ตอนที่ 2

Graduation

(การปรับข้อมูล)

บทที่ 5
การปรับข้อมูล
(Graduation)

เนื่องจากจำนวนคนตายที่เราสังเกตได้เมื่อนำเอามาคำนวณหาอัตรามรณะของแต่ละอายุ จะได้ตัวเลขขึ้น ๆ ลง ๆ ทั้งนี้อาจเกิดจากการมีข้อผิดพลาดจากการสำรวจ ดังนั้นในการศึกษาเรื่องการวัดการตาย เราจึงต้องมีการปรับปรุงข้อมูลที่ได้จากการสังเกต โดยใช้วิธีการ Graduation โดยให้

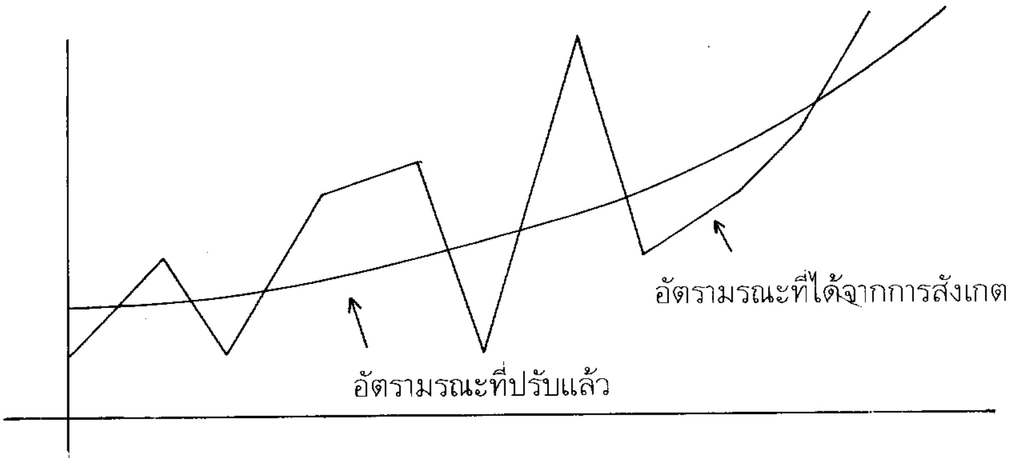
q_x'' เป็นอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกต ซึ่งเป็น crude rate of Mortality โดยที่ q_x'' หาได้จาก

$$q_x'' = \frac{\theta_x''}{E_x}$$

q_x เป็นอัตรามรณะที่ถูกต้องที่เราคาดคะเนไว้ (graduated rate = อัตรามรณะที่ปรับแล้ว) โดยที่ q_x หาได้จาก

$$q_x = \frac{\theta_x}{E_x}$$

กราฟแสดงอัตรามรณะที่สังเกตได้ กับอัตรามรณะที่ปรับแล้วจะเป็นดังนี้



ดูจากกราฟจะเห็นได้ว่า graph ที่ได้จากการสังเกตจะไม่สม่ำเสมอ แต่ graph ที่ได้จากการ graduate แล้วจะเรียบ

5.1 วิธีการ graduation

หมายถึงวิธีการที่จะขจัดข้อผิดปกติ (irregularities) ของข้อมูลที่ได้จากการสังเกต เพื่อที่จะเป็นตัวแทนที่ถูกต้องสำหรับอัตรามรณะ และเนื่องจากลักษณะเส้นโค้ง (Curve) ของอัตรามรณะที่แท้จริงจะต้องมีความเรียบ (Smooth) ปกติ (regular) และต่อเนื่องกัน (continuous) ดังนั้นวิธีการ graduation จึงเป็นวิธีการที่ทำเพื่อที่จะได้เส้นโค้งของอัตรามรณะที่เรียบปกติและต่อเนื่องกัน ซึ่งสอดคล้องกับข้อมูลที่ได้จากการสังเกตโดย Curve ที่ได้จากการทำ graduation แล้วจะเป็นตัวแทนที่ดีสำหรับอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกต ซึ่งอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกตจะมี $\omega + 1$ ตัว เราใช้สัญญลักษณ์เป็น q_0'' จนถึง q_ω'' จะได้รับการปรับ (graduation) เป็น q_0 จนถึง q_ω

ถ้าเราให้ข้อมูลที่ได้จากการสังเกตเป็น U_x'' โดยที่ U_x'' จะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

1. ส่วนข้อมูลที่ถูกต้อง ซึ่งจะมีลักษณะเรียบและปกติ เราใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย V_x
2. ส่วนที่ก่อให้เกิดความผิดปกติ เราใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย e_x

$$\therefore U_x'' = V_x + e_x$$

ถ้าให้ G เป็นวิธีการ graduation เราจะได้

$$G(U_x'') = G(V_x) + G(e_x)$$
$$= U_x$$

ดังนั้น $G(U_x'')$ หลังจากทำ graduation แล้ว จะเป็น U_x ซึ่งวิธีการ graduation จะช่วยลดค่า e_x (error) ให้น้อยลง โดยที่ข้อผิดพลาดที่เป็นบวกกับข้อผิดพลาดที่เป็นลบจะหักล้างกันและในขณะเดียวกันก็จะไม่ทำให้ค่า V_x เปลี่ยนแปลงมากนัก

แนวความคิดที่ทำให้เกิดวิธีการ graduation

เราได้ตั้งข้อสมมติไว้ว่า ข้อมูลที่แท้จริงตามธรรมชาติจะต้องมีความเรียบ (Smoothness) และเป็นปกติ (regular) เมื่อเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการสังเกต ด้วยเหตุนี้จึงทำให้มีวิธีการ graduation ขึ้นมาเพื่อทำให้ observed series กลายเป็น graduated series ซึ่งมีความเรียบและมีแนวโน้มของ observed series รวมอยู่ด้วย

นอกจากนี้นักคณิตศาสตร์ประกันภัยจะต้องใช้ตารางมรณะในการคำนวณเบี้ยประกัน เงินสำรองประกัน และอื่น ๆ ซึ่งความผิดปกติของอัตรามรณะจากอายุหนึ่งไปยังอีกอายุหนึ่งนั้น จะทำให้อัตราเบี้ยประกันภัยมีลักษณะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างผิดปกติ ดังนั้นจึงต้องตั้งสมมติฐาน

