๆ ดังนี้ :

ค่าตอบแทน		ความน่าจะเป็นของค่าตอบแทนนี้		
5	×	3/25	=	15/25
1	×	2/25	=	2/25
3	×	12/25	=	36/25
4	×	8/25	=	32/25
รวม				85/25 หรือ 3 2/5 ค่าของเกม

งานขั้นสุดท้าย เป็นแต่เพียงการคำนวณค่ามัชฌิมของตัวแปรผันเชิงสุ่ม ซึ่งตัวแปรผันเชิงสุ่มในกรณีนี้ คือ ค่าตอบแทนต่าง ๆ ทั้ง 4 ค่านั่นเอง

เกมขนาด 2 × M และ M × 2 (2 × M and M × 2 Games)

เกมที่ผู้เล่นคนหนึ่งมีทางเลือกมากกว่าสองทาง แต่ผู้เล่นอีกคนหนึ่งมีทางเลือกจำกัดเพียงสองทาง เรียกว่าเกมขนาด 2 × M หรือ M × 2 แล้วแต่ว่าผู้เล่นแถวตั้งหรือผู้เล่น

แถวนอนเป็นผู้ที่มีทางเลือกมากกว่าสองทาง ตัวอย่างของเกมที่มีลักษณะเช่นนี้พร้อมทั้งขนาดของเกมแต่ละเกม Y ปรากฏดังข้างล่างนี้ :

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad M \times 2 \qquad \begin{array}{l} \text{มีแถวนอนมากกว่า 2 แถว} \\ \text{มีแถวตั้งเพียง 2 แถว} \end{array} \tag{10--12}$$

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -7 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad 2 \times M \qquad \begin{array}{l} \text{มีแถวนอนเพียง 2 แถว} \\ \text{มีแถวตั้งมากกว่า 2 แถว} \end{array} \tag{10--13}$$

เราไม่สามารถกำหนดกลยุทธ์ที่ดีที่สุด และคำนวณค่าของเกมทั้งสองข้างต้นโดยอาศัยวิธีการหาคำเฉลยต่าง ๆ เท่าที่เราได้อธิบายไปแล้วทั้งหมด ยกเว้นแต่ว่าเราสามารถหาจุดดุลศูนย์ถ่วงของเกมเหล่านี้โดยบังเอิญ ในกรณีเช่นนั้น เราจะได้กลยุทธ์และค่าที่แน่นอน แต่เกมทั้งสองข้างต้นต่างก็ไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง

การหาคำเฉลยโดยการครอบครอง
(Solution by dominance)

ถ้ามีทางลดขนาดของเกมแต่ละเกมข้างต้นให้เป็นเกมขนาด 2 × 2 ที่เราทราบวิธีการหาคำเฉลยของเกมเหล่านี้อยู่แล้ว เราก็สามารถหาคำเฉลยได้โดยง่าย พิจารณาสมการ (10–12) ให้ลึกซึ้งกว่านี้

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{10--12}$$

คำถามหนึ่งที่ตามมาคือ "ทำไมผู้เล่น X จึงต้องเล่นแถวนอนที่ 2 ในเมื่อแถวนอนที่ 2 เปิดโอกาสที่มีอยู่เพียงโอกาสเดียวเท่านั้น ให้ฝ่ายตรงข้ามเป็นฝ่ายได้ ? แน่ละ ผู้เล่น X จะไม่ยอมเล่นแถวนอนที่ 2 ในเมื่อเขาสามารถทำอะไรที่ดีกว่านั้นโดยการเล่นแถวนอนที่ 1 และที่ 3 ถ้าเช่นนั้นเราอาจกล่าวได้ว่าแถวนอนที่ 2 อยู่ภายใต้การครอบครอง กล่าวคือ เราอาจละแถวนอนแถวนี้ เพราะกลยุทธ์อื่นจะทำให้ผู้เล่น X ได้รับค่าตอบแทนที่ดีกว่ากลยุทธ์ที่ถูกครอบครองเสมอโดยไม่ต้องคำนึงถึงการกระทำของฝ่ายตรงข้ามเลย

ดังนั้น จากการประเมินโอกาสที่จะเกิดการครอบครองในสมการ (10–12) เราสามารถที่จะลดสมการนี้จาก :

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{เป็น } \begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ซึ่งเราสามารถหากลยุทธ์และคำนวณค่าของเกมได้โดยง่ายดังนี้ X = 2/3, 0, 1/3 และ Y = 1/3, 2/3 ค่าของเกม = 5/3 เพื่อที่จะให้ได้มาซึ่งคำตอบดังกล่าว เราอาจจะใช้วิธีหาคำเฉลยของเกมขนาด 2 × 2 วิธีใดวิธีหนึ่งตามที่เราได้ศึกษาไปแล้ว ยกเว้นวิธีจุดดุลศูนย์ถ่วง X แม้ว่าจะไม่เล่นแถวนอนที่ 2 เลยก็ตาม กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของเขา จะครอบคลุมไปถึงแถวนอนทั้งสามแถว กลยุทธ์สำหรับแถวนอนที่ 2 คือ ศูนย์

ต่อไปเราจะหันความสนใจของเราไปยังเกมขนาด 2 × M

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -7 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10\text{–}13)$$

จะเห็นได้ว่า เราสามารถนำวิธีการครอบครองมาใช้กับเกมนี้อีกเช่นกัน ผู้เล่น Y จะไม่ยอมเล่นแถวตั้งที่ 3 และที่ 4 เลย เพราะเป็นการเปิดโอกาสให้ฝ่ายตรงข้ามเป็นฝ่ายได้ ถ้าผู้เล่น Y เล่นเฉพาะแถวตั้งที่ 1 และที่ 2 ค่าตอบแทนทุกค่ามีค่าเป็นลบ และ Y จะเป็นฝ่ายได้จากการเล่นเกมนี้ตลอดเวลา เราจึงสามารถลดเกมขนาด 2 × 2 M ข้างต้นให้ลงมาเหลือ :

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

ซึ่งคำเฉลยที่คำนวณได้ (โดยใช้วิธีใดวิธีหนึ่งตามที่เราได้กล่าวแล้วข้างต้น) คือ X = 3/8, 5/8 Y = 2/8, 6/8, 0, 0 ค่าของเกม = –4 3/4 แม้ว่า Y จะไม่เล่นแถวตั้งที่ 3 และที่ 4 เลยก็ตาม กลยุทธ์ที่ดีที่สุดสำหรับแถวตั้งเหล่านี้ก็คือ ศูนย์ เพื่อชี้ให้เห็นว่า Y มีกลยุทธ์ที่ดีที่สุดสำหรับแถวตั้งทุกแถวของเขา แม้ว่าอาจจะไม่มีการเล่นแถวตั้งบางแถวเลยก็ตาม

ต่อไปนี้ เป็นเกมขนาด $2 \times M$ และ $M \times 2$ นี้พร้อมด้วยเกมขนาด 2×2 ซึ่งเป็นผลจากการวิเคราะห์เกมแต่ละเกม เพื่อหาการครอบครองและตัดแถวนอนหรือแถวตั้งที่ถูกครอบครองออกไป

ก. $$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad 2 \times M \quad \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

ผู้เล่น Y จะไม่เล่นแถวตั้งที่ 1, 2 หรือ 4 เพราะแถวตั้งเหล่านี้จะทำให้ฝ่ายตรงข้ามคือ X มีโอกาสได้ ไม่ว่ากรณีใดก็ตามแถวตั้งที่ 3 หรือแถวตั้งที่ 5 เป็นทางเลือกที่ดีกว่า แต่ผู้เล่น Y ยังคงต้องแบ่งจำนวนครั้งทั้งหมดระหว่างแถวตั้งที่ 3 และที่ 5 เพราะไม่มีแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่งดีกว่าอีกแถวหนึ่งเสมอไป

ข. $$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad M \times 2 \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ผู้เล่น X จะไม่เล่นแถวนอนที่ 3 เพราะจะทำให้ Y มีโอกาสได้ 1 คะแนน ไม่ว่ากรณีใดก็ตาม แถวนอนที่ 1 หรือแถวนอนที่ 2 เป็นทางเลือกที่ดีกว่าแถวนอนที่ 3 แต่ผู้เล่น X ยังคงต้องแบ่งจำนวนครั้งทั้งหมดระหว่างแถวนอนที่ 1 และแถวนอนที่ 2 เพราะไม่มีแถวนอนใดแถวนอนหนึ่งดีกว่าอีกแถวหนึ่งเสมอไป

ค. $$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad 2 \times M \quad \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$$

ผู้เล่น Y จะไม่เล่นแถวตั้งที่ 1 เพราะจะทำให้ X มีโอกาสได้ 3 คะแนน สำหรับผู้เล่น Y แถวตั้งที่ 2 และที่ 3 ต่างก็เป็นทางเลือกที่ดีกว่าแถวตั้งที่ 1 ผู้เล่น Y จะแบ่งจำนวนครั้งทั้งหมดระหว่างแถวตั้งที่ 2 และที่ 3 เพราะไม่มีแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่งดีกว่าอีกแถวหนึ่งเสมอไป

ง. $$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad M \times 2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ผู้เล่น X จะไม่เล่นแถวนอนที่ 1 เพราะการเล่นแถวนอนที่ 2 ดีกว่า เพราะถ้า Y เล่นแถวตั้งที่ 2 จำนวนที่ X ได้เท่ากับ 4 คะแนน ไม่ว่า X จะเล่นแถวนอนที่ 1 หรือที่ 2 ก็ตาม แต่ X ต้องเสี่ยงต่อการเสีย 2 คะแนน แทนที่จะเป็น 1 คะแนน ถ้า Y เล่นแถวตั้งที่ 1 แน่ละ ผู้เล่น X จะเล่นแถวนอนที่ 3 เพราะจากค่าตอบแทนทั้งสองของแถวนอนนี้เขาจะเป็นฝ่ายได้ X จะแบ่งจำนวนครั้งทั้งหมดระหว่างแถวนอนที่ 2 และที่ 3 เพราะไม่มีแถวนอนใดแถวนอนหนึ่งดีกว่าอีกแถวหนึ่งเสมอไป

การหาคำเฉลยโดยวิธีเกมย่อย
(Solution by method of subgames)

เกมขนาด $2 \times M$ หรือ $M \times 2$ อาจถูกลดขนาดลงได้โดยวิธีการครอบครองให้เป็นเกมขนาด 2×2 ที่หาคำเฉลยได้โดยง่าย แต่เราไม่อาจลดขนาดของเกมในลักษณะเช่นนั้นได้ในทุก ๆ กรณี หรือทำได้ก็เพียงบางส่วนเท่านั้น ทำให้เรายังคงต้องหาคำเฉลยให้กับเกมที่มีขนาดใหญ่กว่า 2×2 เป็นต้นว่าในตัวอย่างข้างล่างนี้ เกมเดิม คือ

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -6 & -1 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & 6 & 3 & -5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10\text{—}14)$$

อาจถูกลดขนาดลงโดยการครอบครองให้เป็น :

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10\text{—}15)$$

ซึ่งอาจอธิบายได้ว่าผู้เล่น Y จะไม่เล่นแถวตั้งที่ 3, 4 และ 6 ในเกมเดิม เพราะแถวตั้งเหล่านี้ทำให้ฝ่ายตรงข้ามเป็นฝ่ายได้ แต่วิธีการครอบครองก็ไม่สามารถที่จะลดขนาดของเกมให้เล็กไปกว่านี้ได้ เราจึงยังคงต้องหาวิธีเฉลยเกมที่มีขนาดใหญ่กว่า 2×2

เราอาจพิจารณาเกมขนาด 2×3 $\begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ ในลักษณะที่ว่าความจริงก็คือเกมที่ประกอบด้วยเกมขนาด 2×2 3 เกม ดังนี้

เกมย่อยที่ 1 $\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ แถวตั้งที่ 1 และ 2

เกมย่อยที่ 2 $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ แถวตั้งที่ 1 และ 3

เกมย่อยที่ 3 $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ แถวตั้งที่ 2 และ 3

ในแต่ละเกมของเกมขนาด 2×2 ทั้งสามข้างต้น ผู้เล่น Y ได้เลือกไม่เล่นแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่ง ตัวอย่างเช่น ในเกมย่อยที่ 1 เขาได้ละแถวตั้งที่ 3 ในเกมย่อยที่ 2 เขาได้ละแถวตั้งที่ 2 และในเกมย่อยที่ 3 เขาได้ละแถวตั้งที่ 1

ในเมื่อผู้เล่น Y เป็นผู้ที่มีโอกาสเลือกไม่เล่นแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่ง ข้อเท็จจริงจึงมีอยู่ว่าสิ่งที่เขากำลังกระทำอยู่คือ พยายามพิจารณาว่ากลยุทธ์ผสมระหว่างแถวตั้งสองแถวใดจะเป็นผลดีแก่ตนมากที่สุด ทำไม Y จึงมีความเชื่อว่ากลยุทธ์ระหว่างแถวตั้งสองแถวดีกว่ากลยุทธ์แถวตั้งสามแถว (การเล่นตามแถวตั้งทั้งสามแถวในสัดส่วนใดสัดส่วนหนึ่ง) เราจะเข้าใจในเหตุผลเกี่ยวกับเรื่องนี้ดีโดยพิจารณาจากเมตริกซ์ของเกมเดิมข้างล่างนี้ :

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \tag{10—15}$$

เมื่อผู้เล่น X เล่นแถวนอนที่ 1 Y ควรจะเลือกระหว่างแถวตั้งที่ 1 (-6) และแถวตั้งที่ $2(-1)$ แทนที่จะพิจารณาถึงแถวตั้งที่ $3(4)$ เพราะในเมื่อ X เล่นแถวนอนที่ 1 กลยุทธ์ผสมของผู้เล่น Y ระหว่าง -6 กับ -1 จะให้ค่าตอบแทนที่ดีกว่ากลยุทธ์ผสมระหว่างแถวตั้งอื่นใดอีกสองแถว ในทำนองเดียวกันเมื่อผู้เล่น X เล่นแถวนอนที่ 2 Y จะเล่นกลยุทธ์ผสมระหว่างแถวตั้งที่ 2 และ 3 ซึ่งให้ค่าตอบแทนเท่ากับ -2 และ -5 ตามลำดับ โดยไม่คำนึงถึงแถวตั้งที่ 1 ซึ่งจะทำให้ฝ่ายตรงข้ามได้ค่าตอบแทน 7 คะแนน ดังนั้นถ้ากำหนดกลยุทธ์ผสมของผู้เล่น X จะสังเกตได้ว่ากลยุทธ์ของ Y ระหว่างแถวตั้งสองแถวกลยุทธ์ใดกลยุทธ์หนึ่งดีกว่ากลยุทธ์ระหว่างแถวตั้งสามแถว งานที่ต้องดำเนินต่อก็คือ การพิจารณาว่ากลยุทธ์ระหว่างแถวตั้งสองแถวใดเป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุดสำหรับผู้เล่น Y เพราะว่าเขาเป็นผู้ที่จะต้องตัดสินใจว่าจะเล่นกลยุทธ์ใด ไม่ว่ากรณีใดก็ตามเราจะเห็นได้ว่า Y จะไม่เล่นแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่งเสมอ

ในการเลือกกลยุทธ์ที่ดีที่สุดระหว่างแถวตั้งสองแถวของผู้เล่น Y เราจะต้องหากลยุทธ์และคำนวณค่าของเกมขนาด 2×2 ทั้งสามและเลือกเอากลยุทธ์ใดกลยุทธ์หนึ่งที่ดีที่สุดจริง ๆ เกมย่อยทั้งสามพร้อมด้วยคำเฉลยของแต่ละเกมปรากฏดังข้างล่างนี้ จะสังเกตได้ว่าถ้าไม่เล่นแถวตั้งใดแถวตั้งหนึ่ง แถวตั้งนั้นจะถูกแทนด้วยค่าศูนย์ในกลยุทธ์ของ Y

เกมย่อยที่ 1 $\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{aligned} X &= (9/14,\ 5/14) \\ Y &= (1/14,\ 13/14,\ 0) \\ \text{ค่า} &= -19/14 \end{aligned}$ ไม่เล่นแถวตั้งที่ 3 ของเกมเดิม

เกมย่อยที่ 2 $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ X = (12/22, 10/22) ไม่เล่นแถวตั้ง
Y = (9/22, 0, 13/22) ที่ 2 ของเกมเดิม
ค่า = $-1/11$

เกมย่อยที่ 3 $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ X = (1, 0) ไม่เล่นแถวตั้ง
Y = (0, 1, 0) ที่ 1 ของเกมเดิม
ค่า = -1

จุดดุลศูนย์ถ่วง

ปรากฏว่าในระหว่างเกมย่อยทั้งสาม เกมย่อยที่ 1 ซึ่งมีค่าสำหรับผู้เล่น Y เท่ากับ $-19/14$ เป็นทางเลือกที่ดีที่สุดของ Y และกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ Y คือการเล่นแถวตั้งที่ 1 1/14 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และแถวตั้งที่ 2 13/14 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และแถวตั้งที่ 3 0 ของจำนวนครั้งทั้งหมด

ไม่เป็นการยากเลยที่จะพิสูจน์ว่า กลยุทธ์ระหว่างแถวตั้งสองแถวที่เราได้เลือกให้ผู้เล่น Y เป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุด ในการพิสูจน์ เราจะต้องสังเกตเกม 2×3 เดิม :

$$\begin{array}{cc} & \text{Y} \\ & \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \text{X} \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

ให้ X_1 = สัดส่วนของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ X เล่นแถวนอนที่ 1

X_2 = สัดส่วนของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ X เล่นแถวนอนที่ 2 (10—15)

จากเกมนี้เราจะสังเกตได้ว่า เมื่อ Y เล่นแถวตั้งที่ 1 ถ้า X เล่นแถวนอนที่ 1 จะเสีย 6 คะแนน ถ้าเล่นแถวนอนที่ 2 จะได้ 7 คะแนน เราได้อธิบายไปแล้วในตอนก่อนแล้วว่าเราจะเลือกกลยุทธ์ผสมที่ดีที่สุดได้อย่างไรโดยการทำให้การคาดหมายเท่ากัน เราคงจำได้ว่าการคาดหมายของ X จากการเล่นกลยุทธ์ผสมระหว่างแถวนอนของเขาจะมีจำนวนเท่ากัน ไม่ว่า Y จะเล่นแถวตั้งใด กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ X จะเลือกกลยุทธ์ผสมของเขาในลักษณะที่ว่าเขาจะได้ (หรือเสีย) เป็นจำนวนเท่ากันโดยไม่ต้องคำนึงถึงการเลือกแถวตั้งของ Y ในเชิงพีชคณิตเราอาจแสดงข้อเท็จจริงดังกล่าวข้างต้นได้ ดังนี้ :

จำนวนที่ได้ที่คาดไว้ของ X

Y เล่นแถวตั้งที่ 1 $-6X_1 + 7X_2 \geq -19/14$

Y เล่นแถวตั้งที่ 2 $-1X_1 - 2X_2 \geq -19/14$

Y เล่นแถวตั้งที่ 3 $4X_1 - 5X_2 \geq -19/14$

X คาดว่าจะเสีย 19/14 คะแนนโดยไม่ต้องคำนึงถึงการเลือกของ Y เครื่องหมาย $\geq$ ชี้ให้เห็นว่า เขาอาจจะเสียน้อยกว่านี้ ถ้า Y เลือกกลยุทธ์ที่เลว

อสมการแรกข้างต้นชี้ให้เห็นว่า ถ้า X เล่นแถวนอนที่ 1 เป็นจำนวน X_1 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และเล่นแถวนอนที่ 2 เป็นจำนวน X_2 ของจำนวนครั้งทั้งหมด เขาจะเสียไม่เกิน 19/14 คะแนน (ค่าของเกม) ความจริงเขาอาจจะเสียน้อยกว่า 19/14 คะแนน ถ้า Y ไม่ใช้กลยุทธ์ที่ดี ดังนั้นเราจึงใช้เครื่องหมายอสมการ $\geq$ ถ้ากลยุทธ์ของ X ที่เราคำนวณได้ตามคำเฉลยของเกมย่อยที่ 1 (9/14, 5/14) เป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุดจริง จะต้องทำให้อสมการทั้งสามข้างต้นสมจริง เราจะลองทดสอบดูว่ากลยุทธ์ดังกล่าวทำให้อสมการทั้งสามสมจริงหรือไม่

$-6(9/14) + 7(5/14) \geq -19/14$	$-54/14 + 35/14 = -19/14$
$-1(9/14) - 2(5/14) \geq -19/14$	$-9/14 - 10/14 = -19/14$
$4(9/14) - 5(5/14) \geq -19/14$	$36/14 - 25/14 = 11/14$
	$11/14 \geq -19/14$

เนื่องจากอสมการทั้งสามสมจริงเมื่อมีการแทนค่าโดยกลยุทธ์ของ X กลยุทธ์ของ X จึงเป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุด จะสังเกตได้ว่าถ้า Y เล่นแถวตั้งที่ 3 X จะเสียน้อยกว่า –19/14 คะแนน นี้ชี้ให้เห็นว่าผู้เล่น Y ไม่ควรเล่นแถวตั้งที่ 3 ซึ่งก็เป็นการตัดสินใจที่เราทำไปแล้วโดยการกำหนดค่าศูนย์สำหรับการเล่นแถวตั้งที่ 3 ไว้ในคำเฉลยของเกมย่อยที่ 1

เราจะต้องทดสอบกลยุทธ์ของ Y เพื่อดูว่ากลยุทธ์สำหรับเกมย่อยที่ 1 เป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุดหรือไม่ พิจารณาจากเกมเดิม [สมการ (10–15)] อีกครั้งหนึ่ง สิ่งหนึ่งที่ควรแก่การจดจำก็คือ Y ได้เลือกกลยุทธ์ผสมของเขาในลักษณะที่ทำให้การคาดการณ์ของเขาจากแถวตั้งแต่ละแถวเท่ากันหมดโดยไม่ต้องคำนึงถึงการเลือกของฝ่ายตรงข้ามกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ Y ได้เลือกกลยุทธ์ของเขาในลักษณะที่ทำให้จำนวนที่ได้จากแถวตั้งแต่ละแถว อย่างน้อยที่สุดจะต้องเท่ากับค่าของเกม ในเชิงคณิตศาสตร์เราอาจแสดงข้อเท็จจริงดังกล่าวข้างต้นได้ดังนี้ :

จำนวนที่ได้ที่คาดไว้ของ Y

X เล่นแถวนอนที่ 1	$-6Y_1 - 1Y_2 + 4Y_3 \leq -19/14$	Y คาดว่าจะได้ 19/14 คะแนน โดย
X เล่นแถวนอนที่ 2	$7Y_1 - 2Y_2 + 5Y_3 \leq -19/14$	ไม่ต้องคำนึงถึงการเลือกของX เครื่องหมาย $\leq$ ชี้ให้เห็นว่า Y อาจจะได้มากกว่านี้ถ้า X เลือกกลยุทธ์ที่เลว

อสมการแรกข้างต้นชี้ให้เห็นว่าถ้า Y เล่นแถวตั้งที่ 1 เป็นจำนวน Y_1 ของจำนวนครั้งทั้งหมด แถวตั้งที่ 2 เป็นจำนวน Y_2 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และแถวตั้งที่ 3 เป็นจำนวน Y_3 ของจำนวนครั้งทั้งหมด เขาจะได้อย่างน้อยที่สุด 19/14 คะแนน เครื่องหมายอสมการ $\leq$ ชี้ให้เห็นว่าความจริง Y อาจได้มากกว่านี้ (ได้ค่าที่เป็นค่าลบมากกว่านี้) ถ้า X ไม่ใช้กลยุทธ์ที่ดี ดังนั้นถ้ากลยุทธ์ของ Y เป็นกลยุทธ์ที่ดี จะต้องทำให้อสมการทั้งสองข้างต้นสมจริง :

$- 6(1/14) - 1(13/14) + 4(0) \leq - 19/14 \qquad - 6/14 - 13/14 = - 19/14$

$7(1/14) - 2(13/14) - 5(0) \leq - 19/14 \qquad 7/14 - 26/14 = - 19/14$

ในเมื่อกลยุทธ์ของผู้เล่น Y ตามที่คำนวณได้ทำให้อสมการทั้งสองสมจริง กลยุทธ์ของ Y จึงเป็นกลยุทธ์ที่ดีที่สุด เราอาจหลีกเลี่ยงความยุ่งยากทั้งหมดนี้ได้โดยการเลือกเกมย่อยที่มีค่าสูงสุดสำหรับ Y แต่ถ้าไม่พิสูจน์ให้เห็นว่าการตัดสินใจของเราเป็นการตัดสินใจที่ดีที่สุด เราก็ยังไม่อาจเชื่อมั่นได้ว่า Y ได้ทำการเลือกอย่างถูกต้องแล้วที่ปฏิเสธการเล่นแถวตั้งที่ 3

ตัวอย่างการหาคำเฉลยให้กับเกมขนาด 2 × M หรือ M × 2 โดยวิธีเกมย่อยอีกตัวอย่างหนึ่งอาจช่วยให้เข้าใจวิธีนี้ดียิ่งขึ้น ในตัวอย่างนี้ ผู้เล่น X เป็นผู้ที่จะต้องเลือกเล่นแถวนอนสองแถว ต่อไปนี้เป็นเกมขนาด 3 × 2 เดิมพร้อมด้วยเกมย่อยของเกมเดิมและคำเฉลย :

$$\text{เกมเดิม} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad (10\text{—}16)$$

หลังจากที่ได้พิจารณาจนเป็นที่แน่ใจว่าในเกมเดิมนี้ไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง เราจึงดำเนินการแยกเกมนี้ออกเป็นเกมย่อย 3 เกม ดังนี้ :

เกมย่อยที่ 1	เกมย่อยที่ 2	เกมย่อยที่ 3
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
กลยุทธ์ X = (5/7, 2/7, 0)	กลยุทธ์ X = (9/11, 0, 2/11)	กลยุทธ์ X = (0, 1, 0)
กลยุทธ์ Y = (6/7, 1/7)	กลยุทธ์ Y = (7/11, 4/11)	กลยุทธ์ Y = (1, 0)
ค่า = 3 5/7	ค่า = 3 3/11	ค่า = 3 ↑ จุดดุลศูนย์ถ่วง

หลังจากที่ได้หากลยุทธ์และคำนวณค่าของเกมย่อยทั้ง 3 แล้ว เราจะสังเกตได้ว่าเกมที่ดีที่สุดของผู้เล่น X คือการเล่นแถวนอนที่ 1 และที่ 2 ของเกมเดิม และละแถวนอนที่ 3 กล่าวคือเป็นการเล่นเกมย่อยที่ 1 การเล่นตามเกมย่อยที่ 1 ทำให้เขาได้คะแนนมากที่สุดเท่าที่เขาจะทำได้

