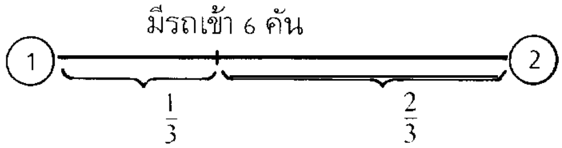
บทที่ 3
การเข้าหรือออกระหว่างจุดต่าง ๆ
(Entry or Exit at Intermediate Points)

3.1 การกระจายไปสู่หลักปลาย (Dispersal to end-point)

การเข้าออกระหว่างจุดต่าง ๆ นั้น เราใช้หลักของการกระจายไปยังจุดปลาย (Dispersal to end-points) ดังตัวอย่างเช่น มีหลัก 2 หลักห่างกัน 1 ไมล์ ถ้ามีรถเข้าระหว่างหลักที่ 1 และ 2 จำนวน 6 คัน โดย 6 คันนี้จะเข้าตรงจุดที่ห่างจากหลักที่ 1 เป็นระยะทาง $\frac{1}{3}$ ไมล์ และห่างจากหลักที่ 2 เป็นระยะทาง $\frac{2}{3}$ ไมล์ ดังรูป

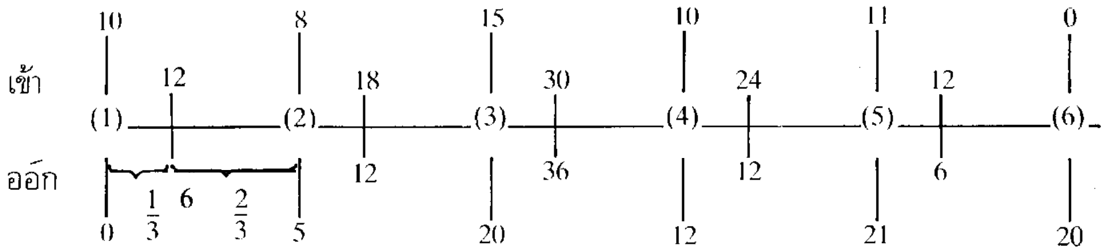


จงหาจำนวน car-miles หรือต่อไปจะเรียกว่า exposure หาได้จากจำนวนรถที่เข้าระหว่างหลักคูณกับระยะทางที่เหลือที่รถจะต้องวิ่งต่อไปจนถึงหลักที่ 2

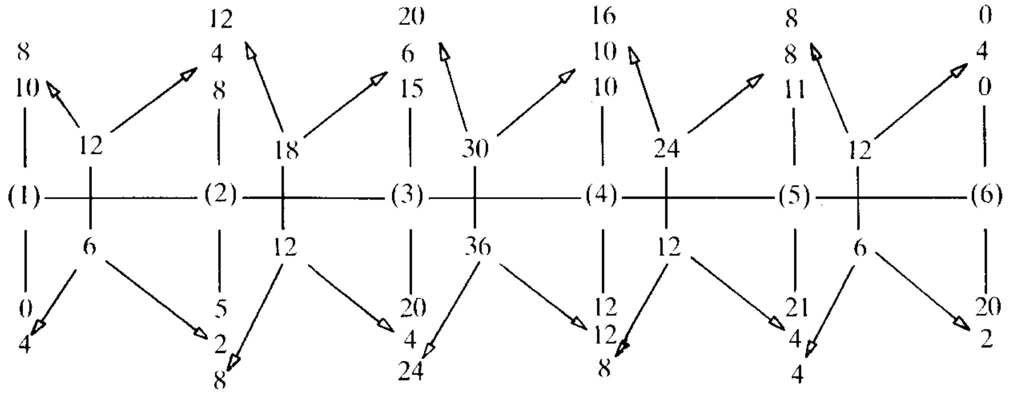
$$\therefore \text{ exposure} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

แสดงว่ามีรถเข้าที่หลัก 1 จำนวน 4 คัน ส่วนที่เหลืออีก 2 คัน จะเข้าที่หลักที่ 2 ซึ่งเป็นการกระจายจำนวนรถ 6 คัน ที่เข้าระหว่างหลักที่ 1 และหลักที่ 2 ให้ไปเข้าที่จุดปลายหลักที่ 1 และจุดปลายหลักที่ 2 นั่นเอง

