ตอนที่ 1
การวัดการตาย
(Measurement of Mortality)

บทที่ 1
นิยาม สัญญลักษณ์ และกฎต่าง ๆ เกี่ยวกับการวัดการตาย

1.1 ฟังก์ชันการอยู่รอด (Survival function)

โดยทั่วไปแล้วอัตราการตายของประชากรจะอยู่ในแบบแผนเดียวกันในทุก ๆ ประเทศ คือ อัตราการตายจะเริ่มต้นในระดับที่สูงในระยะเริ่มต้นของชีวิต (วัยทารก) ต่อจากนั้นอัตราการตายจะค่อย ๆ ลดต่ำลงเรื่อย ๆ ในวัยเด็ก และจะเริ่มสูงขึ้นอย่างช้า ๆ ในอายุตอนกลางของชีวิต หลังจากนั้นอัตราการตายก็จะสูงขึ้นอีกอย่างรวดเร็ว ตอนอายุมาก ๆ ในการที่จะค้นหาวิธีการวัดผลของการตายนี้ เราจะเริ่มต้นจากพื้นฐานทางด้านฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

ให้ x เป็นอายุใดอายุหนึ่ง ซึ่ง x อาจจะมีค่าเท่ากับ 0 จนถึงอายุสูงสุดของช่วงชีวิตหนึ่ง ๆ

พิจารณาความน่าจะเป็นที่คนที่เกิดใหม่อายุ 0 ปี จะมีชีวิตอยู่จนถึงอายุ x ปี เป็นฟังก์ชันการอยู่รอด (Survival function) ใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย $S(x)$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า $S(x)$ จะมีค่าลดลงเมื่อค่า x เพิ่มขึ้น ดังนั้น $S(x)$ จึงเป็นฟังก์ชันที่ลดลง (decreasing function) คือความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะอยู่รอด จะมีค่ามากกว่าความน่าจะเป็นที่คนอายุ $x + t$ ปี จะอยู่รอด เมื่อ $t > 0$ นอกจากนี้ $S(x)$ ยังเป็น continuous function เมื่อ $0 \le x \le \omega$ ซึ่งจะมีค่าลดลงจากค่า $S(0) = 1$ จนถึงค่า $S(\omega) = 0$ เมื่อ ω คืออายุสูงสุดของตารางมรณะ ดังนั้นเราสามารถเขียน $S(x)$ ในรูปของความน่าจะเป็นได้ดังนี้

ให้ x เป็นตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ ซึ่งคืออายุต่าง ๆ ของคน

$S(x) = P[X > x|X > 0]$

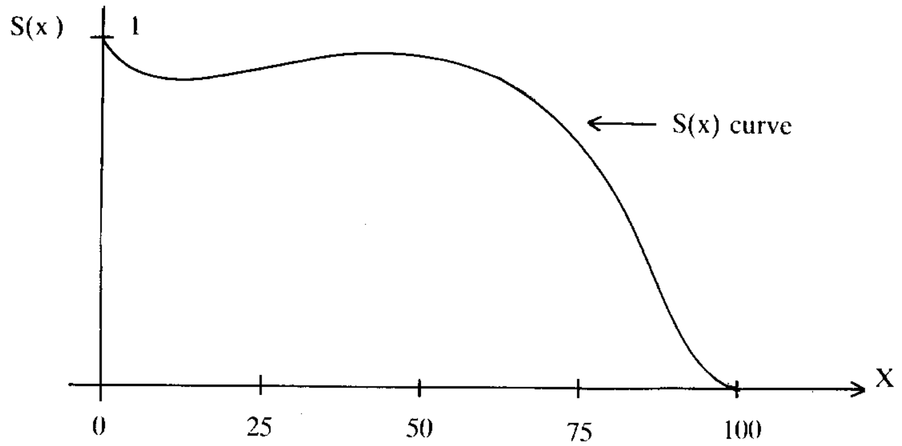
= ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 0 ปี (ตั้งแต่แรกเกิด) จะมีชีวิตอยู่รอดจนถึงอายุ x ปี ซึ่งเราสามารถหาค่า $S(x)$ ได้จากตารางมรณะดังนี้

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

และ S(x) จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $0 \leq S(x) \leq 1$
2. $S(0) = 1$ $\exists \omega$ ซึ่งทำให้ $S(\omega) = 0$
3. S(x) เป็น continuous nonincreasing function