ไว้ว่า อัตรามรณะที่แท้จริงจะต้องมีลักษณะเรียบ (Smoothness) ปกติ (regular) และต่อเนื่องกัน (Continuous) ด้วยเหตุนี้จึงต้องมีวิธีการ graduation ขึ้นมา

วิธีการทำ graduation ข้อมูลที่ได้จากการสังเกต เราทำได้ 5 วิธีด้วยกันดังนี้

1. Graphic Method

เป็นวิธีที่นำข้อมูลที่ได้จากการสังเกต เขียนลงในกระดาษอย่างเหมาะสม แล้วเขียน Continuous curve ให้อยู่ระหว่าง observed value และให้มีแนวโน้มของ observed value ด้วย ซึ่ง continuous curve ที่ได้นี้ก็คือ graduated curve

2. Interpolation Method

เป็นวิธีที่นำข้อมูลที่ได้จากการสังเกตมารวมกันเป็นกลุ่มอายุ และ graduated series จะได้จากการทำ interpolation ระหว่างจุดที่เราถือว่าเป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่ม

3. Adjusted-Average Method

ในแต่ละเทอมของ graduated series จะมีค่าเท่ากับ weighted average ของ observed series จำนวนคงที่และอายุของ graduated series จะตรงกับอายุของเทอมกลางของ observed series

4. Difference Equation Method

หาค่า graduated series ได้จาก Difference equation ซึ่งได้จากการกำหนดน้ำหนักของความใกล้เคียง (fit) และความเรียบ (smoothness)

5. Graduation by Mathematical Formula

ค่าของ graduated series จะแทนด้วย mathematical curve ที่เหมาะสมกับข้อมูลที่ได้จากการสังเกต ทั้ง 5 วิธีนี้จะกล่าวถึงในรายละเอียดในหัวข้อต่อไปเมื่อได้มีการปรับข้อมูลเรียบร้อยแล้ว งานของผู้ที่ทำการปรับข้อมูลจะยังไม่แล้วเสร็จจนกว่าวิธีการปรับข้อมูลทุกวิธีที่ทำไปนั้นจะได้รับการตรวจสอบว่าเป็นวิธีที่ยอมรับกันหรือไม่ เนื่องจากว่า graduated series ของ observed series จะมีหลายชุด ซึ่งขึ้นอยู่กับวิธีที่ใช้และสัดส่วนของความใกล้เคียง (fit) และความเรียบ (smoothness) นอกจากนี้ยังขึ้นอยู่กับประสบการณ์และความชำนาญของผู้ที่ทำการปรับข้อมูลอีกด้วย ดังนั้นจึงต้องมีวิธีการที่จะตรวจสอบว่า graduation แต่ละวิธีเป็นที่ยอมรับหรือไม่และยังดูว่า graduation วิธีใดดีกว่าวิธีใดอีกด้วย ซึ่งการตรวจสอบการยอมรับนั้นเราจะพิจารณากันเพียง 2 อย่างดังนี้คือ

1. การตรวจสอบความเรียบ (Test of smoothness)

เราตรวจสอบได้จากการดูลักษณะการเพิ่มหรือลดความปกติ (regular) และขนาด

ของ finite difference อันดับต่าง ๆ ของ graduated q_x's ซึ่งปกติแล้วเราจัดความเรียบจากขนาดของ difference อันดับที่ 3 ดังนี้

ก) $\Sigma (\Delta^3 q_x)^2$ หรือ

ข) $\Sigma |\Delta^3 q_x|$

ซึ่งถ้าผลบวกตามข้อ (ก) และ (ข) มีค่าน้อย อัตรามรณะก็จะมีความเรียบมาก

การวัดความเรียบของข้อมูลโดยวิธีนี้เป็นการวัดในลักษณะของการเปรียบเทียบระหว่าง graduation หลาย ๆ วิธีมากกว่าที่จะวัดความเรียบของ graduation วิธีใดวิธีหนึ่ง

สำหรับ graduation ที่ใช้ curve ทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกต เช่น Makcham Curve เราไม่จำเป็นจะต้องตรวจสอบความเรียบของ graduated series เพราะ curve ที่ได้มันมีความเรียบอยู่แล้ว

2. การตรวจสอบความใกล้เคียง (Test of fit)

การตรวจสอบความใกล้เคียง (fit) ของอัตรามรณะที่ได้ปรับแล้วกับอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกต ทำได้โดยหาผลต่างระหว่างจำนวนคนตายที่เราคาดคะเนได้จากตารางมรณะที่ได้ปรับแล้วกับจำนวนคนตายที่ได้จากการสังเกต คือหา $\theta_x'' - \theta_x$ นั่นเอง

สำหรับจำนวนคนตายที่คาดคะเนนั้น ได้จากอัตรามรณะที่ปรับแล้ว (q_x) คูณด้วยจำนวนข้อมูลที่เราสังเกต (exposure) ณ อายุนั้น

$\therefore \theta_x = q_x \cdot E_x$

ในกรณีที่บางครั้งเราไม่ทราบ exposure ที่ได้จากการสังเกต เราอาจตรวจสอบความใกล้เคียงโดยตรงได้จากผลต่างของอัตรามรณะที่ปรับแล้วกับอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกต คือ $q_x'' - q_x$

จากการสังเกตจะเห็นได้ว่า อัตรามรณะ ณ จุดที่มี exposure มาก จะมีความใกล้เคียง (fit) มากกว่าอัตรามรณะ ณ จุดที่มี exposure น้อยกว่า ซึ่งโดยปกติแล้วเรามักจะตรวจสอบความใกล้เคียง โดยใช้จำนวนคนตายที่ได้จากการคาดคะเนมากกว่าวิธีการตรวจสอบโดยใช้อัตรามรณะ

การตรวจสอบความใกล้เคียงนั้นเราทำได้หลายวิธี ซึ่งจะใช้วิธีใดนั้นขึ้นอยู่กับอัตรามรณะที่ปรับแล้ว และจำนวนข้อมูลที่ได้จากการสังเกต วิธีการตรวจสอบง่าย ๆ มีดังนี้