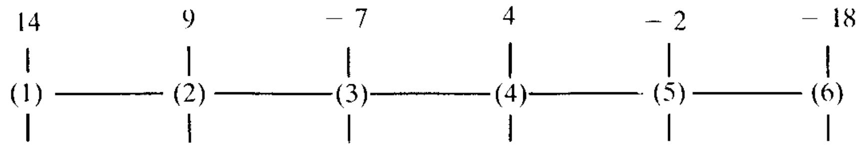
ตัวอย่างที่ 3.1



จากรูปจะเห็นได้ว่ามีจำนวนรถที่เข้าออก ณ หลักต่าง ๆ และมีรถเข้าออกระหว่างหลักต่าง ๆ ด้วย ก่อนที่เราจะคำนวณหาจำนวน car-miles หรือ exposure เราจะต้องกระจายจำนวนรถที่เข้าหรือออกระหว่างหลักไปยังจุดปลายหลักทั้ง 2 ก่อน ดังนี้ ระหว่างหลักที่ 1 และ 2 มีรถเข้าระหว่างหลัก 12 คัน เรากระจายรถ 12 คันไปที่หลักที่ 1 ได้เท่ากับ $12 \times \frac{2}{3} = 8$ คัน ส่วนที่เหลืออีก 4 คัน กระจายไปเข้าที่หลักที่ 2 ระหว่างหลักที่ 1 และ 2 มีรถออกระหว่างหลัก 6 คัน เรากระจายรถออก 6 คัน ไปที่หลักที่ 1 ได้เท่ากับ $6 \times \frac{2}{3} = 4$ คัน ส่วนที่เหลืออีก 2 คัน กระจายไปออกที่หลัก 2 ทำเช่นนี้ต่อไปทุก ๆ หลัก จะได้ดังรูปต่อไปนี้



เมื่อกระจายจำนวนรถที่เข้าและออกระหว่างหลักไปที่ปลายหลักแล้วเราก็สามารถที่จะหาจำนวน car-miles ต่าง ๆ ได้โดยวิธีต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 โดยจะเลือกใช้วิธีไหนก็ได้ ในที่นี้จะใช้วิธีหา Net increment (I_i) ก่อน ดังรูป



$\therefore I_1 = 14$

$I_2 = 9$

$I_3 = -7$

$I_4 = 4$

$I_5 = -2$

$I_6 = -18$

$\therefore C_1^2 = I_1 = 14$

$C_2^3 = I_1 + I_2 = 14 + 9 = 23$

$$C_3^4 = I_1 + I_2 + I_3$$
$$= 14 + 9 - 7 = 16$$
$$C_4^5 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$
$$= 14 + 9 - 7 + 4$$
$$= 20$$
$$C_5^6 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$$
$$= 14 + 9 - 7 + 4 - 2$$
$$= 18$$

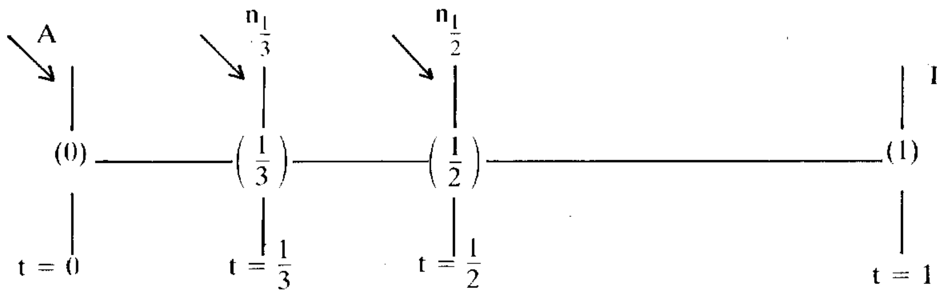
วิธีนี้นอกจากจะใช้หาจำนวน car-miles แล้วยังนำไปประยุกต์ใช้ในการคิดอัตราดอกเบี้ยได้ด้วย ดังรูป

เมื่อ $t = 0$ มีทรัพย์สิน $= A$

เมื่อ $t = \frac{1}{3}$ มีทรัพย์สิน $= n_{\frac{1}{3}}$

เมื่อ $t = \frac{1}{2}$ มีทรัพย์สิน $= n_{\frac{1}{2}}$

โดยใช้ Simple interest เมื่อ I = ดอกเบี้ย และ i = อัตราดอกเบี้ย



$$\therefore \text{ดอกเบี้ย } (I) = A_i + \frac{2}{3} n_{\frac{1}{3}} i + \frac{1}{2} n_{\frac{1}{2}} i$$

$$= i\left(A + \frac{2}{3} n_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} n_{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\therefore i = \frac{I}{\left(A + \frac{2}{3} n_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} n_{\frac{1}{2}}\right)}$$