ซึ่งกราฟของ S(x) เขียนได้ดังรูป



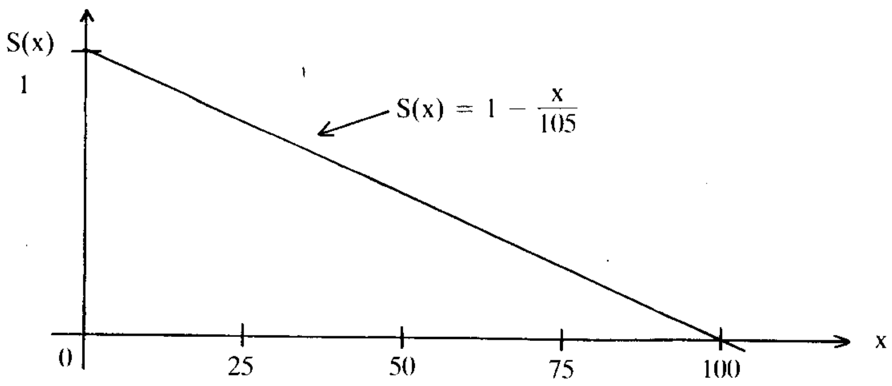
โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ฟังก์ชันการอยู่รอด S(x) เราจะใช้ฟังก์ชันที่ง่าย ๆ ที่มีคุณสมบัติสอดคล้องกับ S(x) ทั้ง 3 ข้อข้างต้นดังนี้

ให้ S(x) เป็นฟังก์ชันเส้นตรง (linear function) เป็นฟังก์ชันที่นิยมมากที่สุด

ตัวอย่างเช่น $S(x) = 1 - \frac{x}{105}$, $0 \leq x \leq 105$

ซึ่งเราต้องตรวจสอบดูก่อนว่า S(x) นี้มีคุณสมบัติสอดคล้องกับคุณสมบัติของ S(x) ข้างต้นหรือไม่ ดังนี้

เราจะเห็นได้ว่า S(x) นี้เป็น continuous decreasing function และมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $x = 0$ และมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ $x = 105$ (ในกรณีอายุสูงสุด $\omega = 105$) และเราเขียนกราฟได้ดังนี้



เมื่อเราทราบฟังก์ชันของ $S(x)$ แล้ว เราก็สามารถที่จะหาความน่าจะเป็นต่าง ๆ ที่เราสนใจได้จากฟังก์ชัน $S(x)$ ดังกล่าว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ก. ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 0 ปี จะอยู่รอดจนถึงอายุ 15 ปี ซึ่งก็คือ $S(15)$ นั่นเอง

$$\therefore\ S(15) = 1 - \frac{15}{105}$$

$$= \frac{105 - 15}{105} = \frac{90}{105}$$

$$= \frac{6}{7}$$ **ตอบ**

ข. ความน่าจะเป็นที่จะอยู่รอดจากแรกเกิดจนถึงอายุ 42 ปี คือ $S(42)$

$$\therefore\ S(42) = 1 - \frac{42}{105}$$

$$= \frac{105 - 42}{105} = \frac{63}{105}$$

$$= \frac{3}{5}$$ **ตอบ**

ค. ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 0 ปี จะตายระหว่างอายุ 15 ปี และอายุ 42 ปี ซึ่งคือ

$$S(15) - S(42) = \frac{6}{7} - \frac{3}{5}$$

$$= \frac{30 - 21}{35}$$

$$= \frac{9}{35}$$ **ตอบ**

ง. ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 15 ปี จะอยู่รอดจนถึงอายุ 42 ปี คือ

$$\frac{S(42)}{S(15)} = \frac{3/5}{6/7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{6}$$