ก. ผลบวกของผลต่างระหว่างจำนวนคนตายที่ได้จากการสังเกตกับจำนวนคนตายที่ได้จากการคาดคะเนคือ $\Sigma(\theta_x'' - \theta_x)$ และผลบวกสะสมของผลต่าง $\Sigma x(\theta_x'' - \theta_x)$ ควรจะมีค่าเข้าใกล้ 0

ข. จำนวนการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของผลต่างของจำนวนคนตายที่ได้จากการสังเกตและที่ได้จากการคาดคะเนและเครื่องหมายของผลบวกสะสมของผลต่างดังกล่าว สำหรับอนุกรมจำนวน x เทอม จำนวนการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของผลต่างของจำนวนคนตายที่ได้จากการสังเกตกับจำนวนคนตายที่ได้จากการคาดคะเน จะมีค่าประมาณ $\frac{n-1}{2}$ และถ้าจะทำให้มีความใกล้เคียงมากขึ้น เครื่องหมายของผลบวกสะสมของผลต่างจะต้องเปลี่ยนแปลงบ่อยครั้งพอสมควร

ค. การเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันทางการเงิน (financial function) บางครั้งเราอาจตรวจสอบความใกล้เคียงของฟังก์ชันทางการเงินแทนการตรวจสอบจากจำนวนคนตายหรืออัตรามรณะ

ฟังก์ชันทางการเงินคือมูลค่าเงินได้รายปีหรือเบี้ยประกันภัย

วิธีการทำก็คือเราจะเปรียบเทียบฟังก์ชันการเงินที่เราคำนวณได้จากอัตรามรณะที่ปรับแล้วกับอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกต การตรวจสอบโดยวิธีนี้เป็นที่น่าเชื่อถือและยอมรับกันมากกว่าการตรวจสอบโดยใช้อัตรามรณะ เนื่องจากความคลาดเคลื่อน ณ อายุต่าง ๆ นั้นนอกจากจะเกิดจากอัตรามรณะแล้ว ยังมีส่วนของฟังก์ชันทางการเงินเข้ามาเกี่ยวข้องอีกด้วย

การปรับปรุงการใกล้เคียง (fit)

ถ้าผลบวกของ deviation และ accumulated deviation ยังมีจำนวนไม่เล็กพอ เราสามารถจะทำการปรับปรุงให้ดีขึ้น โดยการ transformation ของอัตรามรณะที่ปรับแล้ว (q_x) เพื่อที่จะให้ได้อัตรามรณะใหม่ที่ดีขึ้น (q'_x) โดยการให้

$$\boxed{q'_x = aq_x + b}$$

แล้วหาค่า a และ b ที่ทำให้ผลบวกของ deviation และ accumulated deviation เป็นศูนย์

ถ้า θ_x เป็นจำนวนคนตายที่ได้จากการคาดคะเนครั้งแรก และ $\Sigma^2\theta_x$ เป็นผลบวกของ accumulated deaths ค่า a และ b เราอาจจะหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\Sigma E_x q'_x = \Sigma\theta''_x = a\Sigma\theta_x + b\Sigma E_x \qquad \text{..........(1)}$$

$$\Sigma^2 E_x q'_x = \Sigma^2\theta''_x = a\Sigma^2\theta_x + b\Sigma^2 E_x \qquad \text{..........(2)}$$

เมื่อหาค่า a และ b จากสมการ (1) และ (2) แล้ว ค่าอัตรามรณะที่ปรับปรุงใหม่ (q'_x) ก็อาจจะหาได้จาก $q'_x = aq_x + b$

เมื่อมีข้อมูลจำนวนมากที่จะต้องทำการ graduation วิธีการดังกล่าวนี้อาจใช้แทนการปรับอัตรามรณะได้ ค่า q_x's อาจได้จากตารางมรณะมาตรฐานที่มีอยู่ และเมื่อคำนวณค่า a แล้วจากสมการที่ (1) และ (2) แล้ว ค่า q'_x ก็จะหาได้จาก $q'_x = aq_x + b$ ซึ่งค่านี้ก็จะเป็นอัตรามรณะที่ปรับแล้ว

ตัวอย่างที่ 5.1

ก) จงเปรียบเทียบ graduation I และ II โดยใช้ตรวจสอบความเรียบ (Smoothness) และความใกล้เคียง (fit) โดยใช้ข้อมูลที่คำนวณให้ในตารางข้างล่าง

ข) จงปรับปรุงความ fit ของ graduation อันหนึ่งอันใดในข้อ (ก) โดยใช้วิธีหาจาก $q'_x = aq_x + b$

ตารางที่กำหนดให้มีดังนี้

Age	Exposed to risk	Actual Deaths	ungraduated Mortality Rate	Graduation I		Graduation II	
				Mortality Rate	Expected claims	Mortality Rate	Expected claims
70	135	6	.044	.0591	8.0	.0471	6.4
71	143	12	.084	.0646	9.2	.0530	7.6
72	140	10	.071	.0704	9.9	.0602	8.4
73	144	11	.076	.0768	11.1	.0690	9.9
74	149	6	.040	.0837	12.5	.0792	11.8
75	154	16	.104	.0913	14.1	.0904	13.9
76	150	24	.160	.0994	14.9	.1020	15.3
77	139	8	.058	.1084	15.1	.1138	18.8
78	145	16	.110	.1180	17.1	.1261	18.3
79	140	13	.093	.1284	18.0	.1387	19.4
80	137	19	.139	.1398	19.2	.1516	20.8
81	136	21	.154	.1518	20.6	.1647	22.4
82	126	23	.183	.1649	20.8	.1779	22.4
83	126	26	.206	.1791	22.6	.1910	24.1
84	109	23	.239	.1944	21.2	.2041	22.2
รวม	2,073	237			234.3		238.7