ซึ่ง $\left(A + \frac{2}{3} n_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} n_{\frac{1}{2}}\right)$ คือ exposure

$$\therefore i = \frac{I}{\text{exposure}}$$

นอกจากจะนำไปใช้ในการหาอัตราดอกเบี้ยแล้ว เรายังนำไปประยุกต์ใช้ในการวัดการตาย (Measurement of Mortality) ได้ดังนี้

ให้ A^x = จำนวนผู้ที่ทำประกัน ณ อายุ x

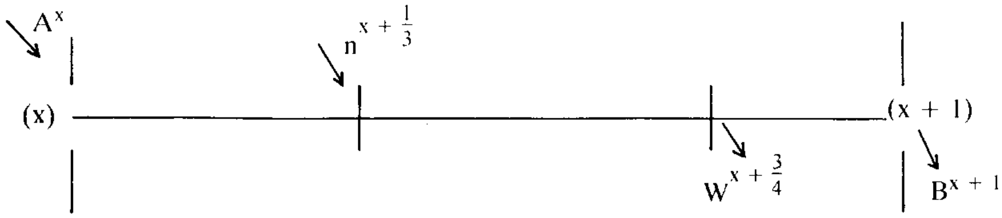
$n^{x+\frac{1}{3}}$ = จำนวนผู้ที่ทำประกัน ณ อายุ $x + \frac{1}{3}$

$W^{x+\frac{1}{3}}$ = จำนวนผู้ที่ถอนออก ณ อายุ $x + \frac{3}{4}$

D = จำนวนคนตายขณะที่ทำประกันระหว่างอายุ x และ x + 1

B^{x+1} = จำนวนคนผู้ทำประกันที่มีชีวิตอยู่จนถึงอายุ x + 1

เขียนภาพแสดงได้ดังนี้



$$\therefore B^{x+1} = A^x + n^{x+\frac{1}{3}} - W^{x+\frac{3}{4}} - D$$

ซึ่งจะได้ $A^x(1q_x) + n^{x+\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}q_{x+\frac{1}{3}}\right) - W^{x+\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}\cdot q_{x+\frac{3}{4}}\right) = D$

ในการหาค่า q ต่าง ๆ เราต้องสมมติให้ $1 - t\, q_{x+t}$ เป็น linear function ของ t เมื่อ $0 \le t \le 1$ โดยใช้สมมติฐานของ Uniform distribution of deaths hypothesis (UDD) และ Balducci hypothesis ดังนี้

3.2 การหา l_{x+t} เมื่อ $0 \le t \le 1$ และอัตรามรณะ

3.2.1 Uniform distribution of deaths (UDD) Hypothesis

ให้ l_{x+t} เป็น linear function ของ t เมื่อ $0 < t < 1$ เราหา l_{x+t} ได้โดยใช้ linear interpolation ดังนี้

$$\frac{l_{x+t} - l_x}{l_{x+1} - l_x} = \frac{x + t - x}{x + 1 - x} = t$$

$$l_{x+t} - l_x = t(l_{x+1} - l_x)$$

$$\therefore l_{x+t} = l_x + t(l_{x+1} - l_x)$$

$$= l_x + t(l_x - l_{x+1})$$

$$\therefore \boxed{l_{x+t} = l_x - t \cdot d_x}$$

l_x หารตลอด จะได้

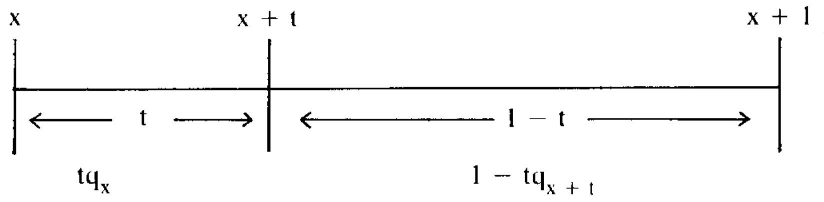
$$\frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x}{l_x} - t \cdot \frac{d_x}{l_x}$$