$$= \frac{7}{10}$$ **ตอบ**

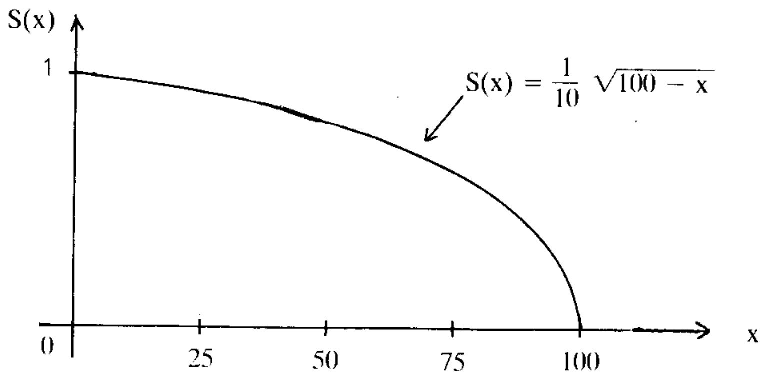
จ. ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 15 ปี จะตายก่อนที่จะถึงอายุ 42 ปี คือ

$$1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$ **ตอบ**

อีกฟังก์ชันหนึ่งที่นิยมใช้กันมากคือ ให้ $S(x)$ เป็นดังนี้

$$S(x) = \frac{1}{10}\sqrt{100 - x}\ , \quad 0 \le x \le 100$$

ซึ่งเขียนรูปกราฟได้ดังนี้



เช่นเดียวกัน เราสามารถคำนวณหาความน่าจะเป็นต่าง ๆ ที่เราสนใจได้ เมื่อ $S(x) = \frac{1}{10}\sqrt{100-x}$ ได้ดังนี้

ก. ความน่าจะเป็นที่จะอยู่รอดจากแรกเกิดจนถึงอายุ 26 ปี คือ S(36)

$$\therefore\ S(36) = \frac{1}{10}\sqrt{100-36}$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{64}$$

$$= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

ตอบ

ข. ความน่าจะเป็นที่จะอยู่รอดจากแรกเกิดจนถึงอายุ 64 ปี คือ S(64)

$$\therefore\ S(64) = \frac{1}{10}\sqrt{100-64}$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{36}$$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ตอบ

ค. ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 36 ปี จะอยู่รอดจนถึงอายุ 64 ปี คือ $\frac{S(64)}{S(36)}$

$$\therefore\ \frac{S(64)}{S(36)} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

ตอบ

ง. ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 0 ปี จะตายระหว่างอายุ 36 ปี และ 64 ปี คือ S(36) − S(64)

$$\therefore\ S(36) - S(64) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{5}$$

ตอบ

จ. ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 36 ปี จะตายก่อนที่จะมีอายุครบ 64 ปี คือ

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$ **ตอบ**

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า ตัวเลขที่ใช้วัดความน่าจะเป็นของการมีชีวิตอยู่หรือการตาย สามารถคำนวณหาได้เมื่อเราทราบฟังก์ชันของการอยู่รอด

1.2 ตารางมรณะ (Mortality table)

สมมติว่าเราต้องการที่จะแสดงผลของฟังก์ชันการอยู่รอดที่มีต่อกลุ่มคนที่เกิดใหม่ที่สมมติขึ้นมา 100,000 คน โดยให้คนจำนวน λ_1 มีชีวิตอยู่รอดจนถึงอายุ 1 ปี เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าคาดหมาย (expected value) เท่ากับ

$$\begin{aligned} E(\lambda_1) &= 100{,}000\ S(1) \\ &= 100{,}000 \left[\frac{1}{10}\sqrt{100-1} \right] \\ &= 100{,}000 \left(\frac{\sqrt{99}}{10} \right) \\ &= 99{,}499 \end{aligned}$$

ซึ่งจำนวนที่คาดหมายว่าจะมีชีวิตอยู่นี้เราให้เป็น l_1 และเราสามารถคำนวณหาจำนวนคนที่คาดหมายว่าจะตายในปีแรกได้เท่ากับ 100,000 − 99,499 = 501 คน

ทำนองเดียวกัน จำนวนคนที่คาดหมายว่าจะอยู่รอดจนถึงอายุ 2 ปี คือ

$$\begin{aligned} l_2 &= 100{,}000 \times S(2) \\ &= 100{,}000 \left[\frac{1}{10}\sqrt{100-2} \right] \\ &= 100{,}000 \left(\frac{\sqrt{98}}{10} \right) \\ &= 98{,}995 \end{aligned}$$

และเราก็สามารถหาจำนวนคนที่คาดหมายว่าจะตายในปีที่ 2 ได้ คือ 99,499 − 98,995 = 504 ซึ่งถ้าทำโดยวิธีเดียวกันนี้ไปเรื่อย ๆ ก็จะได้ตัวเลขดังตารางต่อไปนี้