ก) วิธีทำ

ตารางแสดงการตรวจสอบความเรียบของ Graduation I

Age (x)	Exposed to risk (E_x)	Actual Deaths (θ''_x)	ungraduated Mortality Rate (q''_x)	Graduation I			
				Mortality Rate (q_x)	1st difference	2nd difference	3rd difference
70	135	6	.044	.0591			
71	143	12	.084	.0646	.0055		
72	140	10	.071	.0704	.0058	.0003	
73	144	11	.076	.0768	.0064	.0006	.0003
74	149	6	.040	.0837	.0069	.0005	−.0001
75	154	16	.104	.0913	.0076	.0007	.0002
76	150	24	.160	.0994	.0081	.0005	−.0002
77	139	8	.058	.1080	.0090	.0009	.0001
78	145	16	.110	.1180	.0096	.0006	−.0003
79	140	13	.093	.1284	.0104	.0008	.0002
80	137	19	.139	.1398	.0114	.0010	.0002
81	136	21	.154	.1518	.0120	.0006	−.0004
82	126	23	.183	.1649	.0131	.0011	.0005
83	126	26	.206	.1791	.0142	.0011	.0000
84	109	23	.239	.1944	.0153	.0011	.0000
รวม	2,073	237					$\Sigma \lvert\Delta^3 q_x\rvert$ = 0.0028

จากการตรวจสอบความเรียบของ graduation I ได้ค่า $\Sigma |\Delta^3 q_x| = 0.0028$

ตารางแสดงการตรวจสอบความเรียบของ Graduation II

Age (x)	Exposed to Risk (E_x)	Actual Death (θ''_x)	Ungraduated Mortality Rate (q''_x)	Graduation II			
				Mortality Rate (q_x)	1st diff	2nd diff	3rd diff
70	135	6	.044	.0471			
71	143	12	.084	.0830	.0059		
72	140	10	.071	.0602	.0077	.0013	
73	144	11	.076	.0690	.0088	.0016	.0003
74	149	6	.040	.0792	.0102	.0014	−.0002
75	154	16	.104	.0904	.0112	.0010	−.0004
76	150	24	.160	.1020	.0116	.0004	−.0006
77	139	8	.058	.1138	.0118	.0002	−.0002
78	145	16	.110	.1261	.0123	.0005	.0003
79	140	13	.093	.1387	.0126	.0003	−.0002
80	137	19	.139	.1516	.0129	.0003	.0000
81	136	21	.154	.1647	.0131	.0002	−.0001
82	126	23	.183	.1779	.0132	.0001	−.0001
83	126	26	.206	.1910	.0131	−.0001	−.0002
84	109	23	.239	.2041	.0131	.0000	.0001
รวม	2,073	237					$\Sigma \lvert \Delta^3 q_x \rvert = .0027$

จากการตรวจสอบความเรียบของ graduation I ได้ค่า $\Sigma \lvert ^3q_x \rvert = 0.0027$

ตารางแสดงการตรวจสอบความใกล้เคียงของ Graduation I

Age (x)	Actual Death (θ''_x)	Expected claims (θ_x)	$\theta''_x - \theta_x$	Acc Σ ($\theta''_x - \theta_x$)
70	6	8.0	− 2.0	− 0.3
71	12	9.2	2.8	1.7
72	10	9.9	0.1	− 1.1
73	11	11.1	− 0.1	− 1.2
74	6	12.5	− 6.5	− 1.1
75	16	14.1	1.9	5.4
76	24	14.9	9.1	3.5
77	8	15.1	− 7.1	− 5.6
78	16	17.1	− 1.1	1.5
79	13	18.0	− 5.0	2.6
80	19	19.2	− 0.2	7.6
81	21	20.6	− 0.4	7.5
82	23	20.8	2.2	7.4
83	26	22.6	3.4	5.2
84	23	21.2	1.8	1.8
รวม	237	234.3		Acc Σ ($\theta''_x - \theta_x$) = − 0.3

จากการตรวจสอบความใกล้เคียงของ graduation I ได้ค่า Acc $\Sigma (\theta''_x - \theta_x) = -0.3$

ตารางแสดงการตรวจสอบความใกล้เคียงของ **Graduation II**

Age x	Actual Death θ''_x	Expected claims (θ_x)	$\theta''_x - \theta_x$	Acc Σ ($\theta''_x - \theta_x$)
70	6	6.4	− 0.4	10.7
71	12	7.6	4.4	11.1
72	10	8.4	1.6	6.7
73	11	9.9	1.1	8.1
74	6	11.8	− 5.8	4.0
75	16	13.9	2.1	9.8
76	24	15.3	8.7	7.7
77	8	15:8	− 2.8	− 16.4
78	16	18.3	− 2.3	− 8.6
79	13	19.4	− 6.4	− 6.3
80	19	20.8	− 1.8	0.1
81	21	22.4	− 1.4	1.9
82	23	22.4	0.6	3.3
83	26	24.1	1.9	2.7
84	23	22.2	0.8	0.8
รวม	237	238.7		Acc Σ ($\theta''_x - \theta_x$) = + 10.7

จากการตรวจสอบความใกล้เคียงของ graduation II ได้ค่า Acc $\Sigma (\theta''_x - \theta_x) = 10.7$

∴ สรุปได้ว่า จากการคำนวณเปรียบเทียบ graduation I และ II จะเห็นว่า ค่าของความเรียบ (Smoothness) ของ graduation ที่ II ดีกว่า graduation ที่ I เพียงเล็กน้อย แต่ graduation I มีความใกล้เคียง (fit) มากกว่า graduation II ค่อนข้างมาก

ข) เลือกการปรับปรุงความใกล้เคียง (fit) ของ graduation I

วิธีทำ ดูจากตารางดังต่อไปนี้

จากตารางหาได้จาก

$$\Sigma\theta''_x = a\Sigma\theta_x + b\Sigma E_x \quad \text{..........(1)}$$

$$\Sigma^2\theta''_x = a\Sigma^2\theta_x + b\Sigma^2 E_x \quad \text{..........(2)}$$