เพื่อให้เป็นที่มั่นใจว่าเกมย่อยที่ 1 เป็นเกมที่ดีที่สุด เราอาจตั้งอสมการขึ้นมาเช่นเดียวกับที่เราได้ทำไปแล้ว และทดสอบกลยุทธ์และค่าของเกมย่อยที่ 1 ในอสมการดังต่อไปนี้ :

$4X_1 + 3X_2 + 0X_3 \geq$ ค่าของเกม

$2X_1 + 8X_2 + 9X_3 \geq$ ค่าของเกม

$4Y_1 + 2Y_2 \leq$ ค่าของเกม

$3Y_1 + 8Y_2 \leq$ ค่าของเกม

$0Y_1 + 9Y_2 \leq$ ค่าของเกม

แทนค่ากลยุทธ์และค่าของเกมย่อยที่ 1 ในอสมการข้างต้น เราจะได้ :

$4(5/7) + 3(2/7) + 0(0) \geq 3\ 5/7$

$2(5/7 + 8(2/7) + 9(0) \geq 3\ 5/7$

$4(6/7) + 2(1/7) \leq 3\ 5/7$

$3(6/7) + 8(1/7) \leq 3\ 5/7$

$0(6/7) + 9(1/7) \leq 3\ 5/7$

ค่าทั้งหมดสำหรับกลยุทธ์และค่าของเกม ที่เราแทนเข้าไปทำให้อสมการทั้งห้าสมจริง จะสังเกตได้จากอสมการที่ 5 ว่า ถ้า X เล่นแถวนอนที่ 3 เขาคาดว่าจะได้เพียง 9/7 คะแนน ซึ่งน้อยกว่าค่าของเกมมาก เพราะฉะนั้นเขาจะเลี่ยงแถวนอนนั้นและพอใจที่จะใช้กลยุทธ์ผสมระหว่างแถวนอนที่หนึ่งและที่สองมากกว่า ซึ่งจะพิสูจน์ได้โดยค่า 0 ตามที่กำหนดไว้ในกลยุทธ์ของ X

วิธีการหาคำเฉลยของเกมขนาด 2 × M และ M × 2 โดยกราฟ

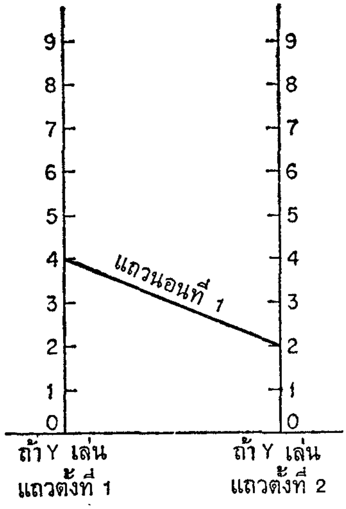
(Graphic solution method for 2 × M and M × 2 games)

เท่าที่ได้กล่าวมาแล้ว เราได้อธิบายวิธีการหาคำเฉลยของเกมขนาด 2 × M และ M × 2 สองวิธี กล่าวคือ จุดดุลศูนย์ถ่วงและวิธีเกมย่อย เราอาจลดขนาดของเกมชนิดนี้ได้โดยเขียนแทนด้วยกราฟซึ่งจะชี้ให้เราทราบว่าเกมย่อย 2 × 2 ใด เป็นเกมย่อยที่ดีที่สุดของผู้เล่นซึ่งเป็นผู้ที่จะต้องทำการเลือก นอกจากนี้ วิธีกราฟยังชี้ให้เห็นค่าของเกมที่ดีที่สุดนั้นอีกด้วย ข้อดีของวิธีนี้มีอยู่ว่า หลังจากพิจารณาแล้วว่าเกมขนาด 2 × 2 ทั้งสามหรือมากกว่านั้น เกมใดเป็นเกมที่ดีที่สุด เราก็สามารถที่จะกำหนดกลยุทธ์ให้กับเกมที่ดีที่สุดนั้นได้

ถ้าเราใช้เกมข้างล่างนี้เป็นตัวอย่างของเรา

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10\text{–}16)$$

จะเห็นได้ว่า ถ้าผู้เล่น X เลือกเล่นแถวนอนที่ 1 จำนวนที่ X ได้จะเท่ากับ 4 คะแนนหรือ 2 คะแนนแล้วแต่ว่าฝ่ายตรงข้ามจะเลือกแถวตั้งใด เราอาจแสดงข้อสังเกตนี้โดยเขียนเป็นกราฟแทนจำนวนที่ X ได้ หรือค่าตอบแทนของ X ดังปรากฏในรูป 10–1

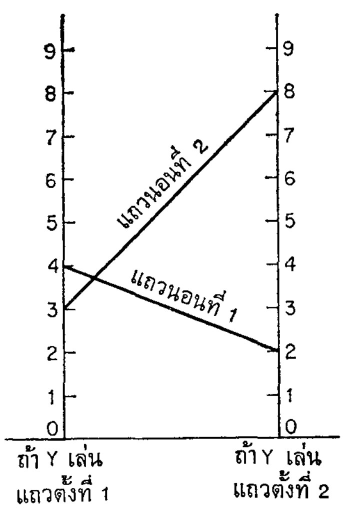


รูป 10–1 จำนวนที่ X ได้ถ้าเขาเล่นแถวนอนที่ 1

ในทำนองเดียวกัน ถ้า X เลือกเล่นแถวนอนที่ 2 จำนวนที่ X ได้จะเท่ากับ 3 คะแนน หรือ 8 คะแนนแล้วแต่ว่าฝ่ายตรงข้ามจะเลือกแถวตั้งใด เราได้เพิ่มข้อสังเกตนี้เข้ากับกราฟดังปรากฏในรูป 10—2

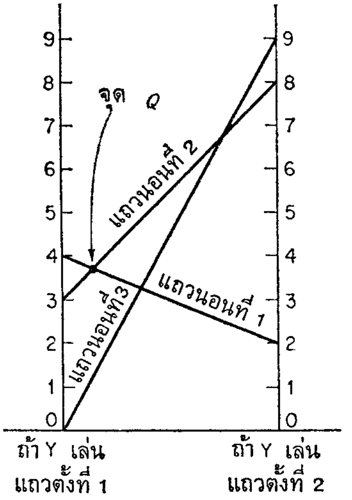
เราอาจเพิ่มเส้นที่สามซึ่งแทนจำนวนที่ X ได้ ถ้าเขาเลือกเล่นแถวนอนที่ 3 ดังปรากฏในรูป 10—3

ถ้าสังเกตกราฟของเกมที่ทำสำเร็จเรียบร้อยแล้ว ปรากฏว่าแถวนอนที่ 3 ให้โอกาสที่ดีที่สุดแก่ X เพราะเขาอาจจะได้ถึง 9 คะแนน แต่ Y อาจจะสับไปที่แถวตั้งที่ 1 ของเขาทันที การคาดหมายที่ว่า X จะได้ 9 คะแนนก็จะเปลี่ยนไปเป็นความจริงที่ว่า X ได้ค่าตอบแทนที่เท่ากับศูนย์



รูป 10—2 จำนวนที่ X ได้เพิ่มด้วยแถวนอนที่ 2

ในทางตรงกันข้าม ถ้า X เลือกกลยุทธ์ตามแถวนอนที่ 2 เขาอาจจะได้ค่าตอบแทนเป็นจำนวน 8 คะแนน โอกาสที่ X จะได้ค่าตอบแทนในจำนวนดังกล่าวย่อมมีอยู่แน่นอน แต่ถ้า Y เริ่มเล่นแถวตั้งที่ 1 จะทำให้ค่าตอบแทนที่เป็น 8 คะแนนเปลี่ยนมาเป็นค่าตอบแทนที่เท่ากับ 3 คะแนนทันที



รูป 10–3 **จำนวนที่ X ได้แถวนอนทั้งสามแถว และ Q ซึ่งเป็นค่าของเกม**

ถ้า X เลือกเล่นแถวนอนที่ 1 เขาจะได้ค่าตอบแทน 4 คะแนนต่อเมื่อ Y เล่นแถวตั้งที่ 1 เท่านั้น ถ้า Y เลือกเล่นแถวตั้งที่สองของเขา จำนวนที่ X ได้จะลดลงเหลือเพียง 2 คะแนนเท่านั้น

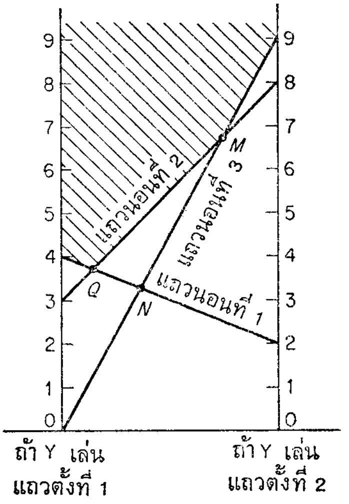
แต่ถ้า X เลือกเล่นกลยุทธ์ผสมระหว่างแถวนอนที่ 1 และแถวนอนที่ 2 เขามีความเชื่อมั่นว่า เขาจะได้ไม่น้อยกว่า 2 คะแนนและไม่เกิน 8 คะแนนไม่ว่าฝ่ายตรงข้ามจะเลือกกลยุทธ์ใดก็ตาม ความจริง ถ้า X เล่นอย่างเฉลียวฉลาด เขาสามารถทำให้จำนวนที่ได้เท่ากับค่าของเกม (3 5/7 คะแนน) อย่างแน่นอน ผู้เล่นทั้งสองอาจให้เหตุผลดังนี้ (อ้างอิงรูป 10—2)

> ถ้า X เริ่มเล่นแถวนอนที่ 1 โดยคาดหมายว่าจะได้ 4 คะแนน Y จะเล่นแถวตั้งที่ 2 เพื่อลดค่าตอบแทนของ X ให้เหลือ 2 คะแนน ทันทีที่ X สังเกตการเล่นของ Y ได้ เขาจะสับไปยังแถวนอนที่ 2 และได้ 8 คะแนน ตราบเท่าที่ Y ยังคงเล่นแถวตั้งที่ 2 ทันทีที่ผู้เล่น Y สับกลับไปยังแถวตั้งที่ 1 (โดยหวังว่า X จะยังคงอยู่กับแถวนอนที่ 2 และได้เพียง 3 คะแนนเท่านั้น) X จะสับไปยังแถวนอนที่ 1 และได้ 4 คะแนน

สำหรับผู้เล่น X การเล่นเกมนี้จึงเป็นการสับไปมาระหว่างแถวนอนที่ 1 และที่ 2 และรอบ ๆ จุดที่กำกับด้วย Q (ค่าของเกม) ในรูป 10—3 ถ้าผู้เล่น Y เลือกกลยุทธ์แถวตั้งของเขาอย่างระมัดระวัง (โดยใช้วิธีใดวิธีหนึ่งที่เราได้กล่าวไปแล้วข้างต้น) เขาสามารถที่จะดึงจำนวน

ที่ X ได้ให้เท่ากับค่าเฉลี่ยที่อยู่ระหว่าง 3 และ 4 คะแนน โดยการตอบโต้ความเคลื่อนไหวของ X ในทางกลับกัน ถ้า X เล่นแถวนอนที่ 1 โดยคาดว่าจะได้ 4 คะแนน Y จะเล่นแถวตั้งที่ 2 ถ้า X เล่นแถวนอนที่ 2 โดยคาดว่าจะได้ 8 คะแนน Y จะเล่นแถวตั้งที่ 1 เพื่อทำให้ X ได้เพียง 3 คะแนนเท่านั้น สัดส่วนของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ผู้เล่นแต่ละคนปันให้กับแถวนอนและแถวตั้งของตนอาจคำนวณได้โดยวิธีต่าง ๆ ตามที่เราได้กล่าวไปแล้ว ดังนั้น จุด Q ก็คือค่าของเกมนี้นั่นเอง เพราะเกมนี้จะหมุนไปรอบ ๆ ค่าตอบแทนโดยเฉลี่ยนี้

การเลือกกลยุทธ์ที่ดีที่สุดสองอย่างจากทางเลือกที่มีอยู่หลายทาง อาจกระทำได้โดยการสังเกตจุดตัดต่าง ๆ (เป็นต้นว่าจุด Q) ในรูป 10—4 จุดตัดที่ต่ำที่สุดของพื้นที่ที่แรเงาไว้เป็นจุดตัดของแถวนอนที่ดีที่สุดสองแถว ผู้เล่นที่มีทางเลือกระหว่างแถวนอนหลายแถวควรจะเล่นแถวนอนสองแถวนี้ ในกรณีนี้คือแถวนอนที่ 1 และ 2 จุดตัดที่ต่ำที่สุด (Q) มีความสำคัญมากในฐานะที่เป็นระดับที่ต่ำที่สุดที่ Y สามารถดึงจำนวนที่ X ได้ให้ลดลงมาสู่ระดับนี้ (และในขณะเดียวกันก็เป็นค่าตอบแทนสูงสุดที่ X สามารถคาดหมายได้) และเป็นระดับที่ฝ่ายตรงข้ามที่เฉลียวฉลาดคือ Y สามารถดึงจำนวนที่ X ได้ลงมาสู่จุดนี้ได้สำเร็จ



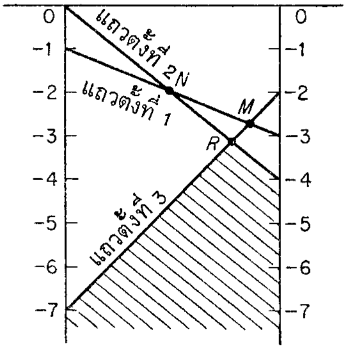
รูป 10–4 จำนวนที่ X ได้พร้อมด้วยจุดตัดสามจุด Q เป็นระดับต่ำสุดที่ Y สามารถดึงจำนวนที่ X ได้ เพราะฉะนั้น จุด Q จึงเป็นค่าตอบแทนสูงสุดที่ X สามารถคาดหมายไว้

วิธีกราฟนี้อาจนำไปใช้ในการเลือกเล่นแถวตั้งสองแถว สำหรับผู้เล่นที่ต้องเผชิญกับการเลือกระหว่างแถวตั้งหลายแถว เพื่อเป็นการอธิบายแนวความคิดนี้ เราจะพิจารณาเกม

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10\text{–}17)$$

หลังจากที่ได้พิจารณาจนเป็นที่แน่ใจว่าไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง เราจึงพิจารณาดูว่ากลยุทธ์ผสมที่ดีที่สุดของ Y ประกอบด้วยแถวตั้งสองแถวใด เราจะต้องเขียนแถวตั้งทั้งสามของ Y ก่อนเช่นกัน โดยใช้ตัวเลขที่มีค่าเป็นลบแทนค่าตอบแทนของ Y จากรูป 10—5 จุด R เป็นจุดตัดระหว่างแถวนอนที่ 2 และ 3 และเป็นจุดที่ชี้ให้เห็นว่า Y ควรจะเล่นกลยุทธ์ผสมระหว่างแถวตั้งสองแถวนี้ แทนที่จะเล่นแถวนอนอื่นใดสองแถว ถ้าเช่นนั้น เกมย่อยที่ดีที่สุด คือ

$$\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{กลยุทธ์ X} = (2/9,\ 7/9) \\ \text{กลยุทธ์ Y} = (0,\ 5/9,\ 4/9) \\ \text{ค่าของเกม} = -28/9 \end{array}$$



รูป 10–5 จำนวนที่ Y ได้ R คือค่าของเกม

จุด R เป็นจุดตัดสูงสุดของพื้นที่ที่แรเงาไว้ แนวความคิดเกี่ยวกับจุดตัดที่มีค่าเป็นลบที่น้อยที่สุดในกรณีนี้ชี้ให้เห็นว่าจุด R เป็นค่าของเกมสูงสุดที่ Y จะได้จาก X

ผู้อ่านคงจำได้ว่า แนวความคิดเกี่ยวกับจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด (จุดปลายสุด) ได้รับการพัฒนาขึ้นมาเป็นครั้งแรกในตอนที่เราศึกษาเรื่องการโปรแกรมแบบเส้นตรง โดยวิธีกราฟ แนวความคิดดังกล่าวเหมือนกับแนวความคิดที่นำมาปรับใช้กับทฤษฎีเกมทุกประการ ความจริงเส้นที่แทนกลยุทธ์คือข้อยับยั้งในการเล่นเกม ดังนั้นการหาคำเฉลยจึงเป็นการพิจารณาดูว่าผู้เล่นคนหนึ่งคนใดสามารถไปได้ไกลเท่าใด ก่อนที่เขาจะถูกยับยั้งโดยกลยุทธ์ตอบโต้ของอีกฝ่ายหนึ่ง

เกมขนาด 3 × 3 และที่ใหญ่กว่า
(3 × 3 And Larger Games)

ในการหาคำเฉลยของเกมขนาด 3 × 3 และที่ใหญ่กว่า ขั้นแรกเราจะต้องหาจุดดุลศูนย์ถ่วงก่อนเช่นเดียวกับเกมที่มีขนาดเล็กกว่า เพราะถ้ามีจุดดุลศูนย์ถ่วงก็ไม่ต้องใช้วิธีการ

หาคำเฉลยที่ยุ่งยากกว่านี้ ตัวอย่างเช่นในเกมต่อไปนี้ มีจุดดุลศูนย์ถ่วงและเป็นคำเฉลยสำหรับกลยุทธ์ที่ดีที่สุดและเป็นค่าของเกมด้วย

$$\begin{pmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{10} & \mathbf{9} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lll} \text{กลยุทธ์ } X & = & (1, 0, 0) \\ \text{กลยุทธ์ } Y & = & (0, 0, 1) \\ \text{ค่า} & = & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{จุดดุลศูนย์ถ่วง}}}{9} \end{array} \qquad (10-18)$$

ถ้าไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง เราอาจจะใช้วิธีการครอบครองเพื่อพิจารณาดูว่าเราสามารถลดขนาดของเกมเดิมลงหรือไม่ โดยตัดแถวนอนหรือแถวตั้ง เพื่อทำให้เป็นเกมที่มีขนาดเล็กลงจนอาจคำนวณหาคำเฉลยโดยวิธีใดวิธีหนึ่ง เป็นต้นว่าวิธีเลขคณิต ในเกมข้างล่างนี้ เราสามารถลดขนาดของเกมได้โดยการครอบครอง

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & -4 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Y จะไม่เล่นแถวตั้งที่ 1 เพราะแถวตั้งนี้ทำให้ผู้เล่น X เป็นฝ่ายได้ตลอดเวลา (10–19)

ดังนั้น เราจึงลดขนาดของเกมลงเป็น

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -3 & -5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

X จะไม่ยอมเล่นแถวนอนที่ 3 เลย เพราะจะทำให้เขาต้องเสียมากกว่าการเล่นแถวนอนที่ 2 ตลอดเวลา

เราจึงลดขนาดของเกมได้ต่อไป เป็น

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{lll} \text{กลยุทธ์ } X & = & (2/11, 9/11, 0) \\ \text{กลยุทธ์ } Y & = & (0, 7/11, 4/11) \\ \text{ค่า} & = & -41/11 \end{array}$$

ถ้าไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง และไม่สามารถลดขนาดของเกมเดิมให้เป็นเกมที่มีขนาดเล็กลงโดยการครอบครอง การหาคำเฉลยที่ดีที่สุดสำหรับเกมที่มีขนาดใหญ่ คือการโปรแกรมแบบเส้นตรง ตัวอย่างเช่น เกมข้างล่างนี้ไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วงและการครอบครองก็ไม่สามารถลด

ขนาดของเกมให้เล็กลงจนเหลือขนาดที่เราอาจหากลยุทธ์และค่าของเกมตามวิธีใดวิธีหนึ่งที่ได้กล่าวไปแล้ว

$$\begin{array}{c} \\ X^1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (10\text{—}20)$$

จากคำอธิบายเกี่ยวกับเกมขนาด 2 × M และ M × 2 ที่เราได้กล่าวไปแล้ว (ดูตอนที่ว่าด้วยการหาคำเฉลยโดยวิธีเกมย่อย) เราอาจเขียนอสมการแสดงการคาดหมายของผู้เล่น Y ได้ดังนี้ :

$$\begin{aligned} 3Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 &\leq V \\ 2Y_1 + 3Y_2 + 4Y_3 &\leq V \qquad (V = \text{ค่าของเกม}) \qquad (10\text{—}21) \\ 5Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 &\leq V \end{aligned}$$

อัตราส่วนของจำนวนครั้งทั้งหมดที่ใช้ไปในการเล่นแถวตั้งทั้งสามรวมกันเข้า จะต้องเท่ากับหนึ่งเสมอ เพราะฉะนั้น :

$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1 \qquad (10\text{—}22)$$

เพื่อไม่ให้ค่าของ V ปรากฏอยู่ทางด้านขวามือของอสมการทั้งสาม เราอาจหารค่าทั้งหมดด้วย V

$$\begin{aligned} \frac{3Y_1}{V} + \frac{2Y_2}{V} + \frac{3Y_3}{V} &\leq 1 \\ \frac{2Y_1}{V} + \frac{3Y_2}{V} + \frac{4Y_3}{V} &\leq 1 \qquad (10\text{—}23) \\ \frac{5Y_1}{V} + \frac{4Y_2}{V} + \frac{2Y_3}{V} &\leq 1 \end{aligned}$$

เพื่อไม่ให้ V ปรากฏเป็นตัวส่วนของค่า Y ต่าง ๆ ข้างต้น เราจะนิยามตัวแปรผัน Y เสียใหม่ดังนี้

$$\bar{Y} = \frac{Y}{V} \qquad (10\text{—}24)$$

และเฉลยเกมนี้โดยใช้ค่า $\bar{Y}$ แทนที่จะเป็น Y หลังจากที่ได้ค่าของ $\bar{Y}$ แล้ว เราจึงคูณค่าของ $\bar{Y}$ ด้วย V เพื่อที่จะได้ค่าของ Y เดิม (ในเมื่อ $\bar{Y} = Y/V$ เพราะฉะนั้น $Y = \bar{Y} \times V$ นี่เป็นเพียงการเล่นกลทางคณิตศาสตร์เล็ก ๆ น้อย ๆ ที่อาจนำมาใช้ประโยชน์ได้เท่านั้น)

ถ้าเช่นนั้น อสมการทั้งสามจะกลายมาเป็น

$$\begin{aligned} 3\overline{Y}_1 + 2\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 &\leq 1 \\ 2\overline{Y}_1 + 3\overline{Y}_2 + 4\overline{Y}_3 &\leq 1 \\ 5\overline{Y}_1 + 4\overline{Y}_2 + 2\overline{Y}_3 &\leq 1 \end{aligned} \qquad (10\text{–}25)$$

เพื่อให้สมการอีกสมการหนึ่ง [$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$ สมการ (10–22)] อยู่ในรูปของ $\overline{Y}$ เหมือน ๆ กัน เราหารทุกค่าด้วย V ดังนี้ :

$$\frac{Y1}{V} + \frac{Y2}{V} + \frac{Y3}{V} = \frac{1}{V} \qquad (10\text{–}26)$$

และให้ $\overline{Y} = Y/V$ อีกครั้งหนึ่งเช่นเดียวกับที่เราทำไปแล้วข้างต้น สมการนี้จะกลายมาเป็น

$$\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 = \frac{1}{V} \qquad (10\text{–}27)$$

ถ้าเขียนข้อจำกัดทั้งสี่อีกครั้งหนึ่ง เราจะได้

$$\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 = \frac{1}{V} \qquad (10\text{–}27)$$

$$\begin{aligned} 3\overline{Y}_1 + 2\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 &\leq 1 \\ 2\overline{Y}_1 + 3\overline{Y}_2 + 4\overline{Y}_3 &\leq 1 \\ 5\overline{Y}_1 + 4\overline{Y}_2 + 2\overline{Y}_3 &\leq 1 \end{aligned} \qquad (10\text{–}25)$$

จุดมุ่งหมายของ Y คือทำให้ค่าของเกม V อยู่ในระดับต่ำสุด ซึ่งมีผลเท่ากับว่าทำให้ 1/V อยู่ในระดับสูงสุด เราอาจเขียนปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรงเพื่อหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ Y โดยบวกตัวแปรผันที่ขาดไปเข้าไปในอสมการแต่ละอสมการ ดังนี้ :

ทำให้ $\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3$ อยู่ในระดับสูงสุด

โดยขึ้นอยู่กับ

$$\begin{aligned} 3\overline{Y}_1 + 2\overline{Y}_2 + 3\overline{Y}_3 + \overline{Y}_4 + 0\overline{Y}_5 + 0\overline{Y}_6 &= 1 \\ 2\overline{Y}_1 + 3\overline{Y}_2 + 4\overline{Y}_3 + 0\overline{Y}_4 + \overline{Y}_5 + 0\overline{Y}_6 &= 1 \\ 5\overline{Y}_1 + 4\overline{Y}_2 + 2\overline{Y}_3 + 0\overline{Y}_4 + 0\overline{Y}_5 + \overline{Y}_6 &= 1 \end{aligned} \qquad (10\text{–}28)$$

เพื่อเป็นการฝึกฝนเท่านั้น เราจะลองหากลยุทธ์ของ Y โดยใช้วิธีซิมเพล็กซ์ เนื่องจากว่าเราได้กล่าวถึงวิธีซิมเพล็กซ์อย่างละเอียดแล้วในบทที่ 9 เพราะฉะนั้นเราจะละคำอธิบายและแสดงเฉพาะตาราง 3 ตารางที่จำเป็นต่อการหากลยุทธ์ของ Y ในตาราง 10–4 เนื่องจาก $C_j - Z_j$ ในตารางที่สามมีค่าเป็นศูนย์ หรือมีค่าเป็นลบแสดงว่าไม่มีคำเฉลยที่ดีกว่านี้ เราจึงไม่ต้องคำนวณต่อไป และกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ $\overline{Y}$ คือ

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{Y}_3 &= 3/16 \\ \overline{Y}_1 &= 1/8 \end{aligned}}$$

($\overline{Y}_4$ เป็นตัวแปรผันเชิงสุ่มและไม่มีความหมายที่แท้จริงแต่อย่างใด)

ตาราง 10—4

วิธีซิมเพล็กซ์สำหรับกลยุทธ์ของ Y								
C_j	ส่วนผสม	ปริมาณ (กลยุทธ์แถวตั้ง)	1 $\overline{Y}_1$	1 $\overline{Y}_2$	1 $\overline{Y}_3$	0 $\overline{Y}_4$	0 $\overline{Y}_5$	0 $\overline{Y}_6$
0	$\overline{Y}_4$	1	3	2	3	1	0	0
0	$\overline{Y}_5$	1	2	3	4	0	1	0
0	$\overline{Y}_6$	1	5	4	2	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0
	C_j-Z_j		1	1	1	0	0	0

↑
แถวตั้งที่ดีที่สุด

[จะสังเกตได้ว่าในชั้นนี้ค่าของแถวนอน C_j-Z_j เป็นตัวเลขที่เท่ากัน (คือ 1=1=1) เราจึงลองเริ่มด้วยแถวตั้งที่อยู่ใกล้แถวตั้งปริมาณที่สุดก่อน]