ถ้าให้ l_x เป็นจำนวนคนที่มีชีวิตอยู่เมื่ออายุ x ปี และ d_x เป็นจำนวนคนตายระหว่างอายุ x ถึง $x + 1$ ปี

ตารางมรณะ

เมื่อ $S(x) = \frac{1}{10}\sqrt{100 - x}$ และ $k = 100{,}000$

อายุ x	l_x	d_x
0	100,000	501
1	99,499	504
2	98,995	506
3	98,489	509
4	97,980	512
5	97,468	514
6	96,954	517
7	96,437	520
8	95,917	523
9	95,394	526
10	94,868	528

ซึ่งตารางข้างต้นนี้จะเป็นเครื่องมือสำหรับแสดงข้อมูลเกี่ยวกับการตาย หรือที่เราเรียกกันว่าตารางมรณะ (Mortality table) หรือตารางชีพ (Life table) โดยที่

$l_x = k.S(x)$

เมื่อ k คือ positive constant

และ $d_x = l_x - l_{x+1}$

ค่าของ k เราเรียกว่า Radix of Mortality ซึ่งจะตรงกับค่าของ l_0 โดยทั่ว ๆ ไปแล้วจะกำหนดให้มีค่ามากและเป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น 10,000, 100,000, 1,000,000 หรือ 10,000,000

ส่วน l_x คือจำนวนคนที่มีชีวิตอยู่หรือจำนวนคนที่อยู่รอด และ d_x คือจำนวนคนตายในการสร้างตารางมรณะนั้น ทั้ง l_x และ d_x จะขึ้นอยู่กับ radix of mortality ที่เราเลือกขึ้นมา

ความน่าจะเป็นของการตายและการอยู่รอดอาจจะหาได้โดยตรงจากคอลัมน์ l_x และ d_x ในตารางมรณะ และความสัมพันธ์ที่แสดงข้างล่างนี้ได้มาจากแนวความคิดเบื้องต้นของความน่าจะเป็นดังนี้

ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตอยู่รอดอย่างน้อยที่สุด 1 ปี หรือความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีชีวิตอยู่รอดจนถึงอายุ x + 1 ปี คือ p_x โดยที่

$$P_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะอยู่รอดจนถึงอายุ x + n ปี คือ np_x โดยที่

$$nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะตายภายใน 1 ปี เขียนแทนด้วย q_x โดยที่

$$\begin{aligned} q_x &= 1 - p_x \\ &= 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} \\ &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\ &= \frac{d_x}{l_x} \end{aligned}$$

ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะตายภายใน n ปี เขียนแทนด้วย nq_x โดยที่

$$\begin{aligned} nq_x &= 1 - np_x \\ &= 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ &= \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \\ &= \frac{1}{l_x} \sum_{y=x}^{x+n-1} dy \\ &= \frac{nd_x}{l_x} \end{aligned}$$

ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะอยู่รอดในช่วง n ปี และตายในปีที่ n + 1 เขียนสัญญลักษณ์แทนด้วย n/q_x โดยที่

$$n/q_x = \frac{d_{x+n}}{l_x}$$

ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะตายระหว่างอายุ x + n ปี และอายุ x + n + m ปี เขียนแทนด้วย n/mq_x โดยที่

$$n/mq_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}$$

สำหรับสูตร $np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$

เมื่อ $x = 0$ จะเป็นฟังก์ชันการอยู่รอด

ดังนั้น $np_0 = S(n)$

ความน่าจะเป็นต่าง ๆ ที่แสดงในสูตรข้างต้นนี้จะหาค่าได้จากตารางมรณะ เมื่อค่า x, n และ m เป็นเลขจำนวนเต็ม

สำหรับการสร้างตารางมรณะนั้น เราอาจจะสร้างจากข้อมูลทางสถิติที่เราเก็บรวบรวมได้ โดยที่เราไม่ทราบค่า S(x) ซึ่งเราได้ศึกษาวิธีการสร้างตารางมรณะไปแล้วในวิชาการประกันภัย (ST 351) ก็จะไม่ขอกล่าวถึง แต่จะยกตัวอย่างตารางมรณะให้ดูดังนี้