$$tp_x = 1 - t \cdot q_x$$

$$t \cdot q_x = 1 - tp_x = tq_x$$

$$\therefore \boxed{tq_x = t \cdot q_x}$$

จากรูป



ต้องการหา $1 - tq_{x+t}$

$$\text{จาก } 1 - tq_{x+t} = \frac{\text{จำนวนคนอายุ } x + t \text{ ปี จะตายภายใน } 1 - t \text{ ปี}}{\text{จำนวนคนอายุ } x + t \text{ ปี ที่สังเกต}}$$

$$= \frac{l_{x+t} - l_{x+1}}{l_{x+t}}$$

$$= 1 - \frac{l_{x+1}}{l_{x+t}}$$

แทนค่า l_{x+t} ที่หาได้จาก UDD Hypothesis เมื่อ

$$l_{x+t} = l_x - t \cdot d_x$$

และ $tq_x = t \cdot q_x$

$$\therefore 1 - tq_{x+t} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x - t \cdot d_x}$$

$$= \frac{l_x - t \cdot d_x - l_{x+1}}{l_x - t \cdot d_x}$$

$$= \frac{(l_x - l_{x+1}) - t \cdot d_x}{l_x - t \cdot d_x}$$

$$= \frac{d_x - t \cdot d_x}{l_x - t \cdot d_x}$$

$$= \frac{(1-t)\cdot d_x}{l_x - t\cdot d_x}$$

หารด้วย l_x ทั้งเศษและส่วน จะได้

$$1 - {}_tq_{x+t} = \frac{(1-t)\cdot \frac{d_x}{l_x}}{\frac{l_x}{l_x} - t\cdot\frac{d_x}{l_x}}$$

$$\therefore \boxed{1 - {}_tq_{x+t} = \frac{(1-t)\cdot q_x}{1 - t\cdot q_x}}$$

3.2.2 Balducci hypothesis

ให้ $\frac{1}{l_{x+t}}$ เป็น linear function ของ t เมื่อ $0 < t < 1$ การหา $\frac{1}{l_{x+t}}$ หาโดยใช้ linear interpolation ดังนี้

$$\frac{\frac{1}{l_{x+t}} - \frac{1}{l_x}}{\frac{1}{l_{x+1}} - \frac{1}{l_x}} = \frac{x+t-x}{x+1-x} = t$$

$$\therefore \frac{1}{l_{x+t}} - \frac{1}{l_x} = t\left[\frac{1}{l_{x+1}} - \frac{1}{l_x}\right]$$

$$\frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1}{l_x} + t\left[\frac{1}{l_{x+1}} - \frac{1}{l_x}\right]$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1}{l_x} - t\left[\frac{1}{l_x} - \frac{1}{l_{x+1}}\right]}$$

การจะหา $1 - {}_tq_{x+t}$ หาได้ดังนี้

จาก $$1 - {}_tq_{x+t} = \frac{l_{x+t} - l_{x+1}}{l_{x+t}}$$

$$= 1 - \frac{l_{x+1}}{l_{x+t}}$$

$$= 1 - l_{x+1}\left[\frac{1}{l_x} - t\left(\frac{1}{l_x} - \frac{1}{l_{x+1}}\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} + t\left(\frac{l_{x+1}}{l_x} - 1\right)$$

$$= (1 - p_x) - t(1 - p_x)$$

$$= q_x - t\cdot q_x$$

$$\therefore \boxed{1 - tq_{x+t} = (1-t) \cdot q_x}$$

และเราจะหา tq_x ได้ดังนี้

$$\text{จาก } tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

$$= 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$\text{และจาก } \frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1}{l_x} + t\left(\frac{1}{l_{x+1}} - \frac{1}{l_x}\right)$$

$$= \frac{1}{l_x} + t\left(\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x l_{x+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{l_x} + t\left(\frac{d_x}{l_x l_{x+1}}\right)$$

$$\frac{1}{l_{x+t}} = \frac{l_{x+1} + t \cdot d_x}{l_x \cdot l_{x+1}}$$

$$\therefore l_{x+t} = \frac{l_x \cdot l_{x+1}}{l_{x+1} + t \cdot d_x}$$

นำค่า l_{x+t} นี้ไปแทนค่าในสมการ $tq_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}$ ได้ดังนี้