แทนค่าใน (1) และ (2)

$$234 = (234.3)a + 2073b \quad \text{..........(3)}$$

$$2205 = (2169.8)a + 16129b \quad \text{..........(4)}$$

แก้สมการหาค่า a และ b จะได้

$$a = \frac{796,779}{718,970.8}$$

$$= 1.1082$$

$$b = \frac{-199.57236}{16129}$$

$$= -0.0123$$

ตารางการปรับปรุงความใกล้เคียงของ Graduation I

Age	Expected death θ_x	Acc of $\Sigma\theta_x$		Actaul death θ''_x	Acc of $\Sigma\theta''_x$		Exposed to risk E_x	Acc of ΣE_x		Mortality Rate q_x	Graduated q'_x จาก $q'_x = aq_x + b$
		$\Sigma\theta_x$	$\Sigma^2\theta_x$		$\Sigma\theta''_x$	$\Sigma^2\theta''_x$		ΣE_x	$\Sigma^2 E_x$		
70	8.0	234.3	234.3	6	234	234	135	2073	2073	.0591	.0532
71	9.2	226.3	460.6	12	228	462	143	1938	4011	.0646	.0592
72	9.9	217.1	677.7	10	216	678	140	1795	5806	.0704	.0657
73	11.1	207.2	884.9	11	206	884	144	1655	7461	.0768	.0728
74	12.5	196.1	1081.0	6	195	1079	149	1511	8972	.0837	.0804
75	14.1	183.6	1264.6	16	189	1268	154	1362	10,334	.0913	.0888
76	14.9	169.5	1434.1	24	173	1441	150	1208	11,502	.0994	.0928
77	15.1	154.6	1583.7	8	149	1590	131	1058	12,600	.1084	.1078
78	17.1	139.5	1728.2	16	141	1731	145	919	13,519	.1180	.1184
79	18.0	122.4	1850.6	13	125	1856	140	774	14,293	.1284	.1299
80	10.2	104.4	1955.0	19	112	1968	137	634	14,929	.1398	.1426
81	20.6	85.2	2040.2	21	93	2061	136	497	15,124	.1518	.1559
82	20.8	64.6	2104.8	23	72	2133	126	361	15,735	.1649	.1704
83	22.6	43.8	2148.6	26	49	2182	126	235	16,020	.1791	.1861
84	21.2	21.2	2169.5	23	23	2205	109	109	16,129	.1944	.2031
รวม	234.3	$\Sigma^2\theta_x$	= 2169.8	234	$\Sigma^2\theta''_x$	= 2205	2073	$\Sigma^2 E_x$	= 16,129		

5.2 การปรับอัตรามรณะโดยวิธีกราฟ (graphic method)

วิธีนี้ทำโดยนำเอาอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกตมาเขียนกราฟแล้วลากเส้นโค้งเรียบที่ต่อเนื่องกันลงระหว่างค่าที่ได้จากการสังเกต ก็จะได้อัตรามรณะที่ปรับแล้ว

วิธีกราฟมีหลักดำเนินการดังต่อไปนี้

1. จัดกลุ่มข้อมูล
2. เลือกกระดาษกราฟและคัดเลือกสเกลที่เหมาะสม
3. เขียนอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกตพร้อมทั้งแสดงน้ำหนัก (จำนวน exposure) เปรียบเทียบที่จุดต่าง ๆ
4. ลากเส้นโค้งที่เรียบและต่อเนื่องระหว่างอัตราที่ได้จากการสังเกต
5. อ่านค่าอัตรามรณะที่ปรับแล้วจากกระดาษกราฟ
6. ปรับปรุงความเรียบและความใกล้เคียง

5.2.1 การจัดกลุ่มข้อมูลเป็นวิธีการ graduation อย่างหนึ่ง เพราะว่าการรวมกลุ่มของข้อมูลจะทำให้ความผิดปกติหรือความคลาดเคลื่อนภายในแต่ละกลุ่มเกิดการหักล้างซึ่งกันและกัน ซึ่งอนุกรมของข้อมูลที่จัดกลุ่มแล้วจะมีความเรียบและมีความปกติมากกว่าข้อมูลที่ได้จากการสังเกตในแต่ละอายุ และยังมีแนวโน้มของข้อมูลที่ได้จากการสังเกตแต่ละกลุ่มจะมีน้ำหนัก (exposure) มากกว่าข้อมูลที่ได้จากแต่ละอายุ จึงมีค่าใกล้กับอัตรามรณะที่แท้จริงมากกว่า

ในการกำหนดจุดตัวแทนสำหรับแต่ละกลุ่มนั้น ถ้าหากไม่มีข้อขัดแย้งที่เด่นชัด มักจะกำหนดจุดกลางของแต่ละช่วงของกลุ่มเป็นจุดตัวแทน แต่ถ้ามีข้อขัดแย้งที่เห็นได้ชัดว่าไม่ควรกำหนดจุดกลางของกลุ่มเป็นตัวแทน จะต้องหาตารางมาตรฐานที่มีอัตรามรณะใกล้เคียง หรือลักษณะคล้ายคลึงกันกับอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกตจำนวนคนตายที่คาดคะเนจากตารางมาตรฐาน โดยใช้ exposure ที่ได้จากการสังเกต แล้วผลรวมของจำนวนตายเหล่านี้ในแต่ละกลุ่มหารด้วยจำนวน exposure ในกลุ่มนี้ จะได้อัตรามรณะโดยเฉลี่ยสำหรับแต่ละกลุ่ม และขั้นต่อไปเราอาจจะหาอายุที่ตรงกับอัตราเฉลี่ยของแต่ละกลุ่ม ซึ่งเราจะสามารถกำหนดจุดที่เป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่มได้

5.2.2 การเขียนกราฟ (plotting)

เมื่อเราได้เขียนกราฟอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกต เราจะต้องระบุน้ำหนักของแต่ละจุดลงบนกระดาษกราฟ ซึ่งวิธีที่ใช้กันมากก็คือ การคำนวณหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (T_x) สำหรับ exposure ที่ได้จากการสังเกตในแต่ละอายุที่เป็นตัวแทน โดยที่

$$T_x = \sqrt{\frac{q''_x(1 - q''_x)}{E_x}}$$

แล้วกำหนดระยะ T_x เหนือและต่ำกว่าจุดตัวแทนของแต่ละกลุ่ม จากนั้นลากเส้นโค้งให้อยู่ระหว่างช่วง T_x ในแนวปฏิบัติค่าของ T_x มักจะหาจากสูตรดังนี้

$$T_x = \frac{q''_x}{\sqrt{\theta''_x}}$$

5.2.3 การอ่านค่าอัตรามรณะในกระดาษกราฟ และการปรับค่าเพื่อให้มีความเรียบและใกล้เคียงมากขึ้น