ตารางมรณะสำหรับ U.S.White Males 1959-61

(ตารางมรณะในที่นี้นำมาเพียง column x, l_x, d_x และ q_x เท่านั้น)

Mortatily Table for U.S.White Males 1950-1961

x	q_x	l_x	d_x
0	.02592	100,000	2592
1	.00153	97,408	149
2	.00101	97,250	99
3	.00081	97,160	78
4	.00069	97,082	67
5	.00062	97,015	60
6	.00057	96,955	55
7	.00053	96,900	52
8	.00049	96,848	47
9	.00045	96,801	43
10	.00042	96,758	40
11	.00042	96,718	40
12	.00047	96,678	46
13	.00059	96,632	56
14	.00075	96,576	73
15	.00093	96,503	90
16	.00111	96,413	107
17	.00126	96,306	121
18	.00139	96,185	134
19	.00149	96,051	143
20	.00159	95,908	153
21	.00169	95,755	162
22	.00174	95,593	167

x	q_x	l_x	d_x
23	.00172	95,426	163
24	.00165	95,263	157
25	.00156	95,106	149
26	.00149	94,957	141
27	.00145	94,816	137
28	.00145	94,679	137
29	.00149	94,542	141
30	.00156	94,401	147
31	.00163	94,254	154
32	.00171	94,100	161
33	.00181	93,939	170
34	.00193	93,769	180
35	.00207	93,589	194
36	.00225	93,395	210
37	.00246	93,185	229
38	.00270	92,956	251
39	.00299	92,705	278
40	.00332	92,427	306
41	.00368	92,121	339
42	.00409	91,782	376
43	.00454	91,406	415
44	.00504	90,991	458
45	.00558	90,533	505
46	.00617	90,028	556
47	.00686	89,472	613
48	.00766	88,859	681
49	.00856	88,178	754
50	.00955	87,424	835
51	.01058	86,589	916
52	.01162	85,673	995
53	.01264	84,678	1,071
54	.01368	83,607	1,144
55	.01475	82,463	1,216
56	.01593	81,247	1,295
57	.01730	79,952	1,383
58	.01891	78,569	1,486
59	.02074	77,083	1,598
60	.02271	75,485	1,714
61	.02476	73,771	1,827
62	.02690	71,944	1,935
63	.02912	70,009	2,039
64	.03143	67,970	2,136

x	q_x	l_x	d_x
65	.03389	65,834	2,231
66	.03652	63,603	2,323
67	.03930	61,280	2,409
68	.04225	58,871	2,487
69	.04538	56,384	2,559
70	.04871	53,825	2,621
71	.05230	51,204	2,678
72	.05623	48,526	2,729
73	.06060	45,797	2,775
74	.06512	43,022	2,815
75	.07066	40,207	2,841
76	.07636	37,366	2,853
77	.08271	34,513	2,855
78	.08986	31,658	2,844
79	.09788	28,814	2,821

ตารางนี้ยกมาให้ดูเพียงบางส่วนเท่านั้น จริง ๆ แล้วตารางนี้จะมีถึงอายุ 109 ปี ส่วนตารางที่ใช้กันโดยทั่ว ๆ ไปจะเป็นตารางมรณะที่มีชื่อเรียกว่า The commissioners 1958 Standard Ordinary Mortality Table (CSO 1958) ซึ่งมีอยู่ในภาคผนวก (เป็นตารางสำหรับผู้ชาย)

1.3 The Force of Mortality ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย μ_x

เป็นที่เห็นชัดแล้วว่า การตายจะมีมากหรือน้อยแปรไปในแต่ละชั่วระยะเวลาในขณะใดขณะหนึ่งของอายุหนึ่ง ๆ ซึ่งมีความสำคัญมากที่จะต้องมีวิธีการบางอย่างที่จะวัดความผันแปรชั่วขณะนี้ และอัตราการเปลี่ยนแปลงของอายุต่อเวลาหาได้จาก slope ของ Curve l_x และ $S(x)$