0	$\overline{Y}_4$	2/5	0	−2/5	9/5	1	0	−3/5
0	$\overline{Y}_5$	3/5	0	7/5	16/5	0	1	−2/5
1	$\overline{Y}_1$	1/5	1	4/5	2/5	0	0	1/5
	Z_j	1/5	1	4/5	2/5	0	0	1/5
	C_j-Z_j		0	1/5	3/5	0	0	−1/5

↑
แถวตั้งที่ดีที่สุด

0	$\overline{Y}_4$	1/16	0	−19/16	0	1	9/16	−3/8
1	$\overline{Y}_3$	3/16	0	7/16	1	0	5/16	−1/8
1	$\overline{Y}_1$	1/8	1	5/8	0	0	−1/8	1/4
	Z_j	5/16	1	17/16	1	0	3/16	1/8
	C_j-Z_j		0	−1/16	0	0	−3/16	−1/8

เราจะเปลี่ยน $\bar{Y}_3$ และ $\bar{Y}_1$ กลับไปเป็นกลยุทธ์แถวตั้ง Y ที่แท้จริงได้อย่างไร ? โดยการคูณค่าทั้งสองด้วย V [ดูสมการ (10–24)] V คืออะไร ? เราได้ทำให้ 1/V อยู่ในระดับสูงสุดและปรากฏว่าเท่ากับ 5/16 (แถวนอน Z_j ใต้แถวตั้งปริมาณ) ถ้า 1/V = 5/16 เพราะฉะนั้น V = 16/5

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \bar{Y}_1 \times V \\
&= 1/8 \times 16/5 \\
&= 16/40 \\
&= 2/5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_3 &= \bar{Y}_3 \times V \\
&= 3/16 \times 16/5 \\
&= 3/5
\end{aligned}
$$

ไม่เล่น Y_2

ต่อไปกลยุทธ์แถวนอนของ X จะเป็นอย่างไร ? เราอาจตั้งอสมการแทนการคาดหมายของ X เช่นเดียวกับที่เราทำไปแล้ว ดังนี้ :

$$
\begin{aligned}
3X_1 + 2X_2 + 5X_3 &\geq V \\
2X_1 + 3X_2 + 4X_3 &\geq V \qquad (10\text{–}29) \\
3X_1 + 4X_2 + 2X_3 &\geq V
\end{aligned}
$$

และแน่ละ $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ (10–30)

หารด้วย V ตลอด เราจะได้ค่าของ $\bar{X}$ ดังนี้ :

$$
\begin{aligned}
3\bar{X}_1 + 2\bar{X}_2 + 5\bar{X}_3 &\geq 1 \\
2\bar{X}_1 + 3\bar{X}_2 + 4\bar{X}_3 &\geq 1 \qquad (10\text{–}31) \\
3\bar{X}_1 + 4\bar{X}_2 + 2\bar{X}_3 &\geq 1
\end{aligned}
$$

$\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3 = \frac{1}{V}$ [ดู (10–26), (10–27)]

ผู้เล่น X ประสงค์ที่จะทำให้ V อยู่ในระดับสูงสุดซึ่งมีผลเท่ากับว่าทำให้ 1/V อยู่ในระดับต่ำสุด ดังนั้นปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรงของเราจะกลายมาเป็น

ทำให้ $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3$ อยู่ในระดับต่ำสุด

โดยขึ้นอยู่กับ :

$$
\begin{aligned}
3\bar{X}_1 + 2\bar{X}_2 + 5\bar{X}_3 &\geq 1 \\
2\bar{X}_1 + 3\bar{X}_2 + 4\bar{X}_3 &\geq 1 \qquad (10\text{–}32) \\
3\bar{X}_1 + 4\bar{X}_2 + 2\bar{X}_3 &\geq 1
\end{aligned}
$$

เมื่อบวกเพิ่มด้วยตัวแปรผันที่ขาดไปและตัวแปรผันเทียม ปัญหาในรูปสุดท้ายจะเป็นดังนี้:

ทำให้ $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{X}_3$ อยู่ในระดับต่ำสุด

โดยขึ้นอยู่กับ:

$$
\begin{aligned}
3\bar{X}_1 + 2\bar{X}_2 + 5\bar{X}_3 - \bar{X}_4 + 0\bar{X}_5 + 0\bar{X}_6 + 0\bar{X}_7 + \bar{X}_8 + 0\bar{X}_9 &= 1 \\
2\bar{X}_1 + 3\bar{X}_2 + 4\bar{X}_3 + 0\bar{X}_4 - \bar{X}_5 + 0\bar{X}_6 + 0\bar{X}_7 + \bar{X}_8 + 0\bar{X}_9 &= 1 \\
3\bar{X}_1 + 4\bar{X}_2 + 2\bar{X}_3 + 0\bar{X}_4 + 0\bar{X}_5 - \bar{X}_6 + 0\bar{X}_7 + 0\bar{X}_8 + \bar{X}_9 &= 1
\end{aligned}
\tag{10–33}
$$

ในที่นี้ $\bar{X}_4$, $\bar{X}_5$ และ $\bar{X}_6$ คือตัวแปรผันที่ขาดไป
$\bar{X}_7$, $\bar{X}_8$ และ $\bar{X}_9$ คือตัวแปรผันเทียม

คำเฉลยของปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรงปัญหานี้คือ $\bar{X}_2 = 3/16$, $\bar{X}_3 = 1/8$, $\bar{X}_1 = 0$ ในเมื่อ $\bar{X} = X/V$ เพราะฉะนั้น $X = (\bar{X})\ (V)$ กลยุทธ์ของ X คือ

$$
\begin{aligned}
X_2 &= \bar{X}_2 \times 16/5 \\
&= 3/16 \times 16/5 \\
&= 3/5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_3 &= \bar{X}_3 \times 16/5 \\
&= 1/8 \times 16/5 \\
&= 2/5
\end{aligned}
$$

ถ้าท่านรู้สึกว่าวิธีการเช่นนี้สิ้นเปลืองเวลาและเป็นงานหนัก เราอาจจะใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีอยู่ในการหาคำเฉลยให้กับปัญหาการโปรแกรมแบบเส้นตรง ซึ่งเป็นเรื่องที่จะต้องใช้เวลาไม่กี่นาทีหลังจากที่ได้โปรแกรมข้อมูลที่เกี่ยวข้องเข้าไปในเครื่องจักรแล้ว

เราอาจจะใช้การโปรแกรมแบบเส้นตรงในการหาคำเฉลยของเกมที่มีขนาดใด ๆ ก็ได้ แต่สำหรับเกมที่มีขนาดเล็กกว่า 3 × 3 การใช้วิธีอื่นวิธีใดวิธีหนึ่งที่เราได้กล่าวไปแล้ว จะเป็นการง่ายกว่า สำหรับเกมที่มีขนาดใหญ่มากที่ไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง และไม่สามารถลดขนาดของเกมลงได้โดยการครอบครอง การโปรแกรมแบบเส้นตรงเป็นวิธีหาคำเฉลยที่ใช้ได้ดีที่สุด

การใช้ประโยชน์ทฤษฎีเกมทางด้านฝ่ายจัดการ
(Management Uses of the Theory of Games)

ในตอนต้นของบทนี้เราได้กล่าวไว้ว่า คำว่า "เกม" โดยทั่วไปหมายถึงสถานการณ์แห่งการขัดแย้ง ซึ่งผู้ที่เข้าร่วมต่างก็ใช้เทคนิคที่มีเหตุผลในการกำหนดกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของตน ดังนั้น เกมจึงช่วยทำให้เราเรียนรู้ขบวนการให้เหตุผลตามหลักตรรกวิทยาได้เป็นอย่างดี แต่การนำไปใช้ในการตัดสินใจของฝ่ายจัดการยังอยู่ในขอบเขตจำกัดมาก งานที่ยุ่งยากที่สุดมิใช่

อยู่ที่การหาคำเฉลยของเกม เพราะเราได้อธิบายอย่างพอเพียงถึงวิธีที่จะนำไปใช้กับเกมระหว่างบุคคลสองคนที่มีผลรวมเท่ากับศูนย์ที่มีขนาดใหญ่พอสมควรแล้ว แต่อยู่ที่ว่าเราไม่สามารถนำเอาค่าต่าง ๆ มาบรรจุไว้ในเมตริกซ์ค่าตอบแทนได้อย่างถูกต้อง

ตัวอย่างเช่น ไม่เป็นการยากแต่อย่างใดที่จะกำหนดลงไปว่าผลลัพธ์อย่างหนึ่งดีกว่าผลลัพธ์อีกอย่างหนึ่ง แต่การที่จะระบุออกมาเป็นค่าทางตัวเลขว่า ผลลัพธ์นั้นมีคุณค่ากว่าเป็นจำนวนเท่าใดนั้นเป็นสิ่งที่ทำได้ยาก เมื่อสถานการณ์แห่งการขัดแย้งเป็นเรื่องที่เกี่ยวกับการตัดสินใจของฝ่ายจัดการ การคำนวณค่าตอบแทนออกมาเป็นบาทเป็นสตางค์อย่างถูกต้องโดยทั่วไปเป็นเรื่องที่เป็นไปไม่ได้ แต่นี่มิได้หมายความว่าเราไม่สามารถใช้ทฤษฎีเกมให้เป็นประโยชน์ แม้ว่าผู้ที่เข้าร่วมคนใดคนหนึ่ง อาจจะไม่สามารถระบุว่าผลลัพธ์จากส่วนผสมของกลยุทธ์ที่อาจเป็นไปได้แต่ละกลยุทธ์ออกมาในรูปของตัวเงินได้อย่างถูกต้องก็ตาม แต่โดยทั่วไปเขาสามารถจัดเรียงลำดับของค่าตอบแทนจากดีที่สุดถึงเลวที่สุด

เราอาจอธิบายความคิดในเรื่องค่าตอบแทนในรูปตัวเงิน เมื่อเปรียบเทียบกับค่าตอบแทนตามลำดับ โดยอาศัยตัวอย่างต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กรณีค่าตอบแทนที่จัดเรียงตามลำดับความพอใจอาจอธิบายได้โดยอาศัยตัวอย่างการตลาดต่อไปนี้ : บริษัทคู่แข่งสองแห่งคือ A และ B ต่างต้องเตรียมการแสดงสินค้าเพื่อนำเสนอผลิตภัณฑ์อย่างหนึ่งในซุปเปอร์มาร์เกตสัปดาห์ละครั้งในตอนเริ่มสัปดาห์ หลังจากที่ได้ดำเนินการจัดวางการแสดงสินค้าแล้วก็ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงตลอดสัปดาห์นั้น

บริษัท A มีผลิตภัณฑ์อยู่ 3 อย่างคือ 1, 2 และ 3 ที่อาจนำไปแสดงแข่งขันกับผลิตภัณฑ์ของบริษัท B คือ 4, 5 และ 6 ผู้จัดการฝ่ายส่งเสริมได้สังเกตมาชั่วระยะเวลาหนึ่งว่าผลสุทธิทางด้านการส่งเสริมที่ได้รับจากทางเลือกแต่ละทางของเขา ปรากฏดังนี้ :

		B จัดแสดง		
		4	5	6
A จัดแสดง	1	ดี	พอใช้	พอใช้
	2	พอใช้	ดี	เลว
	3	เลว	พอใช้	ดี

ถ้าเราให้ผลทางด้านการส่งเสริม "เลว" มีค่าเท่ากับ 1 คะแนน สำหรับ A "พอใช้" มีค่าเท่ากับ 2 คะแนน และ "ดี" มีค่าเท่ากับ 3 คะแนน เมตริกซ์ค่าตอบแทนสำหรับสภาพการณ์ข้างต้น จะกลายมาเป็น

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & B & \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \\
A \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

ในขั้นแรกเราต้องทดสอบหาจุดดุลศูนย์ถ่วงก่อน ปรากฏว่าไม่มีจุดดุลศูนย์ถ่วง และในขณะเดียวกันเราก็สามารถพิสูจน์ต่อไปว่า การครอบครองก็ไม่อาจนำมาใช้ในการลดขนาดของเกมนี้ ถ้าเช่นนั้น บริษัท A ต้องคำนวณกลยุทธ์ผสมสำหรับแถวนอนของเขา กลยุทธ์ผสมที่ดีที่สุดของ A คือ: ควรจัดแสดงผลิตภัณฑ์ 1 1/2 ของจำนวนครั้งทั้งหมด ผลิตภัณฑ์ 2 1/6 ของจำนวนครั้งทั้งหมด และผลิตภัณฑ์ 3 1/2 ของจำนวนครั้งทั้งหมด ค่าของเกมในตัวอย่างนี้แทนผลทางด้านการส่งเสริมโดยถัวเฉลี่ยที่ A ได้รับ ค่าของเกมในกรณีนี้เท่ากับ 13/6 คะแนนซึ่งแทนผลทางด้านการส่งเสริมที่อยู่ระหว่าง พอใช้ กับดี

ตัวอย่างที่ 2 ตัวอย่างสำหรับสถานการณ์ที่อาจคำนวณมูลค่าที่เป็นตัวเงินที่ถูกต้องแน่นอนกว่า และถือเป็นค่าตอบแทนได้มาจากวิชาการเงินหรือถ้าจะกล่าวให้ถูกต้องกว่านั้น คือ การจัดการทางด้านการลงทุน สมมติว่าผู้ลงทุนคนหนึ่งมีเงินอยู่จำนวนหนึ่ง (สมมติว่า 1,000 บาท) และประสงค์ที่จะนำเงินนี้ไปลงทุนในระหว่างทางเลือก 3 ทาง คือ หุ้นสามัญ หุ้นกู้อุตสาหกรรม และเงินฝากออมทรัพย์ ผู้ลงทุนทราบค่าตอบแทนในรูปของ (ก) การงอกเงยในเงินทุน และ (ข) ผลตอบแทนต่อเงินทุนสำหรับการลงทุนแต่ละอย่างภายใต้สภาวะทางเศรษฐกิจแต่ละอย่างที่อาจเกิดขึ้น กล่าวคือ ฝืดเคือง ขยายตัว และคงที่ สมมติต่อไปว่าผู้ลงทุนจะต้องทำการเลือกระหว่างการลงทุนทั้งสามประเภทล่วงหน้าเป็นระยะเวลา 1 ปี

ภายใต้สภาวการณ์ข้างต้น เราจะสมมติต่อไปว่าการคาดหมายของเขาเกี่ยวกับรายได้สุทธิจากการลงทุน 1,000 บาท สำหรับระยะเวลา 1 ปี ปรากฏในรูปเมตริกซ์ดังต่อไปนี้ :

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccc} \textbf{ฝืดเคือง} & \textbf{ขยายตัว} & \textbf{คงที่} \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{หุ้นสามัญ} \\ \text{หุ้นกู้อุตสาหกรรม} \\ \text{เงินฝากออมทรัพย์} \end{array} & \begin{pmatrix} -150 \text{ บาท} & 100 \text{ บาท} & 50 \text{ บาท} \\ 40 \text{ บาท} & 80 \text{ บาท} & 50 \text{ บาท} \\ 65 \text{ บาท} & 50 \text{ บาท} & 60 \text{ บาท} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

เราอาจหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดของผู้ลงทุนจากเกมขนาด 3×3 นี้ ปรากฏว่า กลยุทธ์ที่ดีที่สุดคือ หุ้นสามัญ .007 หุ้นกู้อุตสาหกรรม .240 เงินฝากออมทรัพย์ .753 ดังนั้นถ้าเมตริกซ์ข้างต้นนี้แทนการคาดหมายของผู้ลงทุนคนนั้น และเขาจะต้องทำการตัดสินใจเกี่ยวกับการลงทุนเป็นการล่วงหน้าหนึ่งปี การแบ่งเงินลงทุนจำนวน 1,000 บาทที่ดีที่สุดก็คือการลงทุนในในหุ้นสามัญ 7 บาท หุ้นกู้อุตสาหกรรม 240 บาท และในเงินฝากออมทรัพย์ 753 บาท แต่

อย่างไรก็ดี ถ้าเขามีเหตุผลบางอย่างพอที่จะเชื่อได้ว่าตลาดกำลังมุ่งไปในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง การตัดสินใจของเขาก็จะสะท้อนให้เห็นการคาดคะเนล่วงหน้าของเขาด้วย ถ้าเขาคิดว่าเหตุการณ์ในตลาดจะเป็นไปในลักษณะเชิงสุ่มและขึ้น ๆ ลง ๆ ในระหว่างปีที่จะมาถึง กลยุทธ์ที่ดีที่สุดก็คือกลยุทธ์ที่เราได้คำนวณข้างต้น ค่าของเกมคือ 57.55 บาทซึ่งเท่ากับผลตอบแทนจากการลงทุน 5.75%

สรุป

ทฤษฎีเกมมิใช่ยาวิเศษที่จะใช้แก้โรคปวดศีรษะของฝ่ายจัดการ ในขณะนี้ไม่มีใครสามารถบอกได้ล่วงหน้าถึงการใช้ประโยชน์จากทฤษฎีเกม และโอกาสที่จะขยับขยายต่อไปในอนาคต แต่ไม่เป็นที่น่าสงสัยเลยว่า ทฤษฎีเกมเป็นการฝึกหัดและฝึกฝนให้ความคิดของบุคคลคนหนึ่งหลักแหลมยิ่งขึ้นในการจัดการกับปัญหาต่าง ๆ ภายใต้ความไม่แน่นอน เทคนิคอื่น ๆ บางอย่าง (เช่น การโปรแกรมแบบเส้นตรงและทฤษฎีของคงคลัง) ตั้งข้อสมมติเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อมในทางที่ดี แต่ทฤษฎีเกมทำให้ผู้เล่นต้องใช้สติปัญญาเข้าต่อสู้กับฝ่ายตรงกันข้ามที่กระตือรือร้นกับคนที่เป็นนักวางกลยุทธ์ที่ก้าวร้าวและเป็นปรปักษ์ สภาพการณ์เช่นนี้ย่อมใกล้เคียงกับประสบการณ์ทางธุรกิจใกล้เคียงมาก จนกระทั่งเราต้องยอมรับทฤษฎีเกมเข้ามาไว้ในหนังสือเรียนที่มีลักษณะเช่นหนังสือเล่มนี้

แบบฝึกหัด

10–1 จงหาค่าของเกมต่อไปนี้ :

ก. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ข. $\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 5 & 6 & -7 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

10–2 จงกำหนดกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ X และ Y โดยวิธีเลขคณิต

ก. $\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$ ข. $\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$

10–3 จงกำหนดกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ X โดยวิธีพีชคณิต

$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$

10–4 จงกำหนดกลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ X และ Y และคำนวณค่าของเกมโดยวิธีพีชคณิตเมตริกซ์

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

10–5 จงกำหนดกลยุทธ์ของเกมต่อไปนี้โดยวิธีเลขคณิต และใช้วิธีความน่าจะเป็นร่วมคำนวณค่าของเกม

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

10–6 จงลดเกมต่อไปนี้โดยการครอบครองและแสดงเกมที่เหลือ

ก. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ข. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ค. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

10–7 จงหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดและค่าของเกมต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

10–8 จงหากลยุทธ์ที่ดีที่สุดและค่าของเกมต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \begin{array}{cc} Y_1 & Y_2 \end{array} \\ X & \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

10–9 จากเกมในข้อ 10–8 จงแสดงให้เห็นว่ากลยุทธ์ที่ดีที่สุดเป็นไปตามอสมการของเกม

10–10 จงคำนวณจำนวนถัวเฉลี่ยที่ X ได้โดยวิธีกราฟ

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

บทที่ 11

การวิเคราะห์มาร์คอฟ
(MARKOV ANALYSIS)

ขบวนมาร์คอฟ (Markov process) คือวิธีวิเคราะห์ความเคลื่อนไหวปัจจุบันของตัวแปรผันใดตัวแปรผันหนึ่ง เพื่อคาดคะเนล่วงหน้าความเคลื่อนไหวในอนาคตของตัวแปรผันนั้น นักคณิตศาสตร์ชาวรุสเซียชื่อ เอ มาร์คอฟ (A. Markov) ได้พัฒนาวิธีการนี้เมื่อต้นศตวรรษนี้ ในตอนแรก เขาได้ใช้วิธีการนี้ในการอธิบายและคาดคะเนล่วงหน้าเกี่ยวกับพฤติกรรมของอนุภาคของก๊าซภายในภาชนะที่ปกปิด เมื่อไม่กี่ปีมานี้จึงได้มีผู้นำขบวนมาร์คอฟมาใช้ในฐานะที่เป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งของฝ่ายจัดการ ส่วนมากใช้ในฐานะเป็นเครื่องมือทางการตลาดที่ช่วยในการพิจารณาและคาดคะเนล่วงหน้าถึงพฤติกรรมของผู้บริโภค เกี่ยวกับความจงรักภักดีของผู้บริโภคในตราสินค้า และการสับจากตราสินค้าอย่างหนึ่งไปสู่ตราสินค้าอีกอย่างหนึ่ง

การนำขบวนมาร์คอฟมาใช้ประโยชน์อย่างเต็มที่ทางด้านฝ่ายจัดการจำเป็นจะต้องอาศัยพื้นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งมาก แต่อย่างไรก็ดี เราอาจแสดงการใช้ประโยชน์เทคนิคนี้กับปัญหาของฝ่ายจัดการโดยเฉพาะปัญหาการตลาดโดยอาศัยสิ่งที่เราเรียนรู้จากบทที่ 7 ว่าด้วยพีชคณิตเมตริกซ์

เราอาจแสดงการใช้ประโยชน์ขบวนมาร์คอฟขั้นมูลฐาน โดยพิจารณาจากปัญหาง่าย ๆ ดังนี้ สมมติว่าในเมือง ๆ หนึ่งมีผู้ผลิตนม 3 รายคือ A, B และ C และผู้ผลิตนมทั้งสามนี้จัดจำหน่ายนมทั้งหมดที่บริโภคในเมืองนั้น ผู้ผลิตนมทั้งสามต่างทราบดีว่าผู้บริโภคสับจากผู้ผลิตนมรายหนึ่งไปยังอีกรายหนึ่งอยู่เรื่อย ๆ อันเป็นผลจากการโฆษณา ความไม่พอใจในบริการและเหตุผลอื่น ๆ ถ้าผู้ผลิตนมทั้งสามต่างทำการบันทึกเกี่ยวกับจำนวนลูกค้าของตนและลูกค้าใหม่แต่ละคนได้มาจากผู้ผลิตนมรายใด เราก็มีข้อมูลประกอบที่จำเป็นต่อการใช้ประโยชน์จากเครื่องมือของฝ่ายจัดการนี้

สมมติต่อไปว่าจากการสังเกตเป็นระยะเวลาหนึ่งเดือน ความเคลื่อนไหวของลูกค้าจากผู้ผลิตนมรายหนึ่งไปยังอีกรายหนึ่งปรากฏในตาราง 11—1 เพื่อให้การคำนวณที่จำเป็นเป็นไปโดยง่าย เราจะสมมติว่าในระหว่างงวดระยะเวลาดังกล่าวไม่มีลูกค้าใหม่เข้ามาสู่และลูกค้าเก่าออกไปจากตลาดนี้

ตาราง 11—1

การเปลี่ยนแปลงสุทธิในลูกค้า		
	จำนวนลูกค้า	
ผู้ผลิตนม	1 มิถุนายน	1 กรกฎาคม
A	200	220
B	500	490
C	300	290

ถ้าสังเกตอย่างผิวเผิน เราอาจเข้าใจว่าในระหว่างเดือนลูกค้าที่สับจากผู้ผลิตนมรายหนึ่งไปยังอีกรายหนึ่งมีจำนวนทั้งสิ้น 20 คน กล่าวคือจาก B ไป A 10 คนและจาก C ไป A 10 คน อย่างไรก็ดี ถ้าตรวจสอบให้ละเอียดกว่านี้อาจไม่ได้เป็นไปตามข้อสรุปขั้นแรกนี้ สมมติว่าการแลกเปลี่ยนลูกค้าระหว่างผู้ผลิตนมทั้งสามรายที่แท้จริงปรากฏในตาราง 11—2 จากตารางนี้เราจะเห็นได้ว่าการที่ผู้ผลิตนม A มีลูกค้าเพิ่มขึ้น 20 คนนั้น เป็นผลจากความเคลื่อนไหวของลูกค้าที่ค่อนข้างสลับซับซ้อนซึ่งเกี่ยวพันไปถึงผู้ผลิตนมทั้งสามราย ทางด้านการตลาดบางทีเราเรียกความเคลื่อนไหวนี้ว่า "การสับตราสินค้า" (brand switching)

ถ้าผู้ผลิตนมแต่ละรายประสงค์ที่จะทำงานทางด้านการตลาดให้ดีที่สุดเท่าที่จะทำได้ เขาจะต้องมีรายละเอียดเกี่ยวกับการสับตราสินค้า ตัวอย่างเช่น ถ้าผู้ผลิตนม B ออกแบบการรณรงค์ส่งเสริมจากความรู้สึกว่าตนเป็นผู้ผลิตนมเพียงรายเดียวเท่านั้นที่สูญเสียลูกค้า และสูญเสียลูกค้าให้แก่ผู้ผลิตนม A เท่านั้น B ก็จะดำเนินการภายใต้ข้อสมมติที่ผิด ความจริงผู้ผลิตนม B ไม่ได้สูญเสียลูกค้า 10 คนต่อเดือน แต่ว่าในเดือนหนึ่ง ๆ เขาได้รับลูกค้าใหม่ 40 คนจากผู้ผลิตนมอีกสองราย และสูญเสียลูกค้าเก่า 50 คนให้แก่ผู้ผลิตนมอีกสองราย

ตาราง 11—2

การแลกเปลี่ยนลูกค้าที่แท้จริง				
		การเปลี่ยนแปลงในระหว่างเดือนมิถุนายน		
ผู้ผลิตนม	ลูกค้า 1 มิ.ย.	ได้มา	เสียไป	ลูกค้า 1 ก.ค.
A	200	60	40	220
B	500	40	50	490
C	300	35	45	290

ในทำนองเดียวกัน สมมติว่าถ้าผู้ผลิตนม A สังเกตว่าตนกำลังได้ลูกค้าเพิ่มขึ้นเดือนละ 20 คน จึงสนใจเฉพาะความพยายามที่จะดึงลูกค้าเพิ่มเติมจากคู่แข่งของตน สิ่งที่ผู้ผลิตนม A ได้มองข้ามคือการสูญเสียลูกค้า 40 คนต่อเดือน บางทีความพยายามที่จะลดการสูญเสียลูกค้า 40 คนต่อเดือนนี้อาจให้ผลดีเท่า ๆ กับความพยายามที่จะแย่งลูกค้าเพิ่มเติมจาก B และ C