ความยุ่งยากที่เกิดขึ้นในขั้นนี้ก็คือ การอ่านค่าอัตรามรณะในกระดาษกราฟ เนื่องจากว่าเราไม่สามารถที่จะอ่านค่าของ q_x ได้ใกล้เคียงเพียงพอ เพราะอัตรามรณะมีการเปลี่ยนแปลงมาก แต่เราก็อาจจะลดระดับ (ช่วง) การเปลี่ยนแปลงของอัตรามรณะได้ โดยใช้ฟังก์ชันที่เหมาะสม เช่น $\log(q_x + .1)$ เป็นต้น

ส่วนการปรับปรุงความเรียบนั้น เราอาจปรับปรุงความเรียบได้จากการแก้ไข graduated value เพียงเล็กน้อย โดยพิจารณาค่าของ 2nd difference

5.2.4 การปรับอัตรามรณะโดยวิธีเปรียบเทียบกับตารางมาตรฐาน

เราอาจเลือกตารางมาตรฐานที่มีอยู่ที่มีแนวโน้มเช่นเดียวกับอัตรามรณะที่ได้จากการสังเกต แล้วนำอัตรามรณะจากการสังเกตมาหาอัตราส่วนเปรียบเทียบกับตารางมาตรฐาน จากนั้นเราก็ดำเนินการหาอัตราส่วนดังกล่าวแทนการ graduation อัตรามรณะจากการสังเกต ซึ่งวิธีการนี้จะลดความเปลี่ยนแปลงอนุกรมที่เราจะ graduate และยังแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ได้จากการสังเกตกับตารางมาตรฐานด้วย และเราจะต้องตรวจสอบความเรียบของอัตรามรณะที่ปรับแล้ว แทนที่จะตรวจสอบความเรียบของอัตราส่วน

5.3 Interpolation Method

วิธีนี้ graduated series จะได้จากการ interpolation ระหว่างจุดซึ่งเป็นตัวแทนของกลุ่มอายุ ซึ่งมีขั้นตอนในการทำดังนี้

1. รวบรวมข้อมูลเข้าเป็นกลุ่ม
2. หาอนุกรมที่เรียบและเชื่อถือได้ เพื่อเป็นตัวแทนสำหรับแต่ละกลุ่ม
3. คำนวณหาค่า graduated values โดยใช้วิธี interpolation ระหว่างจุดเหล่านี้

5.3.1 การรวบรวมข้อมูลเข้าเป็นกลุ่ม

เป็นการรวบรวมข้อมูลเข้าเป็นกลุ่มที่มีขนาดและจำนวนที่เหมาะสม

5.3.2 การหาจุดที่เป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่มอายุ (Pivotal points)

เป็นการหาจุดที่เป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่มอายุ โดยลักษณะของจุดเหล่านี้จะต้องมีความเรียบและมีแนวโน้มของข้อมูลที่ได้จากการสังเกต

interpolation curve ของ pivotal points เหล่านี้อาจจะผ่าน pivotal point หรืออาจจะไม่ผ่าน pivotal points ก็ได้

การหา pivotal points นั้น วิธีที่ง่าย ๆ ก็คือ เราจะสมมติอัตราส่วนของจำนวนคนตายกับ exposure ในแต่ละกลุ่มอายุมีค่าเท่ากับอัตรามรณะ สำหรับอายุกึ่งกลางกลุ่ม ดังนี้การหา pivotal points โดยใช้ King's method หาได้จาก

$$u_x = 0.2\, w_x - .008\,(w_{x-5} - 2w_x + w_{x+5}) \qquad \text{.........(1)}$$

โดยที่ u_x = pivotal value ที่อายุ x

และ $w_x = u''_{x-2} + u''_{x-1} + u''_x + u''_{x+1} + u''_{x+2}$

สูตรที่ (1) นี้ จะมีความถูกต้องถึง difference อันดับ 3 และต้องใช้ apply กับจำนวนคนตาย และ exposure (เช่น $u_x = \theta_x$ หรือ E_x และ $u''_x = \theta''_x$ หรือ E''_x) และถ้าข้อมูลที่เราจัดกลุ่มไม่มีความเรียบเพียงพอ วิธีของ King จะให้ผลไม่ดีเท่าที่ควร แต่เราก็สามารถทำให้ข้อมูลเรียบได้ยิ่งขึ้น โดยใช้ graduating pivotal values โดยวิธีกราฟก่อนที่จะทำการ interpolation

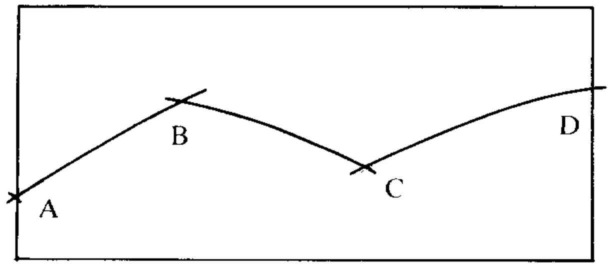
5.3.3 การ Interpolation

การ Interpolation นี้ จะขึ้นอยู่กับ pivotal points ซึ่งมีอยู่ 3 แบบดังนี้

ก) แบบ Ordinary interpolation หาได้จากสูตร central difference formula ของ Gauss ดังนี้

$$u_{x+s} = u_x + s\Delta u_x + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 u_{x-1} + \frac{s(s^2-1)}{3!}\Delta^3 u_{x-1} + \ldots.$$

แบบนี้จะได้ graduated series ที่เรียบร้อยกว่า 2 วิธีที่จะกล่าวถึงต่อไป และแสดงได้ดังรูป



จากรูป A, B, C, D เป็น pivotal points โดยที่ curve ผ่านจุด A, B, C และ D

ข) แบบ Osculatory interpolation หาได้จากสูตร Karup-King Formula ซึ่งขึ้นอยู่กับ pivotal points 4 จุด ดังนี้

$$u_{x+s} = su_{x+1} - \frac{1}{2}s^2(1-s)\delta^2 u_{x+1} + s'u_x - \frac{1}{2}s'^2(1-s')\delta^2 u_x \qquad \text{..........(2)}$$