ถ้าให้ $S(x) = \frac{1}{10}\sqrt{100 - x}$

และ radix of Mortality เป็น 10,000 ดังนั้น เราจะหา l_x ได้จาก

$$l_x = 1000\sqrt{100 - x}$$

หา derivative ของ l_x เทียบกับ x จะได้

$$Dl_x = -\frac{500}{\sqrt{100 - x}}$$

ซึ่งคืออัตราการลดลงของ l_x เมื่อเทียบกับ x

ตัวอย่างเช่น ถ้าอายุ x เป็น 51 จะได้ว่า

$$Dl_x\Big]_{x=51} = -\frac{500}{\sqrt{100-51}}$$

$$= -71$$

หมายความว่า ในขณะที่อายุ 51 ปี l_x จะลดลงด้วยอัตรา 71 คนต่อปี

ถ้าให้ $l_{51} = 7{,}000$ เราจะได้ว่าที่อายุ 51 ปี Mortality index จะเท่ากับ $\frac{71}{7000} = 0.0101$ ซึ่ง Mortality index นี้เราจะเรียกว่า force of Mortality และใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย μ_x เรานิยาม μ_x ได้ดังนี้

$$\boxed{\mu_x = -\frac{Dl_x}{l_x}}$$

หรือ $\boxed{\mu_x = -\frac{DS(x)}{S(x)}}$

และ μ_x จะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้คือ

1. μ_x เป็นค่าวัดของ Mortality ที่แน่นอนเที่ยงตรงในขณะใดขณะหนึ่งของอายุหนึ่ง ๆ
2. μ_x วัด Mortality อยู่ในรูปของอัตราต่อปี
3. μ_x ไม่จำเป็นจะต้องมีค่าอยู่ในช่วง $0 \le \mu_x \le 1$ เช่น ถ้าให้ $x = \omega$ จะได้ $l_\omega = 0$ ซึ่งจะได้ค่า $\mu_x = \infty$ เป็นต้น

นอกจากนี้เราอาจจะเขียน μ_x อยู่ในรูปอื่น ๆ ได้ดังนี้

$$\boxed{\mu_x = -D \log l_x}$$

ถ้าแทนที่ x ด้วย y แล้ว integrate ทั้ง 2 ข้าง โดยที่ $0 \le y \le x$ จะได้

$$\int_0^x \mu y \, dy = -\int_0^x D \log l_y \, dy$$

$$= -\log l_y \Big]_0^x$$

$$= -[\log l_x - \log l_0]$$

$$= -\log \frac{l_x}{l_0}$$

$$\frac{l_x}{l_0} = e^{-\int_0^x \mu y \, dy}$$

$$\therefore \boxed{l_x = l_0 . e^{-\int_0^x \mu y \, dy}}$$

และจะได้ $l_{x+n} = l_0 . e^{-\int_0^{x+n} \mu y \, dy}$

จาก $_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$

$$\therefore\ _np_x = \frac{l_o \cdot e^{-\int_o^{x+n} \mu y\, dy}}{l_o \cdot e^{-\int_o^{x} \mu y\, dy}}$$

$$= \frac{e^{-\int_o^{x+n} \mu y\, dy}}{e^{-\int_o^{x} \mu y\, dy}}$$

$$\therefore \boxed{_np_x = e^{-\int_x^{x+n} \mu y\, dy}}$$

ถ้าเปลี่ยน variable ใหม่ โดยให้ $y = x + t$ เมื่อ $0 \le t \le n$ จะได้

$$_np_x = e^{-\int_o^n \mu_{x+t}\, dt}$$

และ $_nq_x = 1 - {_np_x}$

$$= 1 - e^{-\int_o^n \mu_{x+t}\, dt}$$

เราอาจเขียน $_nq_x$ อยู่ในรูปอื่นได้อีกดังนี้

จาก $\mu_x = -\frac{Dl_x}{l_x}$

$$\therefore \mu_y = -\frac{Dl_y}{l_y}$$

$$\therefore l_y \mu_y = -Dl_y$$

integrate ทั้ง 2 ข้าง เทียบกับ y เมื่อ $x \le y \le x + n$ จะได้

$$\int_x^{x+n} l_y \mu_y\, dy = -\int_x^{x+n} Dl_y\, dy$$

$$= -l_y \Big]_x^{x+n}$$

$$= -[l_{x+n} - l_x]$$

$$= l_x - l_{x+n}$$

เปลี่ยน Variable ใหม่ จะได้

$$l_x - l_{x+n} = \int_o^n l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt$$