เรื่องทั้งหมดที่กล่าวไปแล้วนี้พอสรุปได้ว่า การวิเคราะห์อย่างง่าย ๆ ในรูปของลูกค้าที่ได้มาสุทธิหรือที่สูญเสียสุทธิไม่พอเพียงสำหรับการจัดการที่เฉลียวฉลาด สิ่งที่ฝ่ายจัดการต้องการคือการวิเคราะห์ที่ละเอียดกว่าเกี่ยวกับอัตราการได้มา และการสูญเสียลูกค้าให้แก่คู่แข่งขันทุก ๆ คน จากข้อมูลดังกล่าว ฝ่ายจัดการอาจทุ่มความพยายามในการ:

1. คาดคะเนล่วงหน้าส่วนแบ่งตลาดของผู้ขายคนหนึ่งคนใด ณ เวลาใดเวลาหนึ่งในอนาคต

2. คาดคะเนล่วงหน้าอัตราที่ผู้ขายคนหนึ่งคนใดจะได้มา หรือสูญเสียส่วนแบ่งตลาดของเขาในอนาคต

3. คาดคะเนล่วงหน้าว่าจะมีดุลภาพตลาด (ส่วนแบ่งตลาดที่คงที่หรือสม่ำเสมอ) ในอนาคตหรือไม่

4. วิเคราะห์ความพยายามทางด้านการส่งเสริมของผู้ขายคนหนึ่งคนใด ว่ามีผลต่อการได้มาและการสูญเสียส่วนแบ่งตลาดอย่างใด

ขบวนมาร์คอฟทำให้เรามีเครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์การตลาด เราสามารถเขียนข้อสรุปที่ถูกต้องกว่าเกี่ยวกับฐานะการตลาดของเราทั้งในปัจจุบันและอนาคต โดยอาศัยเครื่องมือของฝ่ายจัดการนี้ ถ้าไม่มีเครื่องมือนี้ เรามีความโน้มเอียงที่จะอยู่ในฐานะเช่นเดียวกับผู้ผลิตนม A โดยทราบแต่เพียงว่าตนได้ลูกค้าเพิ่มขึ้น 20 คนต่อเดือน แต่ไม่ทราบว่าจำนวนที่เขาได้เพิ่มขึ้นเป็นผลสุทธิจากการแลกเปลี่ยนลูกค้าซึ่งกันและกันในระหว่างผู้ผลิตนมทั้งสามราย

เพื่อให้ไปไกลกว่าการวิเคราะห์อย่างง่าย ๆ นี้ และเข้าไปสู่การใช้ประโยชน์ขบวนมาร์คอฟ เราจะต้องคำนวณความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง (transition probabilities) ของผู้ผลิตนมทั้ง 3 ราย ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงคือความน่าจะเป็นที่ผู้ขายคนหนึ่ง ๆ (ตามตัวอย่างของเราคือผู้ผลิตนมรายหนึ่งรายใด) จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตน กล่าวอีกนัยหนึ่งจากตาราง 11–2 เราจะสังเกตได้ว่าผู้ผลิตนม B สูญเสียลูกค้า 50 คนในเดือนนี้ แสดงว่าความน่าจะเป็นที่ผู้ผลิตนม B จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตนเท่ากับ .9 ในทำนองเดียวกัน ความน่าจะเป็นที่ผู้ผลิตนม A จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตนเท่ากับ .8 ความน่าจะเป็นที่ผู้ผลิตนม C จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตนเท่ากับ .85 การคำนวณความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสำหรับการสงวนไว้ซึ่งลูกค้าดังกล่าวปรากฏในตาราง 11–3

ตาราง 11—3

ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสำหรับการสงวนไว้ซึ่งลูกค้า				
ผู้ผลิตนม	ลูกค้า 1 มิ.ย.	จำนวนที่สูญเสีย	จำนวนที่สงวนไว้	ความน่าจะเป็นของการสงวนไว้
A	200	40	160	160/200 = .8
B	500	50	450	450/500 = .9
C	300	45	255	255/300 = .85

มาถึงขั้นนี้ เรามีมาตรการบางอย่างที่แสดงสัดส่วนของลูกค้าเก่าที่ผู้ผลิตนมแต่ละแห่งสงวนไว้ในแต่ละเดือน แต่เรายังไม่ได้กล่าวถึงอัตราที่ผู้ผลิตนมทั้งสามรายได้ลูกค้าใหม่เพิ่มขึ้นในแต่ละเดือน การคำนวณความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงที่สมบูรณ์ จะต้องมีข้อมูลเกี่ยวกับความเคลื่อนไหวของลูกค้าระหว่างผู้ผลิตนมทั้งสาม ข้อมูลในลักษณะเช่นนี้จะต้องอาศัยการเก็บบันทึกที่ดี และเป็นไปในรูปดังปรากฏในตาราง 11—4

ตาราง 11—4

ความเคลื่อนไหวลูกค้าของ								
	ลูกค้า	ได้รับจาก			สูญเสียให้			ลูกค้า
ผู้ผลิตนม	1 มิ.ย.	A	B	C	A	B	C	1 ก.ค.
A	200	0	35	25	0	20	20	220
B	500	20	0	20	35	0	15	490
C	300	20	15	0	25	20	0	290

มาถึงขั้นนี้ ได้มีการรวบรวมข้อมูลขั้นมูลฐานทั้งหมดไว้ในตาราง ๆ เดียว ทำให้เราสามารถสังเกต ไม่เพียงแต่การได้มา หรือการสูญเสียสุทธิของผู้ผลิตนมรายใดรายหนึ่งเท่านั้น แต่ยังแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันระหว่างการได้มา และการสูญเสียลูกค้าของผู้ผลิตนมแต่ละราย ตัวอย่างเช่นเป็นที่ประจักษ์ ณ จุดนี้ว่าลูกค้าใหม่ที่ผู้ผลิตนม A ได้รับเพิ่มเติมส่วนใหญ่มาจาก B จากตาราง 11—4 เราสามารถอธิบายความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันเหล่านี้ได้ดี และถูกต้องกว่าในกรณีที่เราทราบเฉพาะการได้มาหรือการสูญเสียสุทธิของผู้ผลิตนมแต่ละราย

งานขั้นถัดไปของการใช้ประโยชน์ขบวนมาร์คอฟได้แก่การแปลงตาราง 11—4 ให้อยู่ในรูปที่กะทัดรัดกว่า กล่าวคือทำให้การได้มาและการสูญเสียทั้งหมดอยู่ในรูปความน่าจะเป็นของ

การเปลี่ยนแปลง เราได้รวมความน่าจะเป็นของการสงวนไว้ และความน่าจะเป็นของการสูญเสียลูกค้าให้แก่คู่แข่งขันของผู้ผลิตนมแต่ละรายไว้ในเมตริกซ์ ความน่าจะเป็นชั่วคราว [สมการ (11—1)] แถวนอนของเมตริกซ์นี้แสดงการสงวนไว้และการได้มาซึ่งลูกค้า แถวตั้งแทนการสงวนไว้และการสูญเสียลูกค้า จะสังเกตได้ว่าเราได้คำนวณความน่าจะเป็นไปถึงทศนิยมสามตำแหน่ง

เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} .800 & .070 & .083 \\ .100 & .900 & .067 \\ .100 & .030 & .850 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (11—1)$$

การสงวนไว้ และ การได้มา →

การสงวนไว้ และ การสูญเสีย ↓

เมตริกซ์ข้างล่างนี้มีขนาดเท่ากับเมตริกซ์ข้างต้น เมตริกซ์นี้แสดงให้เห็นว่าความน่าจะเป็นแต่ละค่าคำนวณมาได้อย่างใด

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 160/200 = .800 & 35/500 = .070 & 25/300 = .083 \\ 20/200 = .100 & 450/500 = .900 & 20/300 = .067 \\ 20/200 = .100 & 15/500 = .030 & 255/300 = .850 \end{pmatrix} \end{array}$$

ถ้าอ่านตามแถวตั้งของเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงจะได้ความดังนี้ :

แถวตั้งที่ 1 ชี้ให้เห็นว่าผู้ผลิตนม A สงวนไว้ซึ่ง .8 ของลูกค้าของตน (160) สูญเสีย .1 ของลูกค้าของตน (20) ให้แก่ผู้ผลิตนม B และสูญเสีย .1 ของลูกค้าของตน (20) ให้แก่ผู้ผลิตนม C

แถวตั้งที่ 2 ชี้ให้เห็นว่าผู้ผลิตนม B สงวนไว้ซึ่ง .9 ของลูกค้าของตน (450) สูญเสีย .07 ของลูกค้าของตน (35) ให้แก่ผู้ผลิตนม A และสูญเสีย .03 ของลูกค้าของตน (15) ให้แก่ผู้ผลิตนม C

แถวตั้งที่ 3 ชี้ให้เห็นว่าผู้ผลิตนม C สงวนไว้ซึ่ง .85 ของลูกค้าของตน (255) สูญเสีย .083 ของลูกค้าของตน (25) ให้แก่ผู้ผลิตนม A และสูญเสีย .067 ของลูกค้าของตน (20) ให้แก่ผู้ผลิตนม B

ถ้าอ่านตามแถวนอนจะได้ข้อสนเทศ ดังนี้ :

แถวนอนที่ 1 ชี้ให้เห็นว่าผู้ผลิตนม A สงวนไว้ซึ่ง .8 ของลูกค้าของตน (160) ได้ .07 ของลูกค้าของ B (35) และได้ .083 ของลูกค้าของ C (25)

แถวนอนที่ 2 ชี้ให้เห็นว่าผู้ผลิตนม B สงวนไว้ซึ่ง .9 ของลูกค้าของตน (450) ได้ .1 ของลูกค้าของ A (20) และได้ .067 ของลูกค้าของ C (20)

แถวนอนที่ 3 ชี้ให้เห็นว่าผู้ผลิตนม C สงวนไว้ซึ่ง .85 ของลูกค้าของตน (255) ได้ .1 ของลูกค้าของ A (20) และได้ .03 ของลูกค้าของ B (15)

จากข้อสนเทศในรูปนี้เราสามารถสังเกตความสัมพันธ์ขั้นมูลฐานได้ชัดเจนกว่า นอกจากนี้เรายังสามารถทำงานของฝ่ายจัดการสื่อย่างตามที่ระบุไว้ในหน้า 318 โดยอาศัยพีชคณิตเมตริกซ์

เสถียรภาพของเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง
(Stability of the Matrix of Transition Probabilities)

ขบวนมาร์คอฟเป็นเรื่องเกี่ยวกับการตัดสินใจให้การอุดหนุน (Patronage decisions) ของลูกค้า เป็นเรื่องที่เกี่ยวกับจำนวนลูกค้าที่ทำการซื้อจากผู้ผลิตนมแต่ละราย ข้อสมมติขั้นมูลฐานประการหนึ่งคือ ลูกค้าไม่ได้โยกย้ายการอุดหนุนจากผู้ผลิตนมรายหนึ่งไปยังอีกรายหนึ่งแล้วไปยังอีกรายหนึ่งในลักษณะเชิงสุ่ม แต่เราสมมติว่าการเลือกซื้อจากผู้ผลิตนมในอนาคตสะท้อนให้เห็นถึงการเลือกที่ได้กระทำไปแล้วในอดีต

ขบวนมาร์คอฟอันดับที่หนึ่ง (First-order) ตั้งอยู่บนข้อสมมติที่ว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ถัดไป (ในกรณีนี้คือ เดือนถัดไปลูกค้าจะเลือกซื้อจากผู้ขายรายใด) ขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ของเหตุการณ์สุดท้าย (การเลือกของลูกค้าในเดือนนี้) และไม่ขึ้นอยู่กับพฤติกรรมการซื้อก่อนหน้านั้นแต่อย่างใด ขบวนมาร์คอฟอันดับที่สอง (Second-order) ตั้งข้อสมมติไว้ว่าการเลือกของลูกค้าในเดือนถัดไป อาจขึ้นอยู่กับการเลือกของลูกค้าในระหว่างสองเดือนที่เพิ่งผ่านไป (หรืองวดการซื้ออื่นถ้าไม่ใช้เดือน) ในทำนองเดียวกัน ขบวนอันดับที่สามตั้งอยู่บนข้อสมมติที่ว่า การคาดคะเนล่วงหน้าถึงพฤติกรรมของลูกค้าที่ดีที่สุดก็โดยการสังเกตและพิจารณาจากพฤติกรรมของเขาในระหว่างสามเดือนที่เพิ่งผ่านไป (หรืองวดการซื้ออื่นที่เหมาะสม)

หลังจากที่ท่านได้ศึกษาบทที่ว่าด้วยพีชคณิตเมตริกซ์แล้ว การคำนวณลูกโซ่อันดับที่หนึ่งเป็นเรื่องง่าย ๆ แต่ในขบวนอันดับที่สองและที่สาม การคำนวณเริ่มยุ่มง่ามและยุ่งยากยิ่งขึ้น จากการศึกษาปรากฏว่าการใช้ข้อสมมติอันดับที่หนึ่ง เพื่อวัตถุประสงค์ในการคาดคะเนล่วงหน้าใช้การได้โดยเฉพาะถ้าข้อมูลเหล่านั้นชี้ให้เห็นว่าการเลือกของลูกค้าเป็นไปในลักษณะที่ค่อนข้างจะมีเสถียรภาพ กล่าวคือ ถ้าเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงคงเดิม เนื่องจากขบวนการอันดับที่หนึ่งเป็นเรื่องง่าย ๆ และได้มีการพิสูจน์แล้วว่าเป็นเครื่องคาด

คะเนล่วงหน้าเกี่ยวกับพฤติกรรมในอนาคตที่เชื่อถือได้ เราจึงขอจำกัดการอธิบายของเราเฉพาะขบวนอันดับที่หนึ่ง สำหรับผู้อ่านที่ประสงค์จะขยายเรื่องนี้ไปถึงขบวนการมาร์คอฟอันดับที่สองและที่สาม อาจศึกษาเพิ่มเติมจากหนังสืออ้างอิงดี ๆ หลายเล่ม ซึ่งกล่าวถึงรายละเอียดทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต่อการวิเคราะห์ที่ลึกซึ้งนี้

การคาดคะเนล่วงหน้าส่วนแบ่งตลาดสำหรับงวดอนาคต (Prediction of Market Shares for Future Periods)

เราจะกลับไปสู่ตัวอย่างผู้ผลิตนมสามรายของเราอีกครั้งหนึ่ง และสมมติว่าเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างจะแน่นอน และส่วนแบ่งตลาด ณ วันที่ 1 กรกฎาคม ของผู้ผลิตนมทั้ง 3 รายมีดังนี้ A = 22 เปอร์เซ็นต์ B = 49 เปอร์เซ็นต์ และ C = 29 เปอร์เซ็นต์ ฝ่ายจัดการของผู้ผลิตนมทั้งสามย่อมจะได้รับประโยชน์จากการที่ทราบส่วนแบ่งตลาดที่จะได้รับในงวดระยะเวลาใดเวลาหนึ่งในอนาคต

ในการคำนวณส่วนแบ่งของตลาดทั้งหมดที่น่าจะเป็นของผู้ผลิตนมแต่ละราย ณ วันที่ 1 สิงหาคม (งวดระยะเวลาในการรวบรวมข้อมูลขั้นมูลฐานคือเดือน) เราอาจจะเขียนส่วนแบ่งตลาด 1 กรกฎาคม ในรูปของเมตริกซ์และคูณเมตริกซ์นี้ด้วยเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงดังนี้

$$\begin{array}{cccc} \text{ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง} & \text{ส่วนแบ่งตลาด 1 ก.ค.} & & \text{ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็น 1 ส.ค.} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} .800 & .070 & .083 \\ .100 & .900 & .067 \\ .100 & .030 & .850 \end{pmatrix} \times & \begin{pmatrix} .22 \\ .49 \\ .29 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} .234 \\ .483 \\ .283 \end{pmatrix} \\ & \overline{1.00} & & \overline{1.000} \end{array} \qquad (11\text{—}2)$$

การคูณเมตริกซ์ข้างต้นอาจอธิบายโดยละเอียดดังนี้ :

แถวนอนที่ 1 × แถวตั้งที่ 1

(ความโน้มเอียงที่ A จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตน × ส่วนแบ่งตลาดของ A)	.8 × .22 = .176
(ความโน้มเอียงที่ A จะดึงลูกค้าจาก B × ส่วนแบ่งตลาดของ B)	.070 × .49 = .034

(ความโน้มเอียงที่ A จะดึงลูกค้าจาก
C × ส่วนแบ่งตลาดของ C) .083 × .29 = .024

ส่วนแบ่งตลาดของ A ในวันที่ 1 สิงหาคม .234

แถวนอนที่ 2 × แถวตั้งที่ 1

(ความโน้มเอียงที่ B จะดึงลูกค้าจาก
A × ส่วนแบ่งตลาดของ A) .1 × .22 = .022

(ความโน้มเอียงที่ B จะสงวนไว้ซึ่ง
ลูกค้าของตน × ส่วนแบ่งตลาดของ B) .9 × .49 = .441

(ความโน้มเอียงที่ B จะดึงลูกค้าจาก
C × ส่วนแบ่งตลาดของ C) .067 × .29 = .020

ส่วนแบ่งตลาดของ B ในวันที่ 1 สิงหาคม .483

แถวนอนที่ 3 × แถวตั้งที่ 1

(ความโน้มเอียงที่ C จะดึงลูกค้าจาก
A × ส่วนแบ่งตลาดของ A) .1 × .22 = .022

(ความโน้มเอียงที่ C จะดึงลูกค้าจาก
B × ส่วนแบ่งตลาดของ B) .03 × .45 = .015

(ความโน้มเอียงที่ C จะสงวนไว้ซึ่ง
ลูกค้าของตน × ส่วนแบ่งตลาดของ C) .85 × .29 = .246

ส่วนแบ่งตลาดของ C ในวันที่ 1 สิงหาคม .283

ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็น ณ วันที่ 1 กันยายน อาจคำนวณได้โดยยกกำลังสองเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง และคูณเมตริกซ์ที่ยกกำลังสองนี้ด้วยส่วนแบ่งตลาด ณ วันที่ 1 กรกฎาคม ดังนี้ :

$$\text{วิธีที่ 1} \quad \begin{pmatrix} .800 & .070 & .083 \\ .100 & .900 & .067 \\ .100 & .030 & .850 \end{pmatrix}^2 \times \begin{pmatrix} .22 \\ .49 \\ .29 \end{pmatrix} = \text{ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็น 1 กันยายน} \qquad (11\text{–}3)$$

หรือ โดยคูณเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงด้วยส่วนแบ่งตลาด ณ วันที่ 1 สิงหาคม ดังนี้ :

$$\text{วิธีที่ 2} \quad \begin{pmatrix} .800 & .070 & .083 \\ .100 & .900 & .067 \\ .100 & .030 & .850 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} .234 \\ .483 \\ .283 \end{pmatrix} = \text{ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็น 1 กันยายน} \qquad (11\text{–}4)$$

วิธีที่ 1 เราอาจอธิบายเหตุผลที่แฝงอยู่เบื้องหลังวิธีที่ 1 ดังนี้ โดยการยกกำลังสองเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิม แท้ที่จริงเป็นการคำนวณความน่าจะเป็นของการสงวนไว้ การได้มาและการสูญเสียซึ่งเมื่อนำไปคูณกับส่วนแบ่งตลาดเดิม (22, 49 และ 29 เปอร์เซ็นต์) เราก็จะได้ส่วนแบ่งตลาด ณ วันที่ 1 กันยายน ตัวอย่างเช่น ค่าของ X ที่ปรากฏอยู่ในแถวตั้งที่ 1 และแถวนอนที่ 1 ของผลคูณ ได้มาจากการคูณแถวนอนที่หนึ่งด้วยแถวตั้งที่หนึ่ง ดังนี้

$$\begin{pmatrix} .8 & .07 & .083 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} .8 \\ .1 \\ .1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \end{pmatrix}$$

แถวนอนที่หนึ่ง × แถวตั้งที่หนึ่ง:

ความโน้มเอียงที่ A จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตน × ความโน้มเอียงที่ A จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตน = สัดส่วนของลูกค้าเดิมที่ A สงวนไว้เมื่อระยะเวลาผ่านไปแล้ว 2 งวด

= .8 × .8 = .64

+

ความโน้มเอียงที่ A จะได้มาซึ่งลูกค้าจาก B × ความโน้มเอียงที่ B จะได้มาซึ่งลูกค้าจาก A = ลูกค้าของ A ที่ได้คืนจาก B = .07 × .1 = .007

+

ความโน้มเอียงที่ A จะได้มาซึ่งลูกค้าจาก C × ความโน้มเอียงที่ C จะได้มาซึ่งลูกค้าจาก A = ลูกค้าของ A ที่ได้คืนจาก C = .083 × .1 = .0083

ค่าของ X ในผลคูณได้มาจากการบวกผลของการคำนวณทั้งสามเข้าด้วยกัน ดังนี้ :

.6400

.0070

.0083

.6553 = สัดส่วนของลูกค้าเดิมของ A ที่ A สงวนไว้ ณ วันที่ 1 กันยายน

ค่าอื่น ๆ อีกแปดค่าที่ปรากฏในกำลังสองของเมตริกซ์ อาจอธิบายและคำนวณได้ในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน เมตริกซ์ที่คำนวณได้เพื่อใช้ในวิธีที่ 1 คือ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{.6553} & \mathbf{.1215} & \mathbf{.1416} \\ \mathbf{.1767} & \mathbf{.8200} & \mathbf{.1256} \\ \mathbf{.1680} & \mathbf{.0585} & \mathbf{.7328} \end{pmatrix}$$

เพื่อดำเนินตามวิธีที่ 1 โดยครบถ้วน เราคูณเมตริกซ์ที่ยกกำลังสองด้วยส่วนแบ่งตลาด 1 กรกฎาคม ดังนี้ :

$$\begin{pmatrix} .6553 & .1215 & .1416 \\ .1767 & .8200 & .1256 \\ .1680 & .0585 & .7328 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} .22 \\ .49 \\ .29 \end{pmatrix}$$

ผลลัพธ์ที่ได้คือ :

A	.244	
B	.478	ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็น ณ วันที่ 1 กันยายน
C	.278	
รวม =	1.000	

เพื่อความกระจ่าง เราจะอธิบายการคูณแถวนอนที่หนึ่งด้วยแถวตั้งที่หนึ่งโดยละเอียด ดังนี้:

$$\begin{pmatrix} .6553 & .1215 & .1416 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} .22 \\ .49 \\ .29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .244 \end{pmatrix}$$

ความโน้มเอียงที่ A จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตนเมื่อระยะเวลาผ่านไปแล้ว 2 งวด × ส่วนแบ่งตลาดเดิมของ A = ส่วนแบ่งของ A จากลูกค้าเดิมของตน ณ วันที่ 1 กันยายน

= .6553 × .22 = .144

+

ความโน้มเอียงที่ A จะได้มาซึ่งลูกค้าเดิมของ B เมื่อระยะเวลาผ่านไปแล้ว 2 งวด × ส่วนแบ่งตลาดเดิมของ B = ส่วนแบ่งของ A ที่ได้จากลูกค้าเดิมของ B ณ วันที่ 1 กันยายน

= .1215 × .49 = .059

+

ความโน้มเอียงที่ A จะได้มาซึ่งลูกค้าเดิมของ C เมื่อระยะเวลาผ่านไปแล้ว 2 งวด × ส่วนแบ่งตลาดเดิมของ C = ส่วนแบ่งของ A ที่ได้จากลูกค้าเดิมของ C ณ วันที่ 1 กันยายน

= .1416 × .49 = .041

เมื่อนำผลลัพธ์ของการคำนวณทั้งสามมาบวกเข้าด้วยกัน เราได้ :

.144

.059

.041

.244 = ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นของ A ณ วันที่ 1 กันยายน

วิธีที่ 2 การคูณเมตริกซ์เดิมของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงด้วยส่วนแบ่งตลาด 1 สิงหาคม จะได้ผลลัพธ์อย่างเดียวกับวิธีที่ 1 เราจะเขียนเมตริกซ์ทั้งสองอีกครั้งหนึ่งและอธิบายการคูณพอเป็นตัวอย่างดังต่อไปนี้ :

$$\begin{pmatrix} .800 & .070 & .083 \\ .100 & .900 & .067 \\ .100 & .030 & .850 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} .234 \\ .483 \\ .283 \end{pmatrix} =$$ ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็น ณ วันที่ 1 กันยายน

แถวนอนที่หนึ่ง × แถวตั้งที่หนึ่ง

ความโน้มเอียงที่ A จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตน × ส่วนแบ่งตลาดของ A เมื่อสิ้นงวดสุดท้าย = ส่วนของลูกค้าที่ A สงวนไว้จากลูกค้าที่ตนมีอยู่เมื่อสิ้นงวดสุดท้าย = $.8 \times .234 = .187$

+

ความโน้มเอียงที่ A จะได้มาซึ่งลูกค้าจาก B × ส่วนแบ่งตลาดของ B เมื่อสิ้นงวดสุดท้าย = ลูกค้าที่ A ได้มาจากลูกค้าที่ B มีอยู่เมื่อสิ้นงวดสุดท้าย = $.070 \times .483 = .034$

+

ความโน้มเอียงที่ A จะได้มาซึ่งลูกค้าจาก C × ส่วนแบ่งตลาดของ C เมื่อสิ้นงวดสุดท้าย = ลูกค้าที่ A ได้มาจากลูกค้าที่ C มีอยู่เมื่อสิ้นงวดสุดท้าย = $.083 \times .283 = .023$

$$\begin{array}{r} .187 \\ .034 \\ \underline{.023} \\ .244 \end{array}$$

.244 = ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็นของ A ณ วันที่ 1 กันยายน

วิธีที่ 1 มีข้อดีบางประการโดยลักษณะของมันเหนือวิธีที่ 2 ตัวอย่างเช่นถ้าเราต้องการกระโดดจากงวดระยะเวลาเริ่มแรก ไปยังงวดระยะเวลาที่สาม ตามวิธีที่ 1 เราไม่ต้องผ่านขั้นต่าง ๆ ในระหว่างกลาง เราเพียงแต่ดำเนินการดังต่อไปนี้ :

ส่วนแบ่งตลาดเมื่อระยะผ่านไปแล้ว 3 งวด :

$$\begin{pmatrix} .800 & .070 & .083 \\ .100 & .900 & .067 \\ .100 & .030 & .850 \end{pmatrix}^3 \times \begin{pmatrix} .22 \\ .49 \\ .29 \end{pmatrix} =$$ ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็น ณ วันที่ 1 ตุลาคม

เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงยกกำลังสาม × ส่วนแบ่งตลาด 1 กรกฎาคม

และถ้าเราต้องการทราบส่วนแบ่งตลาด เมื่อระยะเวลาผ่านไปแล้ว 6 งวด เราอาจตั้งปัญหาดังต่อไปนี้ :

ส่วนแบ่งตลาดเมื่อระยะเวลาผ่านไปแล้ว 6 งวด

$$\begin{pmatrix} .800 & .070 & .083 \\ .100 & .900 & .067 \\ .100 & .030 & .850 \end{pmatrix}^6 \times \begin{pmatrix} .22 \\ .49 \\ .29 \end{pmatrix} = \text{ส่วนแบ่งตลาดที่น่าจะเป็น 1 มกราคม ของปีถัดไป}$$

เมตริกซ์ของความน่าจะเป็น ของการเปลี่ยนแปลงยกกำลังหก × ส่วนแบ่งตลาด 1 กรกฎาคม

แน่ละถ้าท่านต้องทำการคำนวณด้วยมือ การยกกำลังเมตริกซ์ให้เป็นกำลังที่หกหรือสูงกว่านี้ เป็นงานที่ยุ่งยากมาก แต่อย่างไรก็ดี ได้มีการจัดทำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่อาจทำงานที่ลำบากนี้ให้เสร็จภายในเวลาเพียงไม่กี่วินาทีเท่านั้น

โดยสรุปการคำนวณส่วนแบ่งตลาด ในงวดระยะเวลาอนาคตมีให้เลือกใช้สองวิธี เราจะใช้วิธีที่ 1 ถ้าเราต้องการทราบแต่เพียงส่วนแบ่งตลาดของงวดระยะเวลาในอนาคตงวดใดงวดหนึ่งโดยเฉพาะเท่านั้น แต่เราจะใช้วิธีที่ 2 ถ้าเราต้องการสังเกตการเปลี่ยนแปลงในส่วนแบ่งตลาดที่เกิดขึ้นในระหว่างงวดระยะเวลาต่าง ๆ ทั้งหมด

สถานะดุลภาพ
(Equilibrium Conditions)

ข้อสมมติเกี่ยวกับปัญหาผู้ผลิตนมของเรา ที่ว่าในอนาคตส่วนแบ่งตลาดจะอยู่ในสถานะดุลภาพ อาจเป็นข้อสมมติที่สมเหตุสมผล ส่วนแบ่งตลาดที่อยู่ในดุลภาพหมายความว่าการแลกเปลี่ยนลูกค้าจะอยู่ในลักษณะที่ทำให้ ส่วนแบ่งตลาดที่ได้ใหม่เหมือนกับ–หรือตรึงอยู่กับ–ส่วนแบ่งตลาดทั้งสาม ณ ดุลภาพ ดุลภาพจะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อไม่มีผู้ผลิตนมรายหนึ่งรายใดดำเนินการอย่างหนึ่งอย่างใด เพื่อเปลี่ยนเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง จากทัศนะทางด้านการตลาดเราต้องการตอบคำถามที่ว่า : ส่วนแบ่งตลาดสุดท้ายหรือดุลภาพทั้งสามจะเป็นเช่นไร ?

เราจะสมมติเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง เพื่อใช้ในการอธิบายดุลภาพดังนี้ :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} .90 & .15 & 0 \\ .05 & .75 & 0 \\ .05 & .10 & 1.0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \text{การสงวนไว้} & \text{การสงวนไว้} \\ \text{และ} & \text{และ} \\ \text{การสูญเสีย} & \text{การได้มา} \\ \downarrow & \longrightarrow \end{array} \qquad (11\text{–}5)$$

เนื่องจากว่า C ไม่สูญเสียลูกค้าเลยและผู้ผลิตนมอีกสองรายสูญเสียลูกค้าให้แก่ C ปัญหาจึงมีอยู่เพียงว่า เมื่อใด C จะได้ลูกค้าไปทั้งหมด ตามศัพท์ของมาร์คอฟ สภาพดังกล่าวเรียก

ว่าเป็น อ่าง หรือ แอ่ง (sink or basin) ของรัฐ ๆ เดียว หมายความว่าในที่สุดผู้ผลิตนมรายหนึ่งรายใด (C) จะได้ลูกค้าไปทั้งหมด

ดุลภาพชนิดที่ 2 อาจเกิดขึ้นได้ ในการอธิบายดุลภาพนี้ เราจะสมมติเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงอีกอันหนึ่งดังนี้ :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} .90 & 0 & 0 \\ .05 & .50 & .50 \\ .05 & .50 & .50 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (11\text{—}6)$$

จะสังเกตได้โดยง่ายว่าในไม่ช้าผู้ผลิตนม B และ C จะยึดเอาลูกค้าของ A ไปทั้งหมด ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? เพราะ A สูญเสีย .05 ของลูกค้าของตนให้แก่ B และ .05 ให้แก่ C และไม่ได้ลูกค้าใหม่คืนมาจาก B หรือ C เลย และ B และ C ต่างก็มีความน่าจะเป็นของการสงวนไว้ซึ่งลูกค้าที่เท่ากัน (.50) ในที่สุดเขาจะต้องแบ่งตลาดออกเป็นสองส่วน สภาพดังกล่าวเรียกว่าเป็นอ่างหรือแอ่งของรัฐสองรัฐ กล่าวคือ ในที่สุดผู้ผลิตนมสองรายคือ B และ C จะได้ลูกค้าที่มีอยู่ในตลาดทั้งหมด

เราอาจจะมีดุลภาพชนิดที่ไม่มีอ่างหรือแอ่งเกิดขึ้นก็ได้ ในดุลภาพเช่นนี้จะไม่มีผู้ผลิตนมรายหนึ่งรายใดได้ลูกค้าไปทั้งหมด หรือผู้ผลิตนมเพียงสองรายยึดครองตลาดทั้งหมด แต่เป็นสถานะสุดท้ายหรือดุลภาพบางอย่างที่เป็นไปต่อเนื่องกันในลักษณะที่ว่า ส่วนแบ่งตลาดจะไม่เปลี่ยนแปลง ตราบใดที่เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงยังคงเดิม ปัญหาเดิมเกี่ยวกับผู้ผลิตนมสามรายของเราจะชี้ให้เห็นดุลภาพชนิดที่สามนี้ ในการหาส่วนแบ่งตลาดสุดท้ายหรือดุลภาพเกี่ยวกับปัญหาเดิมของเราว่าจะเป็นเช่นใดนั้น เราจะดำเนินการดังต่อไปนี้ :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} .800 & .070 & .083 \\ .100 & .900 & .067 \\ .100 & .030 & .850 \end{pmatrix} \end{array} = \text{เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเดิม} \qquad (11\text{—}1)$$

ส่วนแบ่งตลาดของ A ในงวดระยะเวลาดุลภาพ (เราเรียกงวดระยะเวลาอนาคตที่ไม่อาจระบุเจาะจงนี้ว่าเป็นงวดระยะเวลาดุลภาพ) เท่ากับ

.800 × ส่วนแบ่งที่ A มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลภาพ — 1 (งวดระยะเวลาก่อนหน้าดุลภาพ)

\+

.070 × ส่วนแบ่งที่ B มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลภาพ — 1

\+

.083 × ส่วนแบ่งที่ C มีอยู่ในงวดระยะเวลาดุลภาพ — 1

เราอาจเขียนความสัมพันธ์นี้ในรูปสมการได้ ดังนี้ :

$$A_{eq} = .800A_{eq-1} + .070B_{eq-1} + .083C_{eq-1} \quad (11-7)$$

และในทำนองเดียวกัน เราอาจเขียนสมการอีกสองสมการ ซึ่งแสดงส่วนแบ่งตลาดของ B และ C ในงวดระยะเวลาดุลภาพได้ ดังนี้ :

$$B_{eq} = .100A_{eq-1} + .900B_{eq-1} + .067C_{eq-1} \quad (11-8)$$

$$C_{eq} = .100A_{eq-1} + .030B_{eq-1} + .850C_{eq-1} \quad (11-9)$$

ในงวดระยะเวลาแรก จำนวนลูกค้าที่ผู้ผลิตนมรายหนึ่งได้มาหรือสูญเสียให้กับผู้ผลิตนมอีกรายหนึ่ง โดยปกติเป็นจำนวนที่ค่อนข้างจะสูง แต่เมื่อใกล้ดุลภาพลูกค้าที่ได้มาหรือที่สูญเสียไปจะมีจำนวนน้อยลงเรื่อย ๆ จนกระทั่งก่อนถึงดุลภาพการได้มาหรือการสูญเสียจะเป็นจำนวนน้อยมาก แนวความคิดนี้ไม่ใช่แนวความคิดที่แปลกและใหม่ เหตุการณ์หลายอย่างเป็นไปในลักษณะนี้ ตัวอย่างเช่น รูป 11–1 แสดงกราฟของตัวเลขตัวหนึ่ง (100) ที่ถูกแบ่งครึ่งในขั้นต่าง ๆ กัน ในกรณีขบวนมาร์คอฟที่เรากำลังศึกษาอยู่นี้ การเปลี่ยนแปลงในส่วนแบ่งตลาด จากงวดระยะเวลาก่อนหน้างวดระยะเวลาดุลภาพไปสู่งวดระยะเวลาดุลภาพมีจำนวนน้อยมากจนกระทั่งอาจถือได้ว่าเท่ากันในเชิงคณิตศาสตร์ กล่าวคือ eq = eq –1 ดังนั้น เราอาจเขียนสมการทั้งสามของเราใหม่ได้ ดังนี้ :

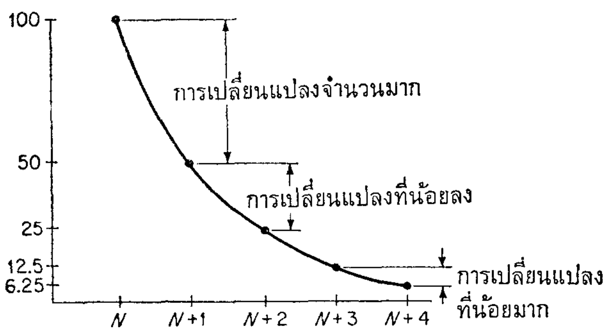
$$A = .800A + .070B + .083C \quad (11-10)$$

$$B = .100A + .900B + .067C \quad (11-11)$$

$$C = .100A + .030B + .850C \quad (11-12)$$

เนื่องจากผลรวมของส่วนแบ่งตลาดทั้งสามจะต้องเท่ากับ 1 เราจึงบวกสมการเข้าไปอีกสมการหนึ่งเพื่อแสดงข้อเท็จจริงดังกล่าว ดังนี้ :

$$A + B + C = 1 \quad (11-13)$$



รูป 11–1 การแบ่งครึ่งตัวเลขตัวหนึ่งเป็นขั้น ๆ เมื่อใกล้ดุลภาพ การเปลี่ยนแปลงจะน้อยลงตามลำดับ

สมการ (11–10) ถึง (11–12) มีค่าที่คล้ายคลึงกันอยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายสมการ ดังนั้น เราจึงอาจลดสมการเหล่านี้ให้เป็น :

$$0 = -.200A + .070B + .083C \qquad (11\text{—}14)$$

$$0 = .100A - .100B + .067C \qquad (11\text{—}15)$$

$$0 = .100A + .030B + .150C \qquad (11\text{—}16)$$

$$1.0 = A + B + C \qquad (11\text{—}13)$$

ในเมื่อเรามีสมการอยู่ถึงสี่สมการและตัวที่ยังไม่ทราบค่าเพียงสามตัวเท่านั้น เราอาจจะตัดสม-การหนึ่งออกไปได้ [เราตัดสมการ (11–16)] และแก้สมการที่เหลืออีกสามสมการพร้อมกัน เพื่อหาส่วนแบ่งตลาดดุลภาพ:

$$0 = -.200A + .070B + .083C \qquad (11\text{—}14)$$

$$0 = .100A - .100B + .067C \qquad (11\text{—}15)$$

$$1 = A + B + C \qquad (11\text{—}13)$$

ขั้นที่ 1 คูณสมการ (11–15) ด้วย .7 และบวกเข้ากับสมการ (11–14) :

$$0 = -.200A + .070B + .083C \qquad (11\text{—}14)$$

$$\underline{0 = .070A - .070B + .047C} \qquad (11\text{—}15) \times .7$$

$$0 = -.130A + .130C$$

$$.130A = .130C$$

$$A = C$$

ขั้นที่ 2 คูณสมการ (11–15) ด้วย 2 และบวกเข้ากับสมการ (11–14) :

$$0 = -.200A + 070B + .083C \qquad (11\text{—}14)$$

$$\underline{0 = .200A - .200B + .134C} \qquad (11\text{—}15) \times 2$$

$$0 = - .130B + .217C$$

$$.13B = .217C$$

$$B = 1.67C$$

ขั้นที่ 3 เขียนสมการ (11–13) อีกครั้งหนึ่ง :

$$1 = A + B + C$$

เพราะว่า A = C เพราะฉะนั้น

$1 = C + B + C$

และเพราะว่า $B = 1.67C$

$1 = C + 1.67C + C$

$1 = 3.67C$

$C = .273$ (ส่วนแบ่งตลาดดุลภาพของ C)

เพราะว่า $A = C$

$A = .273$ (ส่วนแบ่งตลาดดุลภาพของ A)

และเพราะว่า $1 = A + B + C$

$1 = .273 + B + .273$

$1 = B + .546$

$B = .454$ (ส่วนแบ่งตลาดดุลภาพของ B)

ท่านอาจสงสัยว่าเกิดดุลภาพจริงหรือไม่ ? ถ้าท่านสงสัยเราจะพิสูจน์ให้ท่านเห็นดังนี้ คูณส่วนแบ่งตลาดดุลภาพ (A .273, B .454, C .273) ด้วยเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง ดังนี้ :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} .800 & .070 & .083 \\ .100 & .900 & .067 \\ .100 & .030 & .850 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{pmatrix} .273 \\ .454 \\ .273 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .273 \\ .454 \\ .273 \end{pmatrix}$$

ในเมื่อไม่มีการเปลี่ยนแปลงในส่วนแบ่งตลาด แสดงว่าเราอยู่ในฐานะดุลภาพ ถ้าเราต้องการประหยัดเวลาลงบ้าง เราอาจจะใช้ดีเตอร์มินันต์เพื่อแก้สมการ (11–14) (11–15) และ (11–13) ดังนี้ :

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & .07 & .083 \\ 0 & -.1 & .067 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -.2 & .07 & .083 \\ .1 & -.1 & .067 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = .273$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} -.2 & 0 & .083 \\ .1 & 0 & .067 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -.2 & .07 & .083 \\ .1 & -.1 & .067 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = .454$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} -.2 & .07 & 0 \\ .1 & -.1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -.2 & .07 & .083 \\ 1 & -.1 & .067 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = .273$$

แน่ละ คำตอบที่ได้จะต้องเหมือนกัน

ส่วนแบ่งตลาดดุลภาพที่เราได้คำนวณไปแล้วตั้งอยู่บนข้อสมมติที่ว่า เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงจะคงที่ตลอดไป หมายความว่าความโน้มเอียงที่ผู้ผลิตนมทั้งสามรายจะสงวนไว้ ได้มาและสูญเสียลูกค้า ไม่มีการเปลี่ยนแปลงจากงวดหนึ่งไปยังอีกงวดหนึ่ง การตั้งสมมติเช่นนี้อาจจะไม่ถูกต้องในหลาย ๆ กรณี แต่ถึงกระนั้นก็ไม่ใช่ข้อเสียหาย เพราะว่าในระหว่างงวดระยะเวลาที่ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงคงที่ เราอาจคำนวณดุลภาพที่จะเกิดขึ้น แต่ถ้าเรามีเหตุผลดีพอที่จะเชื่อว่า ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงแท้ที่จริงเปลี่ยนแปลงไปเรื่อย ๆ อันเป็นผลสืบเนื่องมาจากการกระทำของฝ่ายจัดการ บางอย่างเราอาจจะใช้ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงใหม่ และคำนวณส่วนแบ่งตลาดดุลภาพที่จะเกิดขึ้น ในลักษณะเช่นนั้น เรากำลังใช้ขบวนมาร์คอฟในฐานะที่เป็นเครื่องมือระยะสั้นหรือระยะปานกลางอย่างหนึ่ง

ความสัมพันธ์ของส่วนแบ่งตลาดและดุลภาพ
(Relationship of market shares and equilibrium)

ข้อเท็จจริงที่น่าสนใจประการหนึ่งเกี่ยวกับการวิเคราะห์มาร์คอฟ คือดุลภาพสุดท้ายจะเหมือนกันหมด (ถ้าหากความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงคงที่) ไม่ว่าส่วนแบ่งตลาดของผู้ผลิตหรือผู้ขายแต่ละคน ที่มีอยู่ในระยะเริ่มแรกจะเป็นจำนวนเท่าใดก็ตาม ถ้าหากไม่มีส่วนแบ่งของผู้ใดเท่ากับศูนย์ หมายความว่าเราจะลงเอยด้วยสัดส่วนสุดท้ายของลูกค้าที่

เหมือนกันหมด ไม่ว่าส่วนแบ่งเดิมจะเป็นเท่าใดก็ตาม ตัวอย่างเช่น ถ้าบริษัทผู้ขายสามบริษัทมีส่วนแบ่งตลาดในปัจจุบัน ดังนี้ :

A 30%

B 60%

C 10%

และเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง คือ :

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} .90 & .05 & .20 \\ .10 & .80 & .20 \\ 0 & .15 & .60 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

โดยอาศัยเทคนิคในการคำนวณส่วนแบ่งตลาดดุลภาพ ตามที่กล่าวไปแล้วในตอนก่อน ส่วนแบ่งตลาดดุลภาพที่คำนวณได้จะเท่ากับ A .476, B .381, C .143

ในทางตรงกันข้าม ถ้าส่วนแบ่งตลาดเริ่มแรก คือ :

A 20%

B 45%

C 35%

ส่วนแบ่งตลาดดุลภาพของบริษัททั้งสามจะยังคงเท่าเดิม (A .476, B .381, C .143) ตราบใดที่เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงคงที่ ท่านอาจพิสูจน์ข้อเท็จจริงนี้ด้วยตัวท่านเองด้วยการสังเกตที่ว่า ในการอธิบายขบวนการดุลภาพเราไม่ได้ใช้ส่วนแบ่งตลาดเลย เฉพาะเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงเท่านั้น ที่เข้ามามีส่วนในการกำหนดดุลภาพ

แน่ละ ยิ่งบังเอิญส่วนแบ่งตลาดเริ่มแรก ใกล้เคียงส่วนแบ่งตลาดสุดท้ายหรือดุลภาพเพียงใด เราก็จะได้ดุลภาพเร็วยิ่งขึ้นเพียงนั้น ถ้าส่วนแบ่งของบริษัททั้งสาม ณ จุดเริ่ม คือ :

A 35%

B 40%

C 25%

และส่วนแบ่งสุดท้ายหรือดุลภาพ คือ

A 30%

B 35%

C 35%

เราจะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงไปสู่ดุลภาพเร็วกว่า ในกรณีที่ส่วนแบ่งตลาดเริ่มแรก คือ

A 10%

B 75%

C 15%

ทั้งนี้ เพราะว่าในกรณีแรกก่อนที่จะถึงดุลภาพสุดท้าย จะต้องมีการเปลี่ยนแปลงที่น้อยกว่า แต่สำหรับกรณีหลัง บริษัท A จะต้องได้รับลูกค้ามามากพอที่จะทำให้ส่วนแบ่งตลาดของตนเพิ่มจาก 10 เปอร์เซ็นต์เป็นส่วนแบ่งดุลภาพที่เท่ากับ 30 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งในกรณีแรกก่อนจะมาสู่ดุลภาพ A เพียงแต่ย้ายจาก 35 ลงมาสู่ 30 เปอร์เซ็นต์เท่านั้น

ถ้าแนวความคิดที่ว่าส่วนแบ่งตลาดเริ่มแรก ไม่มีผลต่อส่วนแบ่งดุลภาพสุดท้าย นี้ยังยากต่อการทำความเข้าใจ ลองพิจารณาตัวอย่างดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1.0 & .3 & .1 \\ 0 & .6 & .2 \\ 0 & .1 & .7 \end{pmatrix} \end{array}$$

เราสามารถเห็นได้ทันทีว่า ไม่ว่าส่วนแบ่งตลาดเริ่มแรกของบริษัททั้งสามจะเป็นจำนวนเท่าใดก็ตาม ถ้าหากไม่มีส่วนแบ่งใดเท่ากับศูนย์ ในที่สุด A จะได้ลูกค้าไปทั้งหมด A ไม่ได้สูญเสียลูกค้าที่เขาได้มาจาก B และ C เลย ดังนั้นถ้า A เริ่มด้วย 5 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าในที่สุดเขาจะได้ลูกค้าไปทั้งหมด 100 เปอร์เซ็นต์ แน่ละ ถ้าอัตราร้อยละของลูกค้าที่บริษัท A มีอยู่ในตอนเริ่มแรกยิ่งสูงเท่าใด ก็จะบรรลุดุลภาพได้เร็วเท่านั้น

การใช้ประโยชน์ขบวนมาร์คอฟในกลยุทธ์การตลาด
(Use of Markov Process in Marketing Strategy)

เพื่ออธิบายให้เห็นว่า การวิเคราะห์มาร์คอฟมีประโยชน์ต่อการกำหนดกลยุทธ์การตลาดอย่างไร ลองพิจารณาสถานการณ์ข้างล่างนี้ ซึ่งเป็นเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงของผู้ขายสามคนที่แข่งขันกัน

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} .2 & .1 & .2 \\ .6 & .5 & .3 \\ .2 & .4 & .5 \end{pmatrix} \end{array}$$

การสงวนไว้
และ
การสูญเสีย $\downarrow$

การสงวนไว้
และ
การได้มา
$\longrightarrow$

ถ้ากลยุทธ์การตลาดของบริษัททั้งสามไม่เปลี่ยนแปลง จนมีผลกระทบกระเทือนต่อเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง เราสามารถคาดหมายได้อย่างพอสมเหตุสมผลว่า ส่วนแบ่งตลาดดุลภาพของ A จะเท่ากับ .156, B .434 และ C .410

ผู้ขาย A อาจพิจารณากลยุทธ์การตลาดใหม่ 2 อย่าง เพื่อที่จะทำให้ฐานะที่ค่อนข้างจะเสียเปรียบของตนดีขึ้น ดังนี้ :

กลยุทธ์ที่ 1 ผู้ขาย A พยายามที่จะสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตนให้มากยิ่งขึ้น สมมติว่า กลยุทธ์ที่ 1 นี้ ทำให้ผู้ขาย A สามารถสงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตนจาก 20 เปอร์เซ็นต์เป็น 40 เปอร์เซ็นต์ และสมมติว่า การเปลี่ยนแปลงนี้ทำให้ผู้ขาย A สูญเสียลูกค้าให้แก่ผู้ขาย B น้อยลง

เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงใหม่ จะเป็นดังนี้ :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} .4 & .1 & .2 \\ .4 & .5 & .3 \\ .2 & .4 & .5 \end{pmatrix} \end{array}$$

ส่วนแบ่งตลาดดุลภาพใหม่ตามที่คำนวณได้คือ A .2, B .4 และ C .4 แสดงว่า A อยู่ในฐานะดีขึ้น แม้ว่าการรณรงค์ของ A จะมุ่งต่อ B โดยตรงก็ตาม จะสังเกตได้ว่า C ก็พลอยรับเคราะห์ไปด้วย ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? ทั้งนี้เพราะว่า C ได้ลูกค้าใหม่จาก A และ B แต่ได้จาก B มากกว่าจาก A ดังนั้นเมื่อ B ได้ลูกค้าจาก A น้อยลงอันเป็นผลสืบเนื่องจากกลยุทธ์ของ A จำนวนลูกค้าที่ C ได้จาก B (.4) ก็ลดน้อยลงไปด้วย แต่อย่างไรก็ดี การกระทำของ A ก็มิได้มีผลกระทบกระเทือนต่อ C อย่างรุนแรง เพราะ C ได้ลูกค้าบางส่วนคืนจาก A สำหรับลูกค้าที่ A ได้จาก B

กลยุทธ์ที่ 2 ทางเลือกอีกอย่างหนึ่ง ผู้ขาย A อาจจะพุ่งความพยายามด้านการตลาดของตนไปสู่การยึดลูกค้าที่ผละจาก C สมมติว่า A ได้ออกแบบการรณรงค์เพื่อดึงลูกค้าที่ผละจาก C มาสู่ A เป็นจำนวน .4 แทนที่จะเท่ากับ .2 ตามที่เป็นอยู่ในขณะนี้

เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลง ก็จะกลายมาเป็น :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} .2 & .1 & .4 \\ .6 & .5 & .1 \\ .2 & .4 & .5 \end{pmatrix} \end{array}$$

ถ้าเราคำนวณส่วนแบ่งตลาดดุลภาพซึ่งเป็นผลจากกลยุทธ์นี้ เราจะพบว่าส่วนแบ่งตลาดของผู้ขายทั้งสามคือ A .233, B .391 และ C .376

จากตัวอย่างนี้เราอาจสรุปได้ว่า ถ้าต้นทุนของโปรแกรมทั้งสองเท่ากัน กลยุทธ์ที่ 2 เป็นกลยุทธ์ที่ดีกว่าอย่างไม่ต้องสงสัย จะสังเกตได้อีกครั้งหนึ่งว่า แม้ความพยายามของ A ตามกลยุทธ์ที่ 2 ไม่ได้มุ่งไปทาง B เลยก็ตาม B ก็พลอยสูญเสียลูกค้าบางส่วนอันเป็นผลสืบเนื่องจากโปรแกรมการตลาดของ A ที่มุ่งไปสู่ C ด้วย ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น ? ทั้งนี้เพราะว่าในเดือนหนึ่ง ๆ B เคยได้ลูกค้าจาก C .3 ในขณะที่ความพยายามของ A ทำให้ A ได้ลูกค้าจาก C เป็นจำนวน .4 ส่วนแบ่งของ B ที่ได้จากลูกค้าที่ผละจาก C จึงลดลงเหลือ .1 แต่อย่างไรก็ดี ส่วนแบ่งของ B ก็มิได้ลดลงอย่างฮวบฮาบ เพราะในที่สุด B ก็จะได้ลูกค้าบางส่วนคืนจาก A สำหรับลูกค้าใหม่ที่ A ได้มาจาก C

ในการอธิบายตัวอย่างเกี่ยวกับผู้ผลิตนมของเราในตอนต้นของบทนี้ เพื่อให้การคำนวณเป็นไปโดยง่าย เราได้ตั้งข้อสมมติว่า ไม่มีลูกค้าเก่าออกไปและไม่มีลูกค้าใหม่เข้ามาสู่ตลาดนั้น ๆ ในระหว่างงวดระยะเวลาที่เกี่ยวข้อง เราทราบดีว่ากรณีเช่นนี้เกิดขึ้นได้ยาก ถ้าเป็นเช่นนั้นในกรณีที่มีลูกค้าใหม่เข้ามาสู่ตลาดนี้ และให้การอุดหนุนผู้ผลิตนมรายใดรายหนึ่งและมีลูกค้าเก่าบางคนหายไปหรือออกไปจากตลาดนี้ ประสบการณ์ที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่านี้จะเป็นเช่นไร ? ในภาวการณ์เช่นนี้ผลของการเพิ่มและการสูญเสียทางด้าน (ก) ส่วนแบ่งตลาดที่ได้รับในงวดระยะเวลาอนาคตถัดไป และ (ข) ส่วนแบ่งตลาด ณ ดุลภาพย่อมขึ้นอยู่กับตัวแปรผัน 3 ตัว ดังต่อไปนี้ :