$$tq_x = 1 - \frac{l_x \cdot l_{x+1}}{l_x (l_{x+1} + t \cdot d_x)}$$

$$= 1 - \frac{l_{x+1}}{l_{x+1} + t \cdot d_x}$$

$$= \frac{l_{x+1} - t \cdot d_x - l_{x+1}}{l_{x+1} + t \cdot d_x}$$

$$= \frac{t \cdot d_x}{l_{x+1} + t \cdot d_x}$$

l_x หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$tq_x = \frac{t \cdot \frac{d_x}{l_x}}{\frac{l_{x+1}}{l_x} + t \cdot \frac{d_x}{l_x}}$$

$$= \frac{t \cdot q_x}{p_x + t \cdot q_x}$$

$$= \frac{t \cdot q_x}{(1 - q_x) + t \cdot q_x}$$

$$\therefore \boxed{{}_tq_x = \frac{t \cdot q_x}{1 - (1 - t) \cdot q_x}}$$

จากตัวอย่างการวัดการตายข้างต้นที่เราได้ว่า

$$D = A^x ({}_1q_x) + n^{x + \frac{1}{3}} \left({}_{\frac{2}{3}}q_{x + \frac{1}{3}} \right) - W^{x + \frac{3}{4}} \left({}_{\frac{1}{4}}q_{x + \frac{3}{4}} \right) \qquad \text{..........(*)}$$

ในการหาค่า q เราจะใช้ Balducci hypothesis โดยสมมติให้ ${}_{1-t}q_{x+t}$ เป็น linear function ของ t เมื่อ $0 \leq t \leq 1$ ซึ่งเราจะได้ ${}_{1-t}q_{x+t} = (1 - t) \cdot q_x$ แล้วนำไปแทนค่าในสมการ (*) โดยที่

$${}_{\frac{2}{3}}q_{x + \frac{1}{3}} = {}_{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}q_{x + \frac{1}{3}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot q_x$$

$$= \frac{2}{3} \cdot q_x$$

และ $${}_{\frac{1}{4}}q_{x + \frac{3}{4}} = {}_{\left(1 - \frac{3}{4}\right)}q_{x + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot q_x$$

$$\therefore D = A^x (q_x) + n^{x + \frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \cdot q_x \right) - W^{x + \frac{3}{4}} \left(\frac{1}{4} \cdot q_x \right)$$

$$D = q_x \left[A^x + \frac{2}{3} n^{x + \frac{1}{3}} - \frac{1}{4} W^{x + \frac{3}{4}} \right]$$

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. ถ้า $_{1-t}q_{x+t}$ เป็น linear function ของ t, $0 \le t \le 1$ จงแสดงว่า

   ก. $_{1-t}q_{x+t} = (1-t)q_x$

   ข. $\mu_{x+t} = \dfrac{q_x}{1-(1-t)q_x}$

2. จงหาค่า a และ b ถ้ากำหนดให้

   ก. $_{1-t}q_{x+t} = (a+bt)q_x$

   ข. $_{1-t}q_{x+t} = (1+at)\left(1+\frac{t}{b}\right)q_x$ และ

   $\frac{1}{2}q_{x+\frac{1}{2}} = .525\, q_x$

   ค. $_{1-t}q_{x+t} = (a-b^t)\cdot q_x$

3. ถ้า $0 \le t \le 1$ จงพิสูจน์ว่า

   ก. $q_x = 1 - {}_tp_x \cdot {}_{1-t}p_{x+t}$

   ข. $q_x = {}_tq_x + (1-{}_tq_x)\,{}_{1-t}q_{x+t}$

   ค. $q_x = {}_{1-t}q_{x+t} + (1-{}_{1-t}q_{x+t})\,{}_tq_x$

4. กำหนดให้ทรัพย์สินเมื่อ $t = 0$ มีค่าเท่ากับ A ที่ $t = 1$ มีค่าเท่ากับ B ที่ $t = \frac{1}{2}$ มีเงินฝากจำนวน n และเงินที่ถอนออกจำนวน w จงพิสูจน์ว่า $i = \dfrac{2I}{A+B-I}$

5. กำหนดให้

100	50	60	45	0
(x)	$(x+1)$	$(x+2)$	$(x+3)$	$(x+4)$
0	45	50	35	93

จงหา $q_x, q_{x+1}, q_{x+2}, q_{x+3}, \mu_{x+\frac{1}{2}}, \mu_{x+\frac{3}{2}}, \mu_{x+\frac{5}{2}}$ และ $\mu_{x+\frac{7}{2}}$

ถ้าให้จำนวนคนตายเท่ากับ 2 ในแต่ละช่วง