หารด้วย l_x ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \int_o^n l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt$$

$$_nq_x = \int_o^n \frac{l_{x+t}}{l_x} \mu_{x+t}\, dt$$

$$= \int_{o}^{n} {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

ความน่าจะเป็น $_{n/m}q_x = \int_{n}^{n+m} {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$

1.4 กฎที่มีชื่อเสียงบางกฎของการตาย (some famous law of Mortality) มีดังนี้คือ

1.4.1 De Moivre's Law of Mortality เป็นกฎแรกที่สุดและง่ายที่สุด โดย Abraham Moivre คิดขึ้นมาเมื่อปี ค.ศ.1724 โดยเขาแนะนำว่า l_x จะแสดงได้โดยเส้นตรง ข้อแนะนำของ Moivre นี้เป็นการประมาณอย่างคร่าว ๆ เท่านั้น และจะใช้ได้ในช่วงอายุ 12-86 ปีเท่านั้น โดยที่ l_x อยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\boxed{l_x = k(\omega - x)}$$

เมื่อ k คือ Radix of Mortality

1.4.2 Gompertz's Law

ในปี 1825 Benjamin Gompertz ได้ปรับปรุงกฎของ Abraham Moivre โดยใช้ μ_x เป็นตัววัดสมมติฐานของเขาอธิบายได้ดังนี้

$$\boxed{D\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h \cdot \frac{1}{\mu_x}}$$

เมื่อ h เป็น constant of proportionality integrate ทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\int D\left(\frac{1}{\mu_x}\right)dx = -\int h \cdot \frac{1}{\mu_x} dx$$

$$\log\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -hx - \log B$$

เมื่อ $-\log B$ เป็น constant of integration

ถ้าให้ $e^h = c$

$$\text{จาก } \log\frac{1}{\mu_x} = -hx - \log B$$

$$\therefore \frac{1}{\mu_x} = e^{-hx - \log B}$$

$$= e^{-hx} \cdot e^{-\log B}$$

$$= \frac{1}{e^{hx}} \cdot \frac{1}{e^{\log B}}$$

$$\therefore \mu_x = e^{hx} \cdot e^{\log B}$$

$$\text{ให้ } B = e^{\log B}$$

$$\therefore \mu_x = e^{hx} \cdot B$$

แทนค่า $e^h = C$ จะได้

$$\boxed{\mu_x = BC^x}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า μ_x จะเพิ่มขึ้นในลักษณะของ geometric progession
เมื่อทราบค่า μ_x ก็จะทำให้เราสามารถหา l_x ได้โดยใช้

$$l_x = l_o \cdot e^{-\int_o^x \mu y \, dy}$$

แทนค่า $\mu_y = BC^y$

จะได้ $l_x = l_o \cdot e^{-\int_o^x BC^y \, dy}$

พิจารณาเทอม $\int_o^x BC^y \, dy$

$$\int_o^x BC^y \, dy = B\left[\frac{C^y}{\log C}\right]_o^x$$

$$= B\left[\frac{C^x}{\log C} - \frac{C^o}{\log C}\right]$$

$$= \frac{BC^x}{\log C} - \frac{B}{\log C}$$

$$\therefore l_x = l_o \exp\left[-\left\{\frac{BC^x}{\log C} - \frac{B}{\log C}\right\}\right]$$

ถ้า $\log g = -\dfrac{B}{\log C}$

$$\therefore l_x = l_o \cdot \exp\,[C^x \log g - \log g]$$

$$= l_o \cdot \exp\,[\log g\,(C^x - 1)]$$

$$= l_o \cdot \exp\,[\log g^{(C^x - 1)}]$$

$$\therefore l_x = l_o \cdot g^{(C^x - 1)}$$

ถ้าให้ $k = \dfrac{l_o}{g}$ จะได้

$$l_x = l_o \cdot g^{C^x} \cdot g^{-1}$$

$$= \frac{l_o}{g} \cdot g^{C^x}$$

$$\therefore \boxed{l_x = kg^{C^x}}$$

ข้อสมมตินี้ใช้ได้ผลในอายุ 10 หรือ 15 ถึง 55 หรือ 60 ปี

1.4.3 Makeham's law

Makeham ได้ปรับปรุงกฎของ Gompertz ในปี ค.ศ.1860 โดย assume ว่า μ_x ควรจะอยู่ในรูปต่อไปนี้