1. ผู้ที่เข้ามาใหม่เริ่มซื้อจากผู้ผลิตนมรายใด
2. ลูกค้าแต่ละคนทำการซื้อจากผู้ผลิตนมรายใด ในขณะที่เขาเลิกให้การอุดหนุน
3. ความจงรักภักดีที่มีต่อตราสินค้าของผู้ที่เข้ามาใหม่ แตกต่างไปจากลักษณะของความจงรักภักดีในตราสินค้าที่เป็นอยู่ ในขณะที่เขาเข้ามาสู่ตลาดนี้ในฐานะเป็นลูกค้าคนหนึ่งเพียงใด

ที่มาของข้อสนเทศ
(Source of information)

บางทีท่านอาจจะสงสัยว่า ธุรกิจที่เรากำลังกล่าวถึงนี้ได้ข้อมูลที่จำเป็นต่อการนำขบวนมาร์คอฟมาใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาด้านการตลาดของเขาได้อย่างไร คำตอบก็คือ ธุรกิจอาจซื้อบริการจากองค์การที่ทำงานทางด้านการวิจัยตลาด องค์การเหล่านี้บางแห่งเก็บรวบรวมข้อสนเทศเกี่ยวกับความจงรักภักดีที่มีต่อตราสินค้า และการสับเปลี่ยนตราสินค้าให้แก่ลูกค้าตัวอย่างเช่น บริษัทวิจัยตลาดแห่งอเมริกา (The Market Research Corporation of America) ได้จัดหาตัวอย่างชุดหนึ่งซึ่งประกอบด้วยครอบครัวหลาย ๆ ครอบครัวในสหรัฐอเมริกาคอยทำการบันทึก และรายงานการซื้อทั้งหลายเกี่ยวกับผลิตภัณฑ์บางอย่างที่มีตราสินค้าไปยัง MRCA

เนื่องจากกลุ่มผู้บริโภคกลุ่มนี้อันประกอบด้วยครอบครัว ซึ่งเป็นหน่วยซื้อสินค้าหน่วยหนึ่งคอยเปิดเผยให้ทราบว่าเขาซื้อสินค้าตราใด ข้อมูลของ MRCA จึงอาจนำไปใช้ประโยชน์ในการวิเคราะห์มาร์คอฟได้ ผู้ขายบางคนจำเป็นจะต้องทำการเก็บรวบรวมข้อสนเทศเกี่ยวกับความชอบพอในตราสินค้าที่แต่ละคนต้องการ เพื่อนำมาใช้ประโยชน์ในขบวนมาร์คอฟ

แบบฝึกหัด

11—1 จงวิเคราะห์เมตริกซ์ของความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงข้างล่างนี้ และกำหนดส่วนแบ่งตลาดดุลภาพของแต่ละบริษัท ให้เหตุผลประกอบคำตอบของท่าน

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{บริษัท X} & \text{บริษัท Y} & \text{บริษัท Z} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{บริษัท X} \\ \text{บริษัท Y} \\ \text{บริษัท Z} \end{array} & \begin{pmatrix} 1.0 & .10 & .10 \\ 0 & .75 & .05 \\ 0 & .15 & .85 \end{pmatrix} \end{array}$$

11—2 ในวันที่ 1 มกราคม ผู้ผลิตนมทั้งสามรายต่างก็มีส่วนแบ่งตลาดของท้องถิ่นหนึ่งหนึ่งในสาม ในระหว่างปีที่ผ่านไปผู้ผลิตนม A สงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตน .90 ในขณะเดียวกันสูญเสียลูกค้าให้แก่ผู้ผลิตนม B .05 และผู้ผลิตนม C .05 ผู้ผลิตนม B สงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตน .85 ในขณะเดียวกันสูญเสียลูกค้าให้แก่ A .10 และให้แก่ C .05 ผู้ผลิตนม C สงวนไว้ซึ่งลูกค้าของตน .80 ในขณะเดียวกันสูญเสียลูกค้าให้แก่ A .10 และให้แก่ B .10 ถ้าลักษณะของการได้มาและการสูญเสียลูกค้ายังคงเป็นไปเหมือนเดิมในปีนี้ ผู้ผลิตนมแต่ละรายจะมีส่วนแบ่งตลาดเท่าไรในวันที่ 1 มกราคมถัดไป ?

11—3 ในวันที่ 1 มิถุนายน บริษัททำขนมปัง A มีส่วนแบ่งตลาดของท้องถิ่นหนึ่ง 40 เปอร์-เซ็นต์ B และ C ต่างมีส่วนแบ่งตลาด 30 เปอร์เซ็นต์ บริษัทวิจัยตลาดได้ค้นพบว่าบริษัททำขนมปัง A สงวนไว้ซึ่ง 85 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าของตน ในขณะเดียวกันได้ลูกค้าจาก B 5 เปอร์เซ็นต์ และจาก C 10 เปอร์เซ็นต์ บริษัททำขนมปัง B สงวนไว้ซึ่ง 90 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าของตน ในขณะเดียวกันได้ลูกค้าจาก A 5 เปอร์เซ็นต์ และจาก C 5 เปอร์เซ็นต์ บริษัททำขนมปัง C สงวนไว้ซึ่ง 85 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าของตน และได้ลูกค้าจาก A 10 เปอร์เซ็นต์และจาก B 5 เปอร์เซ็นต์ ส่วนแบ่งตลาดในวันที่ 1 สิงหาคม และส่วนแบ่งตลาด ณ ดุลภาพของบริษัททำขนมปังแต่ละบริษัทจะเท่ากับเท่าไร ?

11–4 ในวันสิ้นปีของปีที่ผ่านไป บริษัท A มีส่วนแบ่งตลาด 20 เปอร์เซ็นต์ คู่แข่งขันของบริษัทนี้คือบริษัท B และบริษัท C ต่างมีส่วนแบ่งตลาด 40 เปอร์เซ็นต์ ในระหว่างปีที่ผ่านไป การขายของทั้งอุตสาหกรรมมีจำนวน 100 ล้านบาท บริษัท A ได้รับกำไรสุทธิ 5 เปอร์เซ็นต์ของการขาย คาดว่าตัวเลขทั้งสองจะยังคงเหมือนเดิมในปีนี้ ตัวแทนโฆษณาของบริษัท A ได้เสนอว่าถ้า A จ่ายเงินเพิ่มขึ้น 100,000 บาท สำหรับการโฆษณาในปีนี้ A จะสงวนไว้ซึ่ง 85 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าของตน ในขณะเดียวกันจะได้ลูกค้าจาก B 8 เปอร์เซ็นต์และจาก C 7 เปอร์เซ็นต์ คาดว่าบริษัท B จะสงวนไว้ซึ่ง 85 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าของตน ในขณะเดียวกันได้ลูกค้าจาก A 10 เปอร์เซ็นต์และจาก C 3 เปอร์เซ็นต์ ส่วนบริษัท C คาดว่าจะสงวนไว้ซึ่ง 90 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าของตน ในขณะเดียวกันได้ลูกค้าจาก A 5 เปอร์เซ็นต์ และจาก B 7 เปอร์เซ็นต์ บริษัท A ควรจะจ่ายเงินเพิ่มเติมเพื่อการโฆษณาหรือไม่ ?

11–5 สมมติว่าบริษัทสามบริษัทคือ F, B และ C ได้นำมันฝรั่งบดที่อาจปรุงรับประทานได้ทันทีออกสู่ตลาดพร้อม ๆ กัน โดยใช้ตราสินค้าของแต่ละบริษัทในเดือนมกราคม ในตอนเริ่มแรกบริษัทแต่ละบริษัทมีตลาดอยู่ประมาณหนึ่งในสาม วิวัฒนาการต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในระหว่างปีมีดังต่อไปนี้ :

บริษัท F สงวนไว้ซึ่ง 80 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าของตน สูญเสียลูกค้าให้แก่ B 12 เปอร์เซ็นต์ สูญเสียให้แก่ C 8 เปอร์เซ็นต์

บริษัท B สงวนไว้ซึ่ง 70 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าของตน สูญเสียลูกค้าให้แก่ F 20 เปอร์เซ็นต์ สูญเสียให้แก่ C 10 เปอร์เซ็นต์

บริษัท C สงวนไว้ซึ่ง 90 เปอร์เซ็นต์ของลูกค้าของตน สูญเสียลูกค้าให้แก่ F 5 เปอร์เซ็นต์ สูญเสียให้แก่ B 5 เปอร์เซ็นต์

สมมติว่าขนาดของตลาดเท่าเดิม

ก. ในวันสิ้นปีของปีถัดไป บริษัทแต่ละบริษัทจะมีส่วนแบ่งของตลาดทั้งสิ้นเป็นจำนวนเท่าไร ?

ข. ถ้าความเคยชินในการซื้อไม่เปลี่ยนแปลงเลย จงคาดคะเนล่วงหน้าว่าส่วนแบ่งตลาดระยะยาว ณ จุดดุลภาพจะเป็นไปในรูปใด

บทที่ 12

คิว
(QUEUING)

ในอุตสาหกรรมตัวอย่างเกี่ยวกับขบวนการที่ก่อให้เกิดแถวรอคอย (waiting lines) ที่เรียกว่า คิว (queues) มีอยู่มากมาย แถวรอคอยเหล่านี้เกิดขึ้นเมื่อพนักงานบางคน ชิ้นส่วนบางอย่าง เครื่องจักรบางเครื่อง หรือหน่วยงานบางหน่วย ต้องรอคอยบริการจากอุปกรณ์ให้บริการ เพราะอุปกรณ์ให้บริการเหล่านี้ไม่สามารถให้บริการเป็นการชั่วคราว ทั้ง ๆ ที่ได้ปฏิบัติงานตามกำลังการผลิตที่มีอยู่

ผู้ริเริ่มงานทางด้านทฤษฎีคิวคือ เอ. เค. เออร์ลาง (A. K. Erlang) วิศวกรชาวเดนมาร์ก ซึ่งทำงานอยู่ในอุตสาหกรรมโทรศัพท์ ในตอนต้นของศตวรรษนี้ เออร์ลางได้ทำการทดลองเกี่ยวกับความต้องการใช้อุปกรณ์โทรศัพท์ที่เปลี่ยนแปลงขึ้นลง และผลที่มีต่อเครื่องมือหมุนโทรศัพท์อัตโนมัติ ภายหลังสงครามโลกครั้งที่สอง งานในระยะเริ่มแรกนี้จึงถูกขยายออกไปถึงปัญหาทั่วไปอื่น ๆ ที่เกี่ยวกับคิวหรือแถวรอคอย

เรามักจะเห็นปัญหาคิวอย่างง่าย ๆ เกิดขึ้นที่โต๊ะตรวจรับเงินในซุปเปอร์มาร์เกต เราอาจแสดงปัญหาดังกล่าวได้ในลักษณะนี้ :

ในทฤษฎีคิวเราเรียกสถานการณ์นี้ว่า กรณีช่องทางเดียว (single-channel) เพราะการมา (ลูกค้าที่ประสงค์จะจ่ายชำระเงิน) ได้ก่อตัวเป็นแถว ๆ เพื่อคอยรับบริการจากสถานีปฏิบัติงานเพียงแห่งเดียว (ในกรณีนี้คือพนักงานตรวจรับเงิน) การหาคำเฉลยให้กับปัญหาคิวประเภทช่องทางเดียวนี้ อาจทำได้โดยไม่ต้องเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมไปจากสิ่งที่เราได้กล่าวไปแล้ว

สำหรับปัญหาการตรวจรับเงินของซุปเปอร์มาร์เกต ถ้าผู้จัดการซุปเปอร์มาร์เกตต้องการทำให้แถวรอคอยที่ก่อตัวขึ้นที่โต๊ะตรวจรับเงิน ซึ่งจัดให้มีขึ้นเพียงแห่งเดียวสั้นที่สุด เขาอาจจะเพิ่มเครื่องรับเงินสดอีกเครื่องหนึ่งและพนักงานตรวจรับเงินอีกคนหนึ่ง ถ้าคิวที่ก่อตัวขึ้นมายังคงยาวเกินไป เขาอาจจะจัดให้มีโต๊ะตรวจรับเงินเพิ่มขึ้นอีก แน่ละการเพิ่มอุปกรณ์ให้บริการแต่ละครั้งย่อมทำให้ค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น แต่ในขณะเดียวกันก็ทำให้เวลาที่ลูกค้าต้องเสีย

ไปในการรอคอยบริการลดลงไปเรื่อย ๆ ผู้จัดการพยายามหาทางสายกลางที่ทำให้ทุกคนพอใจ เขาต้องการที่จะให้แถวรอคอยสั้นพอที่จะทำให้ความรู้สึกในทางไม่ดีที่เกิดขึ้นในหมู่ลูกค้ามีน้อยที่สุด แต่ในขณะเดียวกันเขาทราบดีว่าเขาไม่สามารถที่จะจัดให้มีอุปกรณ์บริการมากพอที่จะประกันได้ว่าไม่มีคิวหรือแถวรอคอยเกิดขึ้นเลย เมื่อเป็นเช่นนี้ ผู้จัดการจึงต้องทำให้ต้นทุนที่เพิ่มขึ้นอันเนื่องจากการจัดหาอุปกรณ์เพิ่มเติมได้ดุลกับความรู้สึกในทางไม่ดีที่เกิดขึ้นกับลูกค้าในเมื่อความยาวของคิวเพิ่มขึ้น ความรู้สึกในทางที่ไม่ดีที่เกิดขึ้นกับลูกค้าก็จะมีมากขึ้น

ถ้าเราสามารถคำนวณต้นทุนของเวลาที่พนักงานต้องสูญเสียไปในแถวรอคอย และในการจัดหาอุปกรณ์บริการเพิ่มเติมได้อย่างถูกต้อง เราอาจนำทฤษฎีคิวไปใช้ประโยชน์ในอุตสาหกรรมได้มากมาย ปัญหาเหล่านี้ส่วนใหญ่เราสามารถหาคำเฉลยทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องแน่นอนที่จะทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นต่ำสุด ต้นทุนทั้งสิ้นรวม (1) เวลาที่พนักงานต้องสูญเสียไปในการรอคอยบริการ บวกด้วย (2) ค่าจ้างของพนักงานที่ให้บริการ เราจะพิจารณาถึงสถานการณ์เช่นนั้นต่อไป

โรงงานที่ทำการผลิตโดยเครื่องจักร โดยทั่วไปมักจะเก็บรักษาเครื่องมือที่ใช้ในการตัดโลหะราคาแพงที่ต้องใช้ในขบวนการผลิตโดยเครื่องจักร ไว้ที่แหล่งกลางแห่งหนึ่งที่เรียกว่าศูนย์เครื่องมือ ที่ศูนย์นี้จะมีพนักงานหนึ่งคนหรือมากกว่านั้นคอยตรวจจ่ายเครื่องมือตามที่ช่างเครื่องต้องการ จะต้องมีการเก็บบันทึกที่เพียงพอเพื่อวัตถุประสงค์ทางด้านการควบคุม เมื่อช่างเครื่องต้องการเครื่องมือชนิดหนึ่งชนิดใด เขาจะตรงมายังศูนย์เครื่องมือนี้ ยื่นคำอนุมัติการเบิกเครื่องมือให้กับพนักงานบริการและรับเอาเครื่องมือที่ต้องการ เขากลับไปที่เครื่องจักรของตน ทำงานตามหน้าที่ของตนและแล้วกลับไปยังศูนย์เครื่องมือเพื่อตรวจคืนเครื่องมือ เขาอาจจะเบิกเครื่องมืออีกชิ้นหนึ่งสำหรับงานที่ตนจะต้องทำถัดไปถ้าต้องการ เนื่องจากเครื่องมือบางอย่างที่ใช้ในงานชนิดนี้มีราคาแพงมาก จึงจำเป็นต้องดำเนินการตามวิธีดังกล่าว เพื่อให้เป็นที่เชื่อแน่ว่าได้มีการควบคุมเครื่องมือที่มีอยู่อย่างเพียงพอ

ระหว่างเวลาที่ช่างเครื่องต้องรอคอยบริการอยู่ในคิวที่ศูนย์เครื่องมือ เขาอยู่เฉย ๆ ไม่ได้ทำอะไร บริษัทเกิดความสูญเสียทางด้านแรงงาน เราอาจวัดความสูญเสียชนิดนี้ได้เพราะเป็นเพียงจำนวนเวลาที่ช่างเครื่องต้องเสียไปในการรอคอย คูณด้วยค่าจ้างที่เขาได้รับต่อชั่วโมงในทำนองเดียวกัน เมื่อพนักงานที่ประจำอยู่ที่ศูนย์เครื่องมืออยู่เฉย ๆ เพราะไม่มีช่างเครื่องมาขอรับบริการ บริษัทก็สูญเสียแรงงานในรูปของค่าจ้างที่ลูกจ้างได้รับ

วิธีลดเวลาที่ช่างเครื่องต้องรอคอยวิธีหนึ่งได้แก่ การจัดหาพนักงานประจำศูนย์เครื่องมือให้มีจำนวนมากพอเพื่อมิให้มีคิวก่อตัวขึ้น เนื่องจากช่างเครื่องจะมารับบริการในลักษณะเชิงสุ่ม จึงต้องจัดให้มีผู้ปฏิบัติงานประจำอยู่ที่ศูนย์เครื่องจักรเป็นจำนวนมาก ระหว่างเวลาที่ไม่มีช่างเครื่องมารับบริการ ค่าจ้างรวมทั้งหมดของพนักงานบริการกลุ่มใหญ่นี้ ก็จะเป็นการ

สูญเสียอย่างหนึ่งเช่นกัน สิ่งที่เราต้องการคือคำเฉลยทางคณิตศาสตร์ที่ได้นำปัจจัยทุกอย่างของปัญหานี้เข้ามาพิจารณา และกำหนดอัตราส่วนของพนักงานบริการประจำศูนย์เครื่องมือต่อช่างเครื่องในลักษณะที่จะประกันได้ว่าต้นทุนทั้งสิ้นอยู่ในระดับต่ำสุด เราอาจแสดงให้เห็นสถานการณ์ชนิดนี้ได้ดีที่สุด โดยใช้ตัวเลขแทนสิ่งที่ควรจะเป็นเหตุการณ์ที่แท้จริง ดังปรากฏในตาราง 12—1

ตาราง 12—1

พฤติกรรมจำลอง ณ ศูนย์เครื่องมือ	จำนวนพนักงานบริการ			
	1	2	3	4
จำนวนช่างเครื่องถัวเฉลี่ยที่มาในระหว่างผลัด 8 ชั่วโมง	100	100	100	100
เวลาถัวเฉลี่ยที่ช่างเครื่องแต่ละคนต้องสูญเสียไปในการรอรับบริการ (นาที)	10	6	4	1
เวลาที่ช่างเครื่องสูญเสียไปทั้งสิ้นในระหว่างผลัด 8 ชั่วโมง (นาที)	1,000	600	400	100
ค่าจ้างถัวเฉลี่ยของช่างเครื่อง (บาท/ชั่วโมง)	3	3	3	3
มูลค่าของเวลาที่ช่างเครื่องต้องสูญเสียไป (บาท)	50	30	20	5
ค่าจ้างถัวเฉลี่ยของพนักงานบริการประจำศูนย์เครื่องมือ (บาท/ชั่วโมง)	2	2	2	2
ค่าจ้างทั้งสิ้นของพนักงานบริการประจำศูนย์เครื่องมือสำหรับผลัด 8 ชั่วโมง (บาท)	16	32	48	64
เวลาที่ช่างเครื่องสูญเสียไป บวกค่าจ้างพนักงานบริการประจำศูนย์เครื่องมือ (บาท)	66	62	68	69

↑
จำนวนพนักงานบริการ
ประจำศูนย์เครื่องมือที่ดีที่สุด = 2

จากตาราง 12–1 เป็นที่ประจักษ์ว่าถ้าจัดให้มีพนักงานบริการประจำศูนย์เครื่องมือสองคนจะทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นของ (1) เวลาที่ช่างเครื่องต้องสูญเสียไป บวก (2) ค่าจ้างของพนักงานบริการประจำศูนย์ อยู่ในระดับต่ำสุด การจัดให้มีพนักงานบริการมากหรือน้อยกว่าสองคนจะทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นนี้สูงขึ้น

ในสถานการณ์ที่แท้จริงในอุตสาหกรรม คงไม่มีใครต้องการที่จะสังเกตการปฏิบัติงานของช่วงเวลาที่ยาวนานพอที่จะได้มาซึ่งตัวเลขเหล่านี้ การกระทำเช่นนั้นจะเป็นการสิ้นเปลืองทั้งเวลาและเงินทองโดยไม่จำเป็น ในเมื่อเราสามารถหาคำเฉลยปัญหาอย่างเดียวกันโดยใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์บางอย่างที่เกี่ยวกับทฤษฎีคิว เราจะพัฒนาและอธิบายเทคนิคเหล่านี้ในตอนหลัง

ปัญหาพนักงานบริการประจำศูนย์เครื่องมือและช่างเครื่อง เป็นเพียงตัวอย่าง ๆ หนึ่งที่เกี่ยวกับการนำทฤษฎีคิวไปใช้ประโยชน์ ลองพิจารณาตัวอย่างในตาราง 12–2 ตารางนี้แสดงให้เห็นกรณีต่าง ๆ ที่เราอาจนำเทคนิคที่มีประโยชน์นี้ไปใช้เพื่อให้ได้มาซึ่งคำเฉลยสำหรับปัญหาของฝ่ายจัดการโดยทั่ว ๆ ไป ตัวอย่างเหล่านี้เป็นเพียงโอกาสบางอย่างที่เราอาจนำทฤษฎีคิวหรือแถวรอคอยไปใช้ ต่อไปเราจะพิจารณาถึงที่มาของความคิดขั้นมูลฐานของเครื่องมือของฝ่ายจัดการอันนี้

ตาราง 12–2

สถานการณ์	คิวหรือแถวรอคอย	อุปกรณ์บริการ
การบริการอาหาร	ลูกค้าที่คอยรับประทานอาหาร	บริกร
ปั๊มน้ำมัน	ผู้ขับรถยนต์ที่คอยบริการ	พนักงานบริการ
สำนักงานทันตแพทย์	ผู้ป่วย	ทันตแพทย์
โรงงานทอผ้า	เครื่องทอผ้าที่คอยการซ่อมแซม	ช่างซ่อมเครื่องทอผ้า
คลังสินค้าชิ้นส่วน	ช่างเครื่องที่มาขอเบิกชิ้นส่วน	พนักงานจัดมอบชิ้นส่วน
หน่วยงานประกอบ	คนงานที่คอยงานที่ประกอบยังไม่สำเร็จ	คนงานที่กำลังปฏิบัติการประกอบอยู่

อัตราการมาและอัตราการให้บริการ
(Arrival Rates and Servicing Rates)

ทฤษฎีคิวก็มีศัพท์ของตนเองเช่นเดียวกับสาขาวิชาอื่น ๆ เราจะต้องเรียนรู้ศัพท์เหล่านี้ก่อนที่เราจะศึกษาถึงวิธีทางคณิตศาสตร์ ในการกำหนดจำนวนพนักงานที่ดีที่สุดให้แก่อุปกรณ์

ให้บริการ ในระหว่างศัพท์ต่าง ๆ เหล่านี้มีคำว่า อัตราการมา (arrival rate) และอัตราการให้บริการ (servicing rate)

อัตราการมา คืออัตราถัวเฉลี่ยที่บุคคลหรือสิ่งของมาปรากฏที่อุปกรณ์ให้บริการเพื่อรับบริการ ตัวอย่างเช่น อัตราการมาอาจเป็นไปในรูปของจำนวนคนงานที่มาถึงโรงอาหารของบริษัทเพื่อรับประทานอาหารเที่ยง ในอีกกรณีหนึ่ง อัตราการมาอาจแทนจำนวนรถที่มาถึงด่านเก็บเงินค่าผ่านถนนที่ตั้งอยู่บนสะพานแห่งหนึ่ง โดยทั่วไปอัตราการมามักจะแสดงในรูปอัตราของการมาต่อหนึ่งหน่วยเวลา อาจจะเป็นคนงาน 60 คนต่อชั่วโมง หรือรถ 180 คันต่อชั่วโมง

อัตราการให้บริการ หมายถึง อัตราที่อุปกรณ์ให้บริการสามารถให้บริการแก่บุคคลหรือสิ่งของที่เข้ามารับบริการ อัตราการให้บริการก็แสดงเป็นอัตราต่อหน่วยเวลา และอาจเป็นไปในรูปของจำนวนใบสมัคร ที่สำนักงานฝ่ายการพนักงานสามารถที่จะดำเนินการได้ต่อชั่วโมง (เช่น 75 ฉบับต่อชั่วโมง) หรือจำนวนคำขอเบิกของคงคลังที่คลังสินค้าสามารถให้บริการได้ (ตัวอย่างเช่น 65 รายต่อวัน)

คำว่า **"ระเบียบคิว"** (queue discipline) หมายถึงลักษณะการเลือกให้บริการแก่ลูกค้าที่เข้ามารับบริการ เรามีวิธีการดำเนินการได้หลายอย่าง โดยปกติลูกค้าที่มารับบริการจะอยู่ในแถวรอคอยตามหลักมาก่อน—อยู่ในแถวก่อน (first-come—first-in-line basis) ในทำนองเดียวกัน ลูกค้าที่อยู่ในแถวโดยปกติจะได้รับบริการตามหลักผู้ที่อยู่ในแถวคนถัดไป—ได้รับบริการถัดไป (next-in-line—next-served basis) แต่ในบางกรณีก็มิได้เป็นไปในลักษณะนี้ เป็นต้นว่าอาจมีการจัดให้มีลำดับก่อนหลังแตกต่างไปจากการจัดลำดับที่ถือปฏิบัติกันโดยทั่วไปดังที่กล่าวไปแล้ว การจัดลำดับก่อนหลังนี้อาจมีการรับรู้ความเร่งด่วนของบริการตามที่ขอมา ลูกค้าบางคนอาจมีสิทธิพิเศษกว่าคนอื่น ๆ และไม่ต้องเข้าคิวเลย ในปัญหาคิวที่เราจะศึกษาในบทนี้เราจะถือปฏิบัติตามการจัดลำดับตามปกติแบบมาก่อน—อยู่ในแถวก่อน และอยู่ในแถวก่อนได้รับบริการก่อน