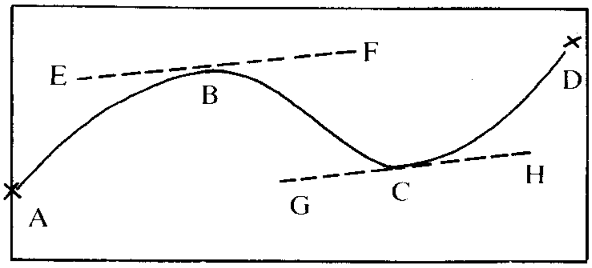
โดยที่ $s' = 1 - s$

ถ้าสูตรที่ 2 มีความเรียบไม่เพียงพอ เราอาจจะใช้สูตรของ Shovelton ซึ่งขึ้นอยู่กับ pivotal points 6 จุด ดังนี้

$$u_{x+s} = su_{x+1} - \frac{1}{6}s(1-s^2)\delta^2 u_{x+1} + \frac{1}{48}s^2(1-s)(5-s)\delta^4 u_{x+1} + s'u_x$$

$$- \frac{1}{6}s'(1-s'^2)\delta^2 u_x + \frac{1}{48}s'^2(1-s')(5-s')\delta^4 u_x \qquad \text{.........(3)}$$

ดังรูป



จะเห็นได้ว่า curve ผ่านจุด A, B, C, D ซึ่งเป็น pivotal points ซึ่ง curve จะเรียบขึ้นเล็กน้อย

ค) แบบ Modified osculatory interpolation

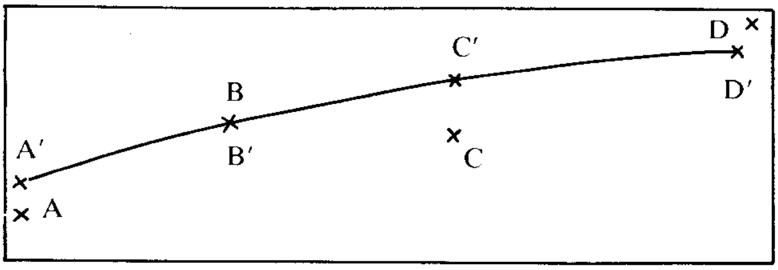
วิธีนี้จะได้ค่า graduated series เรียบที่สุด และค่า graduated series จะไม่ผ่าน pivotal points สูตรที่นิยมใช้มากคือ Jenkins modified osculatory formula ดังนี้

$$u_{x+s} = s\left(u_{x+1} - \frac{1}{36}\delta^4 u_{x+1}\right) - \frac{1}{6}s(1-s^2)$$

$$\left(\delta^2 u_{x+1} - \frac{1}{6}\delta^4 u_{x+1}\right) + s'\left(u_x - \frac{1}{36}\delta^4 u_x\right)$$

$$- \frac{1}{6}s'(1-s_{12})\left(\delta^2 u_x - \frac{1}{6}\delta^4 u_x\right) \qquad \text{..........(4)}$$

ดังรูป



จะเห็นได้ว่า curve จะไม่ผ่านจุด A, B, C, D ซึ่งเป็น pivotal points แต่ผ่านจุด A', B', C' และ D' ซึ่งเป็นตัวแทน

5.3.4 ค่าของจุดปลาย (End values)

เราอาจหาค่าจุดปลายได้จากสูตร non-symmetrical formulas หรือวิธีอื่นก็ได้ ขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลตัวอย่างที่มีอยู่ เช่น สำหรับอัตรามรณะเราอาจหาค่าจุดปลายโดยให้เท่ากับจำนวนเท่าของอัตรามรณะมาตรฐานที่เหมาะสม เช่น $q_x = 1.1\, q_x^s$ เป็นต้น หรือที่อายุสูงสุดเราอาจ fit cubic curve สำหรับ 3 ค่าสุดท้าย โดยให้ $q_w = 1$

5.3.5 การคำนวณค่าของ Interpolated values

ในทางปฏิบัติ จากสูตร (3) หัวข้อ 5.3.3 เราอาจเขียนเสียใหม่ เพื่อสะดวกในการคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u_{x+.2} &= F_2(x+1) + F_8(x), \\ u_{x+.4} &= F_4(x+1) + F_6(x), \\ u_{x+.6} &= F_6(x+1) + F_4(x), \\ u_{x+.8} &= F_8(x+1) + F_2(x), \end{aligned} \qquad \text{..........(5)}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} F_2(x) &= .2u_x - .032\delta^2 u_x + .0032\, \delta_4 u_x, \\ F_4(x) &= .4u_x - .056\, \delta^2 u_x + .0092\, \delta^4 u_x, \\ F_6(x) &= .6u_x - .064\, \delta^2 u_x + .0132\, \delta^4 u_x, \\ F_8(x) &= .8u_x - .048\, \delta^2 u_x + .0112\, \delta^4 u_x \end{aligned} \qquad \text{..........(6)}$$

ถ้าเราสมมติว่า difference ที่ 4 ณ จุดปลายมีค่าเท่ากับ 0

เราจะได้ $\delta^4 u_o = \delta^4 u_1 = \delta^4 u_{w-1} = \delta^4 u_w = 0$,

ซึ่งจะได้ $\delta^2 u_o = 2\delta^2 u_1 - \delta^2 u_2$ และ $\delta^2 u_w = 2\delta^2 u_{w-1} - \delta^2 u_{w-2}$

จาก (6) คำนวณค่าของ $F_2(x)$, $F_4(x)$, $F_6(x)$ และ $F_8(x)$ สำหรับ $x = 0$ ถึง $x = w$ และจาก (5) เราจะได้ค่าของ Interpolated values

เราอาจจะคำนวณค่าของ u_{x+s} โดยวิธีการกระจายค่า $\delta^2 u$, และ $\delta^4 u$ ในสมการที่ (3) ซึ่งจะได้ดังนี้

$u_{x+.2} = .0112\, u_{x-2} - .0896\, u_{x-1} + .9184\, u_x + .1904\, u_{x+1} - .0336\, u_{x+2}$
$+ .0032\, u_{x+3}$,

$u_{x+.4} = .0132\, u_{x-2} - .1076\, u_{x-1} + .7144\, u_x + .4504\, u_{x+1} - .0796\, u_{x+2}$
$+ .0092\, u_{x+3}$,