$$\boxed{\mu_x = A + BC^x}$$

การหา l_x โดยใช้ assumption ของ Makeham ทำได้ดังนี้

จาก $l_x = l_o \cdot e^{-\int_o^x \mu y \, dy}$

แทนค่า $\mu_y = A + BC^y$

$$\therefore l_x = l_o \cdot e^{-\int_o^x (A + BC^y)\, dy}$$

พิจารณา $\int_o^x (A + BC^y)\, dy$

$$\int_o^x (A + BC^y)\, dy = \int_o^x A\, dy + \int_o^x BC^y\, dy$$

$$= Ax + \frac{BC^x}{\log C} - \frac{B}{\log C}$$

ถ้าให้ $\log S = -A$ และ $\log g = -\frac{B}{\log C}$

จะได้ $\int_o^x \mu y\, dy = -x \log S - (C^x - 1) \log g$

$$= -\log S^x - \log g^{(C^x - 1)}$$

$$\therefore l_x = l_o \cdot e^{-[-\log S^x - \log g^{(C^x - 1)}]}$$

$$= l_o \cdot e^{\log S^x + \log g^{(C^x - 1)}}$$

$$= l_o \cdot S^x \cdot g^{(C^x - 1)}$$

ถ้าให้ $k = \frac{l_o}{g}$

$$\therefore \boxed{l_x = k \cdot S^x \cdot g^{C^x}}$$

สูตรนี้ขึ้นอยู่กับการเลือก constant g, C และ S และใช้ได้ตั้งแต่อายุ 20 ปี ไปจนกระทั่งถึงอายุสุดท้ายของชีวิต

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงตรวจสอบฟังก์ชัน $\frac{20,000 - 100x - x^2}{20,000}$ ว่ามีคุณสมบัติเป็น S(x) หรือไม่ และจงหา ω ว่ามีค่าเท่ากับเท่าใด

2. จงใช้ S(x) ในข้อ (1) คำนวณหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้
   ก. ความน่าจะเป็นที่จะมีชีวิตอยู่รอดจากแรกเกิดจนถึงอายุ 20 ปี
   ข. ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 20 ปี จะอยู่รอดจนถึงอายุ 40 ปี
   ค. ความน่าจะเป็นที่คนอายุ 20 ปี จะตายระหว่างอายุ 30 และ 40 ปี

3. กำหนดให้ $S(x) = \frac{1}{10}\sqrt{100 - x}$, $0 \le x \le 100$
   ก. จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 0 ปี จะตายระหว่างอายุ 19 ปี และ 36 ปี
   ข. จงหาความน่าจะเป็นที่คนอายุ 19 ปี จะตายก่อนอายุ 36 ปี

4. กำหนดให้ $S(x) = 1 - .005x - .00005x^2$ จงสร้างคอลัมน์ l_x และ d_x ของตารางมรณะสำหรับอายุ 0 - 2 ปี โดยใช้ radix of mortality เท่ากับ 10,000

5. กำหนด q_x ให้ดังตารางต่อไปนี้

x	q_x
0	0.011
1	0.005
2	0.003

   จงสร้างคอลัมน์ l_x และ d_x โดยใช้ radix of mortality 10,000

6. กำหนดให้ $\varphi(x) = -\frac{dS(x)}{dx}$ จงแสดงว่า
   ก. $\int_0^{\omega} \varphi(y)\, dy = 1$
   ข. $\int_x^{x+n} \varphi(y)\, dy$ เป็นความน่าจะเป็นที่คนอายุ 0 ปี จะตายระหว่างอายุ x และ x + n
   ค. $S(x) = 1 - \int_0^x \varphi(y)\, dy$
   ง. ถ้า $\varphi(x) = \frac{2}{75} x^{-\frac{1}{3}}$ จงหา S(x) และค่าของ ω

7. จงแสดงว่า

ก. $\int_{0}^{\omega - x} l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt = l_x$

ข. $\int_{0}^{\omega - x} {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = 1$

8. จงหา l_x ถ้า $\mu_x = \dfrac{AC^x}{1 + BC^x}$

9. จงหา l_x ถ้า $\mu_x = \dfrac{1}{100 - x}$

10. จงหา μ_x ถ้า $l_x = kS^x\omega^{x^2}g^{C^x}$