ลักษณะการกระจายของการมา และเวลาที่ใช้ไปในการให้บริการ มีผลต่อการหาคำเฉลยให้กับปัญหาคิวมาก ตัวอย่างเช่น การมาอาจเป็นไปในลักษณะเชิงสุ่มในระยะยาว หรืออัตราการมาอาจเป็นไปอย่างสม่ำเสมอ กล่าวคือ อัตรานั้นไม่เปลี่ยนแปลงเลยถ้าเป็นการมาในลักษณะเชิงสุ่ม ลูกค้าที่ต้องการบริการจะเข้ามาในลักษณะหรือลำดับที่ไม่สมเหตุสมผลตามหลักตรรกวิทยาในระยะยาว ในวันหนึ่งอาจมีลูกค้าเข้ามา 95 คนในห้านาทีแรก ในขณะที่งวดห้านาทีอีกงวดหนึ่งมีลูกค้าเข้ามาเพียง 4 คนเท่านั้น ในทางตรงกันข้าม อัตราการมาที่สม่ำเสมอได้แก่กรณีที่การมาอยู่ในความถี่ที่สม่ำเสมอตลอดเวลา ตัวอย่างเช่น ตลอดระยะ

เวลาที่เปิดทำงานทุก ๆ หนึ่งนาทีมีลูกค้าเข้ามา 5 คน ในสถานการณ์ธุรกิจปกติโดยทั่วไปการมามักจะมีการกระจายในลักษณะเชิงสุ่ม

แม้ว่าการมาจะมีการกระจายในลักษณะเชิงสุ่มก็ตาม เราก็สามารถคำนวณการมาถัวเฉลี่ยได้ถ้าใช้งวดเวลาที่ยาวนานพอ ถ้าเราสังเกตขบวนการสำหรับงวดเวลาที่ยาวนานพอ เราสามารถคำนวณจำนวนลูกค้าทั้งสิ้นที่มารับบริการภายในช่วงระยะเวลานั้น เมื่อหารจำนวนลูกค้าทั้งสิ้นด้วยช่วงระยะเวลา เราจะได้อัตราถัวเฉลี่ยของการมาในระยะยาว

เวลาที่ใช้ไปในการให้บริการก็อาจกระจายในลักษณะเชิงสุ่มหรือสม่ำเสมอ ในกรณีที่เวลาที่ใช้ไปในการให้บริการกระจายในลักษณะเชิงสุ่ม การให้บริการแก่ลูกค้าคนแรก อาจใช้เวลาเพียงห้านาที แต่อุปกรณ์ให้บริการอาจจะต้องใช้เวลาถึงหนึ่งชั่วโมงเพื่อดำเนินการกับลูกค้าคนถัดไป การที่เวลาที่ใช้ไปในการให้บริการเป็นไปในลักษณะเชิงสุ่ม โดยปกติสืบเนื่องมาจากลักษณะของบริการที่ต้องการ ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่เป็นอุปกรณ์ซ่อมแซมซึ่งทำหน้าที่ซ่อมแซมเครื่องยนต์ขนาดเล็ก เครื่องยนต์เครื่องหนึ่งที่มารับบริการอาจต้องการเพียงงานบัดกรีเล็กน้อยบนปลายเส้นลวดเส้นหนึ่ง แต่เครื่องยนต์เครื่องถัดไปที่มารับบริการอาจต้องการให้พันเครื่องใหม่ทั้งเครื่อง เป็นต้น

เวลาที่ใช้ไปในการให้บริการอาจเป็นไปในลักษณะสม่ำเสมอ รายการแต่ละรายการที่มารับบริการอาจต้องใช้เวลาเท่า ๆ กับรายการอื่น ตัวอย่างเช่น กรณีที่ผู้ตรวจสอบวัดขนาดของชิ้นส่วนสำเร็จรูปและเซ็นชื่อไว้ในแบบตรวจสอบ ถ้าชิ้นส่วนสำเร็จรูปเหล่านั้นมีขนาดเท่ากันหมด ก็ไม่มีเหตุผลว่า ทำไมจึงต้องใช้เวลาในการตรวจสอบชิ้นส่วนหนึ่งยาวนานกว่าการตรวจสอบอีกชิ้นส่วนหนึ่ง แม้ว่าในตัวอย่างง่าย ๆ ข้างล่างนี้เราได้ตั้งข้อสมมติว่า อัตราการมาและเวลาที่ใช้ไปในการให้บริการเป็นไปอย่างสม่ำเสมอแทนที่จะเป็นไปในลักษณะเชิงสุ่มก็ตาม ในตอนถัดไปเราก็จะเข้าไปถึงจุดที่เราสามารถศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราการมาและการให้บริการที่มีการกระจายเชิงสุ่ม

เราอาจอธิบายให้เห็นกรณีที่อัตราการมา และอัตราการให้บริการเป็นไปอย่างสม่ำเสมอโดยใช้ตัวอย่างต่อไปนี้

1. **ไม่มีคิว มีเวลาว่าง** สมมติว่า การมาเกิดขึ้นในอัตราที่สม่ำเสมอ 10 ต่อชั่วโมงในแต่ละชั่วโมงและทุก ๆ ชั่วโมงจะมีการมา 10 โดยเกิดขึ้นทุก ๆ 6 นาที สมมติว่า การให้บริการก็ดำเนินไปในอัตราที่สม่ำเสมอเช่นกัน 12 ต่อชั่วโมงทุก ๆ ชั่วโมง ในสถานการณ์เช่นนี้จะไม่มีคิวเกิดขึ้น เพราะอุปกรณ์ให้บริการสามารถจัดการกับงานที่เข้ามาทั้งหมดได้อย่างสบายความจริงเราอาจคำนวณได้อย่างง่าย ๆ ว่า อุปกรณ์ให้บริการจะอยู่ว่าง 2/12 หรือ 16.67 เปอร์เซ็นต์ของเวลาทั้งหมด เพราะการมาเท่ากับ 10/12 ของกำลังการให้บริการเท่านั้น

2. **ไม่มีคิว ไม่มีเวลาว่าง** สมมติใหม่ว่า การมาเกิดขึ้นในอัตราที่สม่ำเสมอ 10 ต่อชั่วโมง ในแต่ละชั่วโมงและทุก ๆ ชั่วโมงจะมีการมา 10 โดยเกิดขึ้นทุก ๆ ช่วง 6 นาทีในระหว่างชั่วโมงนั้น สมมติว่าการให้บริการสามารถและดำเนินไปในอัตราสม่ำเสมอเช่นกัน 10 ต่อชั่วโมงทุก ๆ ชั่วโมง ในสถานการณ์เช่นนี้จะไม่มีคิวเกิดขึ้น เพราะอัตราให้บริการเท่ากับอัตราการมา ในสถานการณ์เช่นนี้จะไม่มีเวลาว่างเกิดขึ้นกับอุปกรณ์ให้บริการ เพราะจะต้องดำเนินการเต็มกำลังเพื่อให้บริการกับการมา

3. **มีคิว ไม่มีเวลาว่าง** สมมติใหม่ว่า การมาเกิดขึ้นในอัตราที่สม่ำเสมอ 10 ต่อชั่วโมง โดยเกิดขึ้นทุก ๆ 6 นาทีในระหว่างชั่วโมงนั้น สมมติว่าการให้บริการก็ดำเนินไปในอัตราที่สม่ำเสมอเช่นกัน 8 ต่อชั่วโมงทุก ๆ ชั่วโมง ในสถานการณ์เช่นนี้คิวจะเกิดขึ้นและมีความยาวเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ เพราะอัตราการมาสูงกว่าความสามารถของอุปกรณ์ให้บริการในการที่จะจัดการกับสิ่งที่เข้ามารับบริการได้ คิวของการมาที่ยังไม่ได้รับบริการจะสร้างสมในอัตรา 2 หน่วยต่อชั่วโมงซึ่งเท่ากับส่วนเกินของการมาที่มีมากกว่ารายที่ได้รับบริการ ตัวอย่างเช่น เมื่อสิ้นชั่วโมงที่ 7 โดยปกติเราอาจคาดหมายได้ว่าจะมี 14 หน่วยอยู่ในคิว

ดังนั้น ถ้าตั้งข้อสมมติว่าการมาและเวลาให้บริการเป็นไปอย่างสม่ำเสมอ เราสามารถที่จะคำนวณได้อย่างง่าย ๆ ว่าจะเกิดคิวหรือไม่ และความยาวของคิวจะเท่ากับเท่าใดเมื่อสิ้นงวดเวลางวดใดงวดหนึ่ง แต่ถ้าเราหันไปพิจารณากรณีปกติซึ่งเป็นกรณีที่การมาและการให้บริการมีการกระจายเชิงสุ่ม และการมาและการให้บริการไม่ได้เกิดขึ้นในช่วงเวลาที่แน่นอน ปัญหาและการคำนวณก็จะมีความยุ่งยากยิ่งขึ้น เป็นต้นว่า ถ้าเราให้การมาและการให้บริการมีการกระจายในลักษณะเชิงสุ่ม แม้ว่าอุปกรณ์ให้บริการจะมีกำลังมากกว่าการมาถัวเฉลี่ยก็ตาม บุคคลหรือสิ่งของกลุ่มหนึ่งที่เข้ามารับบริการพร้อม ๆ กัน ก็อาจก่อให้เกิดคิวขึ้นชั่วคราวได้ และในทำนองเดียวกัน การมาที่ลดลงชั่วคราวอาจช่วยให้อุปกรณ์บริการเร่งรัดและขจัดคิวที่เกิดขึ้นก่อนให้หมดไปได้

การเฉลยปัญหาคิวโดยวิธีจำลอง (Simulation Method of Solving Queuing Problems)

เราจะจัดการกับปัญหาคิวที่การมาและเวลาบริการ มีการกระจายเชิงสุ่มได้อย่างไร ? วิธีที่ดีวิธีหนึ่งคือการจำลองปัญหาทั้งหมด ซึ่งหมายถึงการออกแบบการทดลองให้ใกล้เคียงกับสถานการณ์ที่แท้จริงให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ และสังเกตดูว่าอะไรจะเกิดขึ้น วิธีการจำลองนี้เป็นวิธีที่ได้ผลกว่าในการจัดการกับปัญหาคิวประเภทนี้

ต่อไป เราจะใช้อะไรในการจำลองการมาเชิงสุ่มที่อุปกรณ์ให้บริการ ? เราอาจจะอาศัยตารางตัวเลขเชิงสุ่ม (ดูตารางผนวก 3) ตารางตัวเลขเชิงสุ่มคือกลุ่มของตัวเลขกลุ่มหนึ่งที่ไม่ได้จัดเรียงตามลำดับ กล่าวคือ ตัวเลขเหล่านี้จะปะปนกันไปหมดและไม่มีตัวเลขใดมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นถัดไปมากกว่าตัวเลขอื่น ๆ โดยอาศัยตัวเลขเชิงสุ่ม เราอาจจำลองการดำเนินงานของอุปกรณ์บริการโดยไม่ต้องใช้คณิตศาสตร์ที่สับสน และคำนวณจำนวนพนักงานบริการที่ดีที่สุด ที่จะประจำ ณ อุปกรณ์บริการนั้นให้ได้ความสัมพันธ์กับการมา

ตัวอย่าง สมมติว่าโรงงานแห่งหนึ่งมีคลังสินค้าของคงคลัง ซึ่งทำหน้าที่จ่ายวัตถุดิบให้กับหัวหน้าคนงานที่มาสู่คลังสินค้านั้นพร้อมด้วยคำขอเบิกที่ได้รับอนุมัติอย่างถูกต้อง ในขณะนี้ทางโรงงานได้มอบหมายให้พนักงาน 2 คนทำหน้าที่ประจำอยู่ที่คลังสินค้า หัวหน้าคนงานที่ใช้คลังสินค้ามีจำนวน 10 คนตลอดมา ผู้จัดการโรงงานได้สังเกตเห็นว่าในบางครั้งเกิดมีแถวรอคอย (หัวหน้าคนงานรอคอยบริการ) ที่คลังสินค้า เขาสงสัยว่าการให้พนักงาน 2 คนไปทำงานประจำอยู่ที่โต๊ะบริการที่คลังสินค้าจะเป็นการเพียงพอหรือไม่ เขาจึงได้มอบปัญหานี้ให้แก่ผู้ช่วยของเขาเพื่อหาคำเฉลยและจัดทำข้อเสนอแนะต่อไป

ผู้ช่วยได้สังเกตการดำเนินงานของคลังสินค้าสำหรับช่วงหนึ่งชั่วโมง ซึ่งกระจายออกไปในระหว่างเวลาหนึ่งเดือน กำหนดการของช่วงหนึ่งชั่วโมงเหล่านี้ได้กระจายออกไปในลักษณะเชิงสุ่มในระหว่างวัน เพื่อที่จะได้รวมไว้ซึ่งกิจกรรมของช่วงเวลาต่าง ๆ อย่างสมเหตุสมผล ในระหว่างการสังเกตการดำเนินงานของคลังสินค้า ผู้ช่วยได้รวบรวมข้อมูลต่อไปนี้ :

เวลาถัวเฉลี่ยระหว่างคำขอ : 5 นาที
จำนวนคำขอบริการที่สังเกตได้ทั้งสิ้น : 150
ระยะเวลาบริการที่แตกต่างกันและจำนวนที่สังเกตได้ :

8 นาที	15
9 นาที	30
10 นาที	45
11 นาที	60
คำขอทั้งสิ้น	150

นอกจากทำการบันทึกข้อมูลข้างต้นแล้ว ผู้ช่วยได้แบ่งเวลาสังเกตออกเป็นช่วงห้านาทีและบันทึกจำนวนหัวหน้าคนงานที่มาในแต่ละช่วง เขาพบว่าภายในเวลาห้านาทีใด ๆ ที่กำหนด

ให้ โอกาสที่หัวหน้าคนงานจะมายังคลังสินค้านั้นหนึ่งคนหรือมากกว่านั้นเท่ากับ 100 เปอร์เซ็นต์

เมื่อสิ้นสุดงวดการสังเกตแล้ว ผู้ช่วยได้ทำตารางสรุปผลของการสังเกตดังต่อไปนี้ :

อัตราร้อยละของการกระจายของเวลาบริการ :

15/150	=	10 %	(8 นาที)
30/150	=	20 %	(9 นาที)
45/150	=	30 %	(10 นาที)
60/150	=	40 %	(11 นาที)

ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของเวลาบริการ :

10 %	×	8 นาที	=	0.8 นาที
20 %	×	9 นาที	=	1.8 นาที
30 %	×	10 นาที	=	3.0 นาที
40 %	×	11 นาที	=	4.4 นาที
เวลาบริการถัวเฉลี่ย				10.0 นาที

โดยอาศัยข้อสนเทศนี้ ผู้ช่วยก็พร้อมที่จะจำลองการดำเนินงานของคลังสินค้าวัตถุดิบ โดยใช้ตารางตัวเลขเชิงสุ่มดังเช่นตารางผนวก 3 ตัวเลขเหล่านี้เริ่มจาก 0 ถึง 9 ตามที่เราได้สังเกตในตอนต้นแล้วว่า ตัวเลขเหล่านี้จะไม่เกิดขึ้นตามลำดับก่อนหลังอย่างหนึ่งอย่างใดแม้ว่าในงวดระยะเวลายาวตัวเลขแต่ละตัวจะเกิดขึ้นเป็นจำนวนครั้งที่เท่ากันก็ตาม

ในขั้นแรกเราจะพิจารณาการจำลองหัวหน้าคนงานที่มายังคลังสินค้าวัตถุดิบก่อน เราทราบแล้วว่าหัวหน้าคนงานจะมาในลักษณะเชิงสุ่ม แต่โอกาสที่จะมีหัวหน้าคนงานมาหนึ่งคนหรือมากกว่านั้นมายังคลังสินค้าวัตถุดิบ ภายในงวดห้านาทีหนึ่ง ๆ ที่กำหนดให้เท่ากับ 100 เปอร์เซ็นต์ ในเมื่อเรามีตัวเลขอยู่ 10 ตัว (คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) เราอาจจะเลือกตัวเลขตัวหนึ่งตัวใดจากตัวเลขเหล่านี้ (อาจจะเลือก 7) และให้ตัวเลขนั้นแทนหัวหน้าคนงานที่มา เนื่องจากตัวเลข 7 จะปรากฏโดยถัวเฉลี่ยหนึ่งครั้งในกลุ่มของตัวเลข 10 ตัวแต่ละกลุ่ม ตัวเลขนี้จึงแทนโอกาสที่หัวหน้าคนงานจะมา 100 เปอร์เซ็นต์

ต่อไปถ้าเราแบ่งการจำลองของเราออกเป็นงวดการดำเนินงานห้านาที และถ้าเราอ่านรายการตัวเลขเชิงสุ่ม 10 ตัวที่แตกต่างกันสำหรับงวดจำลองแต่ละงวด จำนวนเลข 7

ที่เราพบในตัวเลขเชิงสุ่ม 10 ตัวแต่ละชุด จะแทนจำนวนหัวหน้าคนงานที่มาในระหว่างงวดนั้น

เราได้จำลองหัวหน้าคนงานที่มายังคลังสินค้าวัตถุดิบสำหรับงวดห้านาทีทั้งสิ้น 24 งวด จำนวน 24 งวดนี้ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจำนวนงวดที่ดีที่สุดของการจำลอง แต่เนื่องจากวิธีการจำลองจะเหมือนกันหมดไม่ว่าจำนวนงวดจะเท่ากับ 10, 20 หรือแม้กระทั่ง 100 เราจึงได้เลือกจำนวนงวดการจำลองที่น้อยที่สุดที่พอสมเหตุสมผล เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบาย

เพื่อเป็นการอธิบายวิธีการจำลองหัวหน้าคนงานที่มายังคลังสินค้าวัตถุดิบ เราจะนำตัวเลขต่าง ๆ ของตัวเลขเชิงสุ่ม 10 ตัว 12 ชุดแรกมาเขียนใหม่อีกครั้งหนึ่ง และสังเกตตัวเลข 7 ที่ปรากฏในแต่ละชุด เราจะอ่านจากซ้ายไปขวาสำหรับแถวนอน ตัวเลขเชิงสุ่มสามแถวแรกของตารางผนวก 3

1581922396	(ไม่มี)
2068577984	2
8262130892	(ไม่มี)
8374856049	1
4637567488	2
0928105582	(ไม่มี)
7295088579	2
9586111652	(ไม่มี)
7055508767	3
6472382934	1
4112077556	2
3440672486	1

เราได้จำลองหัวหน้าคนงานที่มายังคลังสินค้าวัตถุดิบ โดยใช้จำนวนหัวหน้าคนงานที่มาที่เราเพิ่งคำนวณข้างต้นสำหรับงวดห้านาที 12 งวดแรก และใช้เทคนิคอย่างเดียวกันนี้ในการคำนวณจำนวนหัวหน้าคนงานที่มาในระหว่างงวดห้านาที 12 งวดถัดไป ผลของการจำลองทั้ง 24 งวดปรากฏในตาราง 12—3

ตาราง 12—3

งวดที่	จำนวนหัวหน้าคนงานที่มา	งวดที่	จำนวนหัวหน้าคนงานที่มา
1	0	13	0
2	2	14	0
3	0	15	1
4	1	16	4
5	2	17	1
6	0	18	1
7	2	19	1
8	0	20	0
9	3	21	0
10	1	22	1
11	2	23	0
12	1	24	2

หลังจากที่ได้จำลองหัวหน้าคนงานที่มายังคลังสินค้าเสร็จแล้ว ต่อไปเราก็จะหันความสนใจของเราไปสู่การจำลองเวลาบริการที่จะต้องให้กับหัวหน้าคนงานแต่ละคนที่มาข้างต้น จากถ้อยแถลงของปัญหานี้เราทราบแล้วว่าเวลาบริการเหล่านี้มีการแจกแจงในลักษณะเชิงสุ่ม เราได้รวบรวมข้อมูลจำนวนมากพอที่จะทำให้เราใช้ประโยชน์ตารางตัวเลขเชิงสุ่ม เพื่อแทนหรือจำลองการแจกแจงเชิงสุ่มนี้

ลองพิจารณาการแจกแจงของเวลาบริการที่สังเกตได้อีกครั้งหนึ่ง :

8 นาที	10 %
9 นาที	20 %
10 นาที	30 %
11 นาที	40 %

เนื่องจากเรายังคงใช้ตัวเลขเชิงสุ่มชุดเดิม (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) เราอาจแบ่งตัวเลขเหล่านี้ออกตามลำดับ ดังนี้ :

ให้ 0 แทนความน่าจะเป็นของเวลาบริการที่เท่ากับ 8 นาที

ให้ 1 และ 2 แทนความน่าจะเป็นของเวลาบริการที่เท่ากับ 9 นาที

ให้ 3, 4 และ 5 แทนความน่าจะเป็นของเวลาบริการที่เท่ากับ 10 นาที

ให้ 6, 7, 8 และ 9 แทนความน่าจะเป็นของเวลาบริการที่เท่ากับ 11 นาที

เนื่องจากโอกาสที่เราจะได้ 0 มีอยู่ 1 ใน 10 0 จึงแทนความน่าจะเป็นที่เท่ากับ .1 เนื่องจากโอกาสที่เราจะได้ 1 หรือ 2 มีอยู่ 2 ใน 10 ตัวเลขทั้งสองรวมกันเข้าจึงแทนความน่าจะเป็นที่เท่ากับ .2 เนื่องจากโอกาสที่เราจะได้ 3, 4 หรือ 5 มีอยู่ 3 ใน 10 ตัวเลขทั้งสามรวมกันเข้าจึงแทนความน่าจะเป็นที่เท่ากับ .3 เนื่องจากโอกาสที่เราจะได้ 6, 7, 8 หรือ 9 มีอยู่ 4 ใน 10 ตัวเลขทั้งสี่รวมกันเข้าจึงแทนความน่าจะเป็นที่เท่ากับ .4 ในลักษณะเช่นนี้ เราสามารถที่จะจำลองเวลาบริการที่มีการแจกแจงในลักษณะเชิงสุ่ม โดยอาศัยตารางตัวเลขเชิงสุ่ม

ในการอธิบายวิธีการนี้ เราจะหันไปยังงวดห้านาทีแรกของการจำลองในตาราง 12–3 และพิจารณาจำนวนหัวหน้าคนงานที่มาในแต่ละงวด ไม่มีหัวหน้าคนงานมาในระหว่างงวดห้านาทีแรก

เมื่อพิจารณางวดห้านาทีที่สองของกิจกรรมตามที่ได้จำลองไว้ เราจะเห็นได้ว่ามีหัวหน้าคนงานมา 2 คน ในการจำลองเวลาบริการสำหรับหัวหน้าคนงานทั้งสองนี้ เราหันไปใช้ตารางตัวเลขเชิงสุ่ม ในการจำลองเวลาบริการเราได้เลือกใช้ตัวเลขเชิงสุ่ม ที่เริ่มจากทางซ้ายมือของแถวนอนที่สี่นับจากข้างล่างของตาราง ตัวเลขเชิงสุ่มสองตัวแรกที่อยู่ในแถวนอนนี้คือ 9 และ 8 จากการใช้ตัวเลขต่าง ๆ แทนเวลาบริการตามที่ระบุไว้ข้างบนนี้ ในการให้บริการแก่หัวหน้าคนงานที่มาสองคนแรกจะต้องใช้เวลาคนละ 11 นาที

เพื่อความกระจ่างเราจะอธิบายขบวนการนี้อีกครั้งหนึ่ง เราจะพิจารณางวดห้านาทีที่สาม และจากตาราง 12–3 เราจะสังเกตได้ว่าไม่มีหัวหน้าคนงานมาในระหว่างเวลานี้ เราจึงพิจารณาต่อไปยังงวดที่สี่ซึ่งมีหัวหน้าคนงานมา 1 คน ตัวเลขเชิงสุ่มตัวที่สามในแถวนอนที่เราเลือกใช้คือ 4 ซึ่งชี้ให้เห็นว่าในการให้บริการแก่หัวหน้าคนงานที่มานี้ต้องใช้เวลา 10 นาที ถ้าไม่มีหัวหน้าคนงานมา เราจะไม่กระโดดข้ามตัวเลขตัวหนึ่งโดยดำเนินการผ่านขบวนการข้างต้น สำหรับงวดการจำลองทั้งหมด 24 งวดเราก็จะได้ตาราง 12–4 ที่สำเร็จบริบูรณ์ เราได้ให้ตัวเลขที่มีวงกลมล้อมรอบแทนหัวหน้าคนงานแต่ละคนที่มายังคลังสินค้า

ตาราง 12—4

เวลาบริการตามที่ได้จำลองไว้สำหรับ 24 งวด

งวดที่	จำนวนหัวหน้าคนงานที่มา	เวลาบริการที่ให้กับหัวหน้าคนงานแต่ละคน		
1	0			
2	2	(1) 11 นาที		(2) 11 นาที
3	0			
4	1		(3) 10 นาที	
5	2	(4) 11 นาที		(5) 10 นาที
6	0			
7	2	(6) 9 นาที		(7) 10 นาที
8	0			
9	3	(8) 10 นาที	(9) 10 นาที	(10) 11 นาที
10	1		(11) 11 นาที	
11	2	(12) 10 นาที		(13) 8 นาที
12	1		(14) 11 นาที	
13	0			
14	0			
15	1		(15) 11 นาที	

ตาราง 12—4 (ต่อ)

งวดที่	จำนวนหัวหน้าคนงานที่มา	เวลาบริการที่ให้กับหัวหน้าคนงานแต่ละคน
16	4	16 10 นาที 17 11 นาที 18 11 นาที 19 11 นาที
17	1	20 9 นาที
18	1	21 8 นาที
19	1	22 11 นาที
20	0	
21	0	
22	1	23 11 นาที
23	0	
24	2	24 9 นาที 25 11 นาที

หลังจากที่ได้จำลองทั้งหัวหน้าคนงานที่มายังคลังสินค้า และเวลาที่ต้องใช้ไปในการให้บริการแก่หัวหน้าคนงานแต่ละคนแล้ว เราก็พร้อมที่จะจำลองการดำเนินงานทั้งหมดของคลังสินค้า เราต้องการที่จะกำหนดจำนวนพนักงานบริการประจำคลังสินค้าที่ดีที่สุด เพื่อทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นในการดำเนินงานคลังสินค้าบวกเวลาที่หัวหน้าคนงานต้องสูญเสียไปในการรอคอยชิ้นส่วนอยู่ในระดับต่ำสุด

เราจะใช้กฎคนที่มาก่อนได้รับบริการก่อนเป็นกฎมูลฐานในการให้บริการ หมายความว่า พนักงานบริการจะให้บริการแก่หัวหน้าคนงานที่มาถึงคลังสินค้าตามลำดับ ในการอธิบายเกี่ยวกับการดำเนินงานทั้งหมด วิธีที่ดีที่สุดคือใช้มาตราส่วนเวลาที่ครอบคลุมไปถึงงวดการจำลองทั้งหมด เนื่องจากงวด 5 นาทีตามที่ได้จำลองไว้ 24 งวดยาวมากจนกระทั่งต้องยืดกระดาษออกไปวางต่อเข้าด้วยกัน เราจึงแก้ปัญหานี้โดยใช้มาตราส่วนเวลาที่ถูกจัดวางไว้ภายใต้มาตราส่วนเวลาอีกอันหนึ่งภายในหน้าเดียวกัน แต่ละหน่วยหรือแต่ละส่วนแทน 15 นาที เราจึงต้องใช้มาตราส่วนแทนงวดการจำลอง 8 อัน เราจะเริ่มการจำลองจากสมมติว่า 9 น. เพื่อให้ง่ายต่อการอ้างอิงถึงหัวหน้าคนงานที่มา เราจะใช้ตัวเลขที่มีวงกลมล้อมรอบตามที่กำหนดไว้

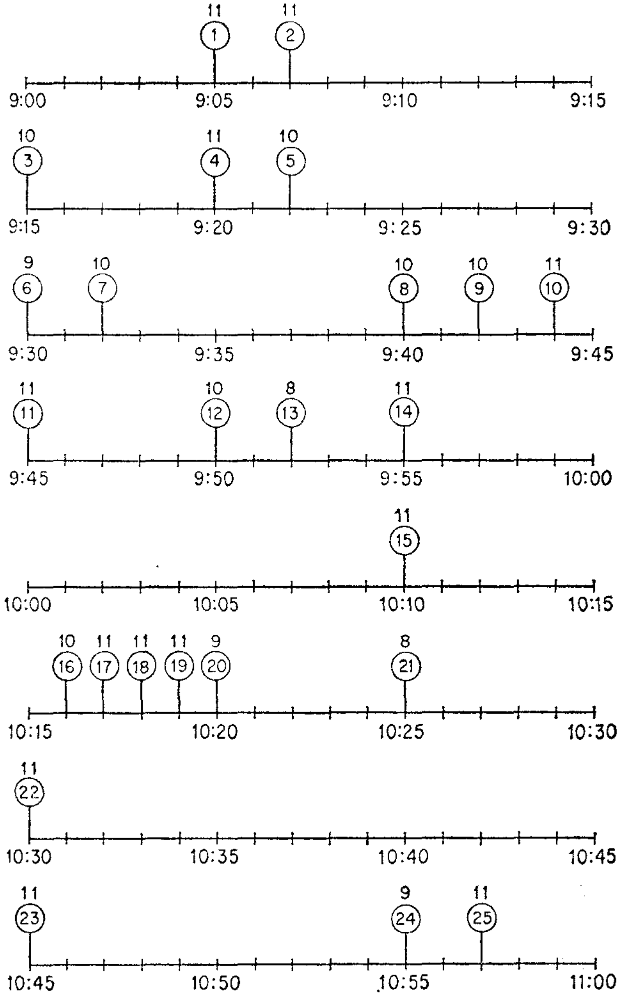
ในตาราง 12–4 ตัวเลขที่อยู่เหนือหัวหน้าคนงานแต่ละคนคือเวลาบริการที่ให้กับหัวหน้าคนงานคนนั้น ๆ

ในการกำหนดจังหวะเวลาที่หัวหน้าคนงานมายังคลังสินค้าภายในงวด 5 นาที แต่ละงวด เราจะใช้ข้อสมมติดังต่อไปนี้ :

1. ถ้ามีหัวหน้าคนงานมาหนึ่งคน เราจะสมมติว่าหัวหน้าคนงานคนนั้นมาในตอนเริ่มแรกของงวด 5 นาทีนั้น

2. ถ้ามีหัวหน้าคนงานมาสองคน เราจะสมมติว่าคนหนึ่งมาในตอนเริ่มแรกของงวด และอีกคนหนึ่งมาในตอนเริ่มนาทีที่สาม

3. ถ้ามีหัวหน้าคนงานมาสามคน เราจะสมมติว่าคนที่หนึ่งมาในตอนเริ่มแรกของงวด คนที่สองมาในตอนเริ่มนาทีที่สาม และคนที่สามมาในตอนเริ่มนาทีที่ห้า

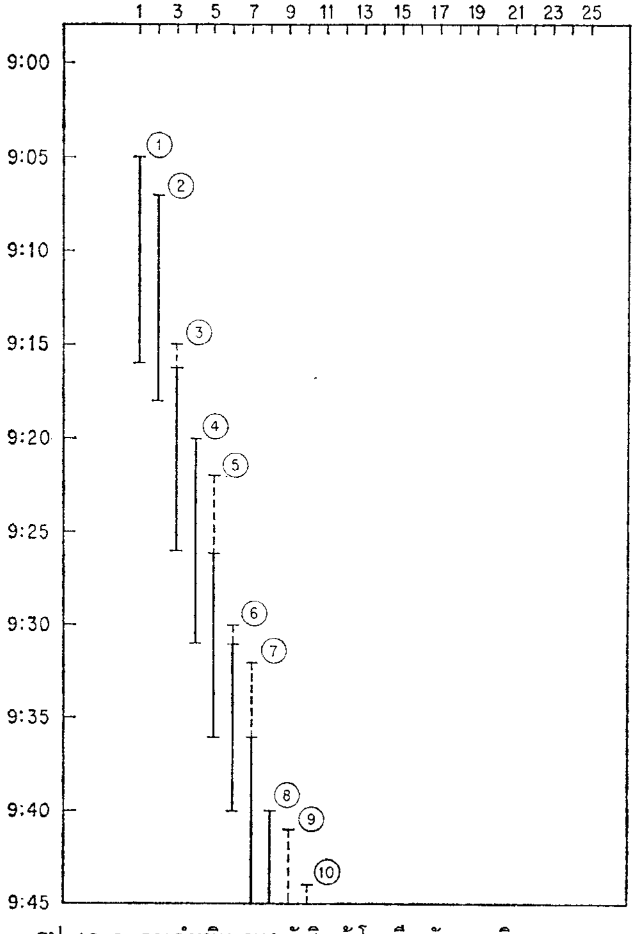


รูป 12–1 หัวหน้าคนงานที่มา

4. ถ้ามีหัวหน้าคนงานมาสี่คน เราจะสมมติว่าทั้งสี่คนมาในตอนเริ่มนาทีที่ สอง สาม สี่ และห้าตามลำดับ

เพื่อหลีกเลี่ยงนาทีที่เป็นเศษส่วน เราจึงได้เลือกกำหนดจังหวะการมาของหัวหน้าคนงานตามที่สมมติข้างต้น การจำลองจะถูกต้องใกล้เคียงเพียงใด ย่อมขึ้นอยู่กับความสามารถที่จะคงไว้ซึ่งสถานการณ์หรือเหตุการณ์ที่เป็นจริง เพื่อป้องกันมิให้เป็นการบังคับให้การแจกแจงหรือลักษณะของพฤติกรรมเป็นไปตามที่เราพอใจ ที่ถูกแล้วการแจกแจงของหัวหน้าคนงานที่มาภายในงวด 5 นาที ควรจะยึดจากลักษณะของพฤติกรรมตามที่สังเกตได้จริง

รูป 12–1 แสดงหัวหน้าคนงานทั้งหมดซึ่งเป็นผู้ใช้อุปกรณ์บริการที่มายังคลังสินค้าในระหว่างงวด 2 ชั่วโมงตามที่ได้จำลองไว้ เราจะพยายามดำเนินงานทางด้านคลังสินค้าด้วยพนักงานบริการสองคนก่อน



รูป 12–2 การดำเนินงานคลังสินค้าโดยมีพนักงานบริการสองคน

เพื่อเป็นการอธิบายพฤติกรรมที่แท้จริงของทั้งระบบ เราจะใช้แผนผังรูปหนึ่งซึ่งแสดงเวลาแยกเป็นนาทีอยู่ทางด้านซ้ายมือ ในแต่ละนาทีเราสามารถแสดงหัวหน้าคนงานแต่ละคนที่มา เวลาที่หัวหน้าคนงานนั้นได้รับบริการ เวลาที่ใช้ไปในการให้บริการ และเวลาที่ต้องรอคอยถ้าจำเป็นจะต้องรอคอย แผนผังนี้ปรากฏในรูป 12–2

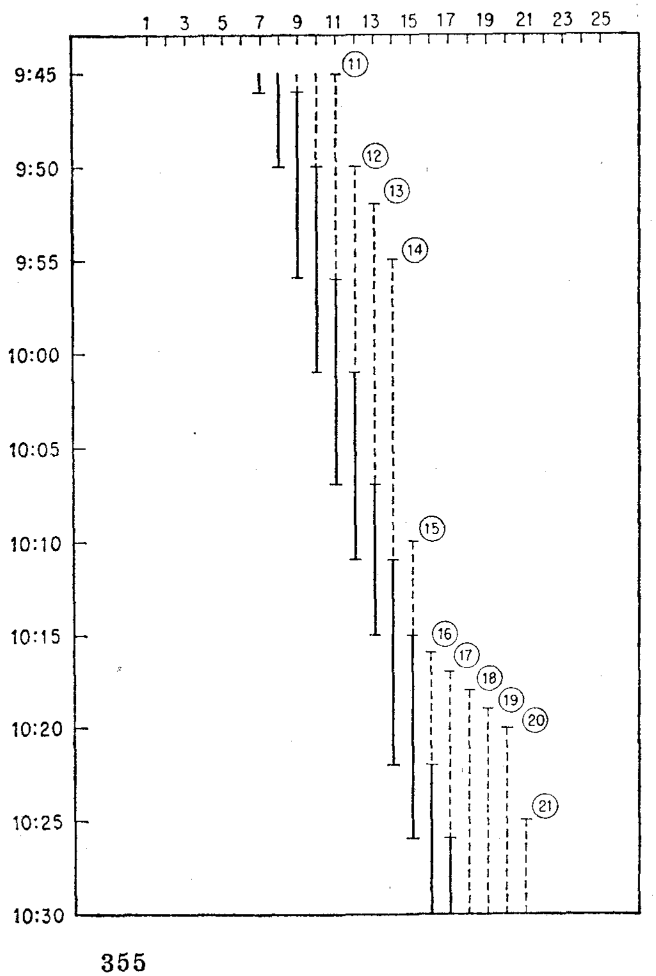
สัญลักษณ์ข้างล่างนี้จะช่วยทำให้ง่ายต่อการติดตามแผนผังดังกล่าว :

หัวหน้าคนงานที่มา ○

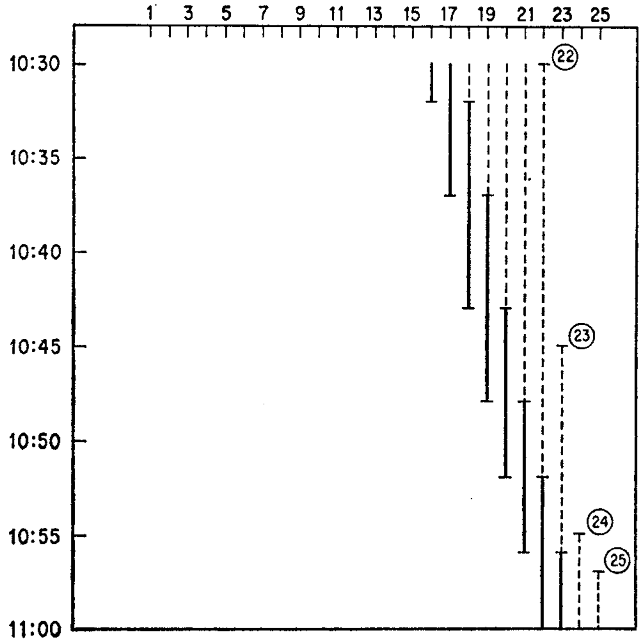
รอรับบริการ ├--------┤

กำลังรับบริการ ├────────┤

เราได้กำหนดให้แถวตั้งที่อยู่ตอนบนของรูป 12–2 แทนหัวหน้าแต่ละคนที่มาซึ่งมีอยู่ทั้งหมด 25 คน จำไว้ด้วยว่าเรามีพนักงานบริการประจำอยู่ที่คลังสินค้า 2 คน เขาสามารถที่จะให้บริการแก่หัวหน้าคนงานสองคนพร้อม ๆ กัน จะสังเกตได้จากรูป 12–2 ว่า ณ ขณะใดขณะหนึ่งจะปรากฏว่ามีเส้นเต็มได้เพียงสองเส้นเท่านั้น เพราะเรามีพนักงานบริการประจำคลังสินค้าเพียงสองคนเท่านั้น



รูป 12–2 (ต่อ)



รูป 12–2 (ต่อ)

ต่อไปเราจะรวบรวมผลของเรา ถ้านับความยาวทั้งสิ้น (เป็นนาที) ของเวลารอคอยทั้งหมด |------------------| เราจะเห็นได้ว่ารวมกันได้ 213 นาที หรือเวลารอคอยถัวเฉลี่ยต่อหัวหน้าคนงานหนึ่งคนเท่ากับ 213/25 = 8.52 นาที เพื่อปรับสิ่งที่ค้นพบได้นี้ให้เป็นจำนวนเงิน เราจึงกำหนดอัตราค่าจ้างให้กับคนงานประจำคลังสินค้าและหัวหน้าคนงานดังนี้ :

อัตราค่าจ้างสำหรับพนักงานบริการประจำคลังสินค้า	3 บาทต่อชั่วโมง
อัตราค่าจ้างสำหรับหัวหน้าคนงาน	4 บาทต่อชั่วโมง

ต่อไป ถ้าเวลาถัวเฉลี่ยระหว่างหัวหน้าคนงานที่มาเท่ากับ 5 นาที (หน้า 346) หัวหน้าคนงานจะต้องเดินไปที่คลังสินค้าวันละ 96 เที่ยว (8 ชั่วโมงต่อวัน × 12 เที่ยวต่อชั่วโมง) และถ้าเวลารอคอยถัวเฉลี่ยเท่ากับ 8.52 นาทีต่อเที่ยว เวลารอคอยทั้งสิ้นเท่ากับ 8.52 × 96 = 817.9 นาทีหรือ 13.63 ชั่วโมง ซึ่งเป็นเวลาที่หัวหน้าคนงานต้องสูญเสียต่อวัน

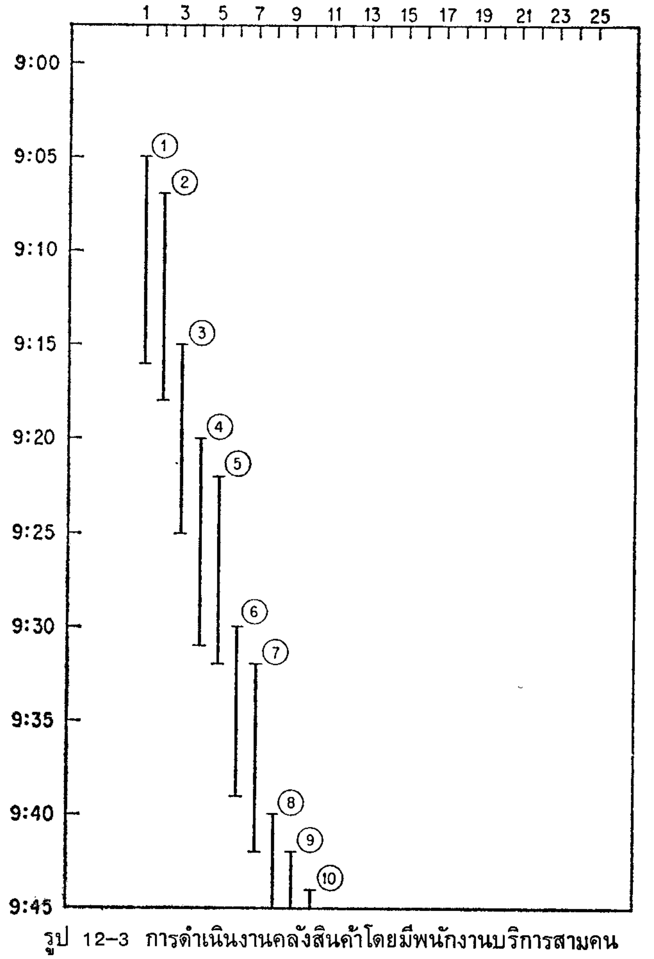
เวลาของหัวหน้าคนงานมีต้นทุน 4 บาทต่อชั่วโมง เพราะฉะนั้นต้นทุนของเวลาที่สูญเสียไปต่อวันจึงเท่ากับ 13.63 ชั่วโมง × 4 บาท = 54.52 บาท บวกต้นทุนของพนักงานบริการประจำคลังสินค้า 2 คน (8 ชั่วโมง × 3 บาท × 2 คน = 48 บาท) เราจะได้ต้นทุนทั้งสิ้นของการดำเนินงานคลังสินค้าดังนี้ :

ต้นทุนของเวลาที่หัวหน้าคนงานต้องสูญเสียไป	54.52 บาท
ค่าจ้างพนักงานบริการ	48.00 บาท
ต้นทุนทั้งสิ้นต่อวัน	102.52 บาท

ถ้าเช่นนั้น จำนวนพนักงานบริการที่มอบหมายให้ไปทำงานประจำที่คลังสินค้าที่ดีที่สุดเท่ากับ 2 คนใช่หรือไม่ ? เราอาจทดสอบได้โดยการจำลองระบบที่มีพนักงานบริการ 3 คน

เราได้จำลองระบบที่มีพนักงานบริการ 3 คนไว้ในรูป 12–3 ในลักษณะอย่างเดียวกับที่เราได้ทำไปแล้ว ยกเว้นแต่ว่าในตอนนี้เรายอมให้เส้นเต็มสามเส้นเกิดขึ้นพร้อมกัน เพราะสามารถให้บริการแก่หัวหน้าคนงาน 3 คนในเวลาเดียวกัน

เราจะนับจำนวนนาทีทั้งสิ้นของเวลารอคอยที่สูญเสียไปซึ่งในกรณีนี้รวมกันได้ 47 นาที จำนวนนี้มีค่าเท่ากับ 47/25 หรือ 1.88 นาทีที่สูญเสียไปต่อหัวหน้าคนงานหนึ่งคน ถ้ามีหัวหน้าคนงานมา 96 คนต่อวัน เวลาที่สูญเสียไปทั้งสิ้นจะเท่ากับ 96 × 1.88 หรือ 180.48 นาที ซึ่งเท่ากับประมาณ 3 ชั่วโมงต่อวัน



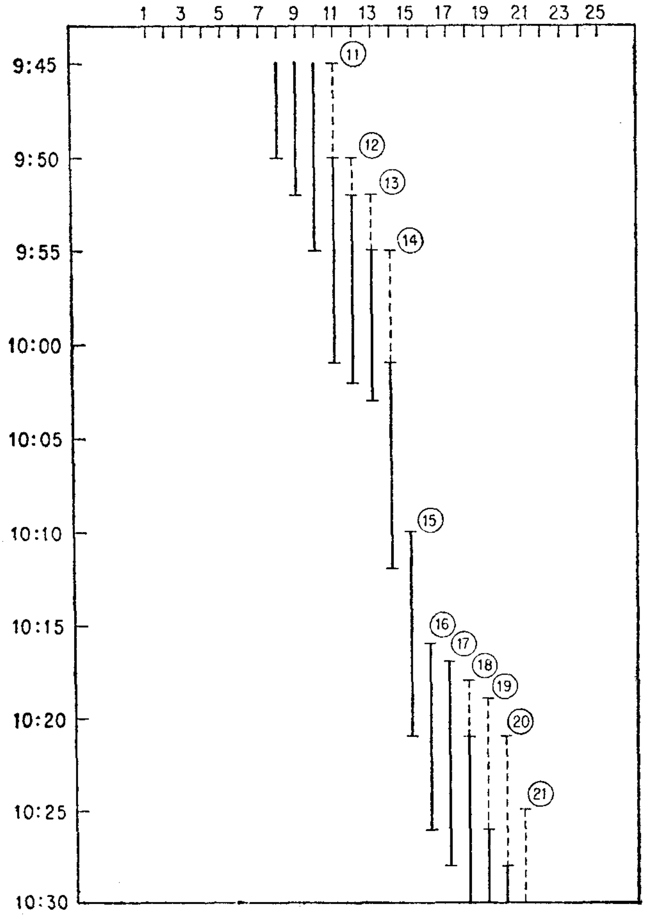
รูป 12–3 การดำเนินงานคลังสินค้าโดยมีพนักงานบริการสามคน

ต้นทุนของเวลาที่หัวหน้าคนงานต้องสูญเสียไป	3 × 4 บาท =	12 บาท
ค่าจ้างพนักงานบริการ	8 × 3 บาท × 3 =	72 บาท
ต้นทุนทั้งสิ้นต่อวัน		84 บาท

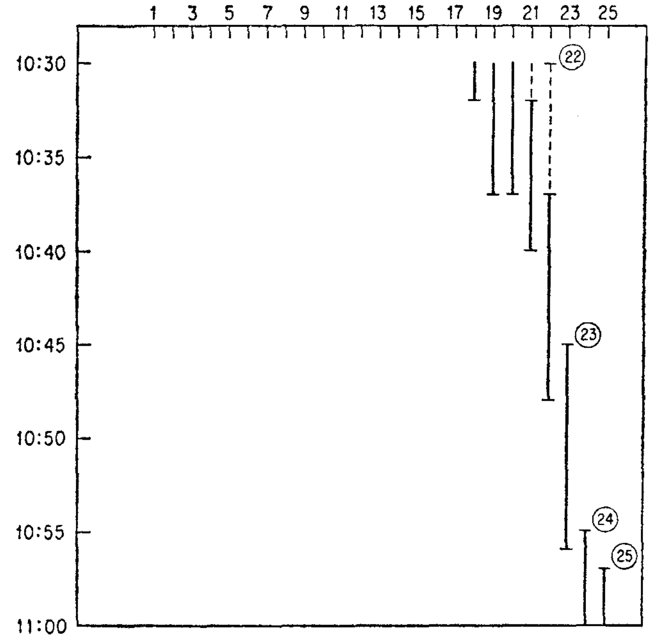
ต้นทุนจำนวนนี้ต่ำกว่าต้นทุนที่เกิดขึ้นในกรณีที่มีพนักงานบริการสองคน ดังนั้นจึงเป็นทางเลือกที่ดีกว่า แต่ถ้าจัดให้มีพนักงานบริการ 4 คน เรามีทางที่จะทำให้ต้นทุนต่ำลงกว่านี้ได้หรือไม่ ?

สมมติว่าถ้าจัดให้มีพนักงานบริการสี่คน จะทำให้หัวหน้าคนงานไม่ต้องเสียเวลาในการรอคอยเลย ถ้าเป็นกรณีนี้ต้นทุนจะเป็นดังนี้ :

ต้นทุนของเวลาที่หัวหน้าคนงานต้องสูญเสียไป	0 ชั่วโมง × 4 บาท =	0 บาท
ค่าจ้างพนักงานบริการ	8 × 3 บาท × 4 =	96 บาท
ต้นทุนทั้งสิ้นต่อวัน		96 บาท



รูป 12-3 (ต่อ)



รูป 12–3 (ต่อ)

ทางเลือกใหม่ที่เราได้นี้ ถ้าพิจารณาทางด้านการเงินก็ไม่น่าสนใจเท่ากับกรณีจัดให้มีพนักงานบริการเพียง 3 คน

แบบฝึกหัด

12–1 บริษัท อะแจกซ์ จำกัด จัดให้มีห้องเครื่องมือห้องหนึ่งในโรงงานผลิตสินค้าแห่งหนึ่งของบริษัท ในขณะนี้มีพนักงานบริการทำงานอยู่ที่ห้องเครื่องมือเพียงคนเดียว จากการสังเกตช่างเครื่องที่มาขอบริการเป็นไปในอัตราที่สม่ำเสมอ 20 คนต่อชั่วโมง และพนักงานบริการประจำห้องเครื่องมือสามารถให้บริการได้ในอัตราที่สม่ำเสมอ 18 คน ต่อชั่วโมง ให้คำนวณแถวรอคอยที่อาจจะเกิดขึ้นได้หลังจากดำเนินงานไปแล้ว 4 ชั่วโมง ?

12–2 ถ้าพนักงานบริการประจำห้องเครื่องมือ (ข้อ 12–1 ข้างต้น) ได้รับค่าจ้าง 2.50 บาทต่อชั่วโมง และช่างเครื่องได้รับค่าจ้าง 3.50 บาทต่อชั่วโมง จะเป็นการสมควรหรือไม่ที่บริษัท อะแจกซ์ จะทำการเพิ่มจำนวนพนักงานบริการให้มากขึ้น ?

12–3 ให้ใช้ข้อมูลจากข้อ 12–1 และ 12–2 ข้างต้น คำนวณจำนวนพนักงานบริการที่ดีที่สุดที่บริษัท อะแจกซ์ ควรจะมอบหมายให้ไปทำงานประจำอยู่ที่ห้องเครื่องมือ เพื่อทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นของการดำเนินงานอยู่ในระดับต่ำสุด

12–4 สมมติว่าอัตราการมาที่สม่ำเสมอเพิ่มขึ้นเป็น 24 ต่อชั่วโมง จะก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงใด (ถ้ามี) กับคำตอบสำหรับปัญหาข้อ 12–3 ?

12—5 บริษัท มาสเตอร์คราฟท์แมชชีน จำกัด จัดให้มีคลังสินค้าแห่งหนึ่งไว้คอยให้บริการแก่ช่างเครื่องของบริษัท จากการสังเกตช่างเครื่องได้มายังคลังสินค้าในอัตราที่มีลักษณะเชิงสุ่ม 10 คนต่อชั่วโมง พนักงานบริการประจำคลังสินค้าคนหนึ่งที่ได้รับมอบหมายให้ไปทำงานอยู่ที่คลังสินค้าในขณะนี้สามารถให้บริการแก่ช่างเครื่องที่มารับบริการ ในอัตราที่สม่ำเสมอ 8 คนต่อชั่วโมง ผู้สังเกตยังได้บันทึกข้อมูลซึ่งชี้ให้เห็นว่าความน่าจะเป็นที่จะมีช่างเครื่องมา 1 คน หรือมากกว่านั้นในระหว่างงวด 10 นาทีใด ๆ เท่ากับ .2 ถ้าพนักงานบริการได้รับค่าจ้าง 2.50 บาทต่อชั่วโมง และช่างเครื่องได้รับค่าจ้าง 4.00 บาทต่อชั่วโมง ให้ใช้วิธีการจำลองเพื่อกำหนดจำนวนพนักงานบริการที่จะมอบหมายให้ไปทำงานที่คลังสินค้าที่ดีที่สุดเพื่อทำให้ต้นทุนทั้งสิ้นอยู่ในระดับต่ำสุด

12—6 โดยใช้ข้อมูลตามที่ปรากฏในข้อ 12—5 ถ้าเพิ่มค่าจ้างของพนักงานบริการให้เป็น 3.50 บาทต่อชั่วโมง ให้พิจารณาดูว่าคำเฉลยที่ดีที่สุดจะถูกกระทบกระเทือน (ถ้ามี) เป็นจำนวนมากน้อยเพียงไร ?

พิมพ์ที่ บริษัทโรงพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช จำกัด ๘๙๑ ถนนพระราม ๑ กรุงเทพมหานคร
นางบุญพริ้ง ต. สุวรรณ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา พ.ศ. ๒๕๑๖