$u_{x+.6} = .0092\, u_{x-2} - .0796\, u_{x-1} + .4504\, u_x + .7144\, u_{x+1} - .1076\, u_{x+2}$
$+ .0132\, u_{x+3}$,

$u_{x+.8} = .0032\, u_{x-2} - .0336\, u_{x-1} + .1904\, u_x + .9184\, u_{x+1} - .0896\, u_{x+2}$
$+ .0112\, u_{x+3}$

5.4 Graduation โดยใช้ Mathematical Formula

มีวิธีการดังต่อไปนี้ คือ

ก. เลือกเส้นโค้งที่เหมาะสมที่จะใช้แทน graduated series

ข. คำนวณหาค่าคงที่ของเส้นโค้ง

5.4.1 Gompertz's และ Makeham's Formulas

สำหรับการประกันชีวิตและเงินได้รายปีตั้งแต่อายุ 20 ปีเป็นต้นไปนั้น เรามักจะใช้ Gompertz's และ Makeham's formulas แทนอัตรามรณะ ซึ่งมีสูตรดังนี้

Gompertz's formula

$$l_x = kg^{c^x}$$

$$\mu_x = BC^x$$

$$\text{colog } p_x = \beta C^x$$

Makeham's formula

$$l_x = ks^x g^{c^x}$$

$$\mu_x = A + BC^x$$

$$\text{colog } p_x = \alpha + \beta C^x$$

ซึ่งเราสามารถตรวจสอบข้อมูลที่ได้จากการสังเกตได้ว่าจะเหมาะสมกับสูตรของ Gompertz หรือสูตรของ Makeham ได้ดังนี้

จากสูตรของ **Gompertz** จะได้ว่า

$$\frac{\text{colog } {}_5p_{x+5}}{\text{colog } {}_5p_x} = C^5 \qquad \text{..........(8)}$$

โดยที่ $\text{colog } {}_5p_x = \text{colog } p_x + \text{colog } p_{x+1} + \ldots\ldots + \text{colog } p_{x+4}$

ถ้าอัตราส่วนในการที่ (8) ซึ่งคำนวณได้จากข้อมูลที่ได้จากการสังเกตมีค่าเกือบคงที่ เราจะใช้สูตรของ Gompertz

จากสูตรของ Makeham จะได้

$$\frac{\triangle \text{ colog } {}_5p_{x+5}}{\triangle \text{ colog } {}_5p_x} = C^5 \qquad \text{..........(9)}$$

ถ้าอัตราส่วนในสมการที่ (9) ซึ่งคำนวณได้จากข้อมูลที่ได้จากการสังเกตมีค่าเกือบคงที่ เราจะใช้สูตรของ Makeham

5.4.2 The Makeham Constants

แบ่งเป็น 2 วิธี คือ

ก. ในกรณีที่ข้อมูลที่จะปรับเข้ากับ Makeham Curve มีความเรียบ เราคำนวณ Makeham constants จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\log l_x &= \log k + x \log s + c^x \log g, \\
\log l_{x+t} &= \log k + (x+t) \log s + c^{x+t} \log g, \qquad \text{..........(10)} \\
\log l_{x+2t} &= \log k + (x+2t) \log s + c^{x+2t} \log g, \\
\log l_{x+3t} &= \log k + (x+3t) \log s + c^{x+3t} \log g
\end{aligned}$$

สำหรับสูตรของ Gompertz เราใช้เพียง 3 สมการเท่านั้น จากสมการที่ (10) แก้สมการหาค่าคงที่ต่าง ๆ ได้

ข. ในกรณีที่ปรับ Makeham curve เข้ากับข้อมูลที่ได้จากการสังเกตโดยตรง เราอาจหาค่า Makeham constants ได้จากหัวข้อ 5.4.3 และ 5.4.4 ได้ดังต่อไปนี้

5.4.3 การหาค่าคงที่ C โดยวิธีของ Hardy

การหาค่าคงที่ของ Makeham นั้น เริ่มแรกจะต้องคำนวณหาค่าคงที่ C ก่อน ซึ่งโดยปกติและค่าของ $\log_{10} C$ จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0.035 กับ 0.045

G.F.Hardy ได้แนะนำดังต่อไปนี้ คือให้ใช้ค่า $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ ที่มีระยะห่างกัน 5 ปี จำนวน 12 ค่า เช่น $\mu_{25\frac{1}{2}}, \mu_{30\frac{1}{2}}, \ldots\ldots, \mu_{80\frac{1}{2}}$ ซึ่งคำนวณได้จากสูตร

$\mu_{x+\frac{1}{2}} = \dfrac{\theta_x}{E_x - \frac{1}{2}\theta_x}$ เมื่อ θ_x และ E_x คำนวณได้มาจากสูตรของ King ในสมการที่ (1) ที่ได้ว่า

$$u_x = 0.02\, w_x - 0.008\,(w_{x-5} - 2w_x + w_{x+5})$$

โดยที่ $w_x = u''_{x-2} + u''_{x-1} + u''_x + u''_{x+1} + u''_{x+2}$

เมื่อได้ค่า θ_x และ E_x เราก็จะหา $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ ทั้ง 12 ตัวได้ จากนั้นเราจะทำการแบ่ง $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ ทั้ง 12 ตัวออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 จะประกอบด้วย $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ ตัวที่ 1 ถึง 6 กลุ่มที่ 2 จะประกอบด้วย $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ ตัวที่ 4 ถึงตัวที่ 9 และกลุ่มที่ 3 จะประกอบด้วย $\mu_{x+\frac{1}{2}}$ ตัวที่ 7 ถึงตัวที่ 12 เมื่อแบ่งเป็นกลุ่มแล้วหาผลบวกของแต่ละกลุ่ม โดยกำหนดน้ำหนักให้เป็น 1, 3, 5, 5, 3, 1 ก็จะได้ผลบวกของกลุ่มที่ 1 เป็นดังนี้

$$\Sigma_1 = \mu_{x+\frac{1}{2}} + 3\mu_{x+5\frac{1}{2}} + 5\mu_{x+10\frac{1}{2}} + 5\mu_{x+15\frac{1}{2}} + 3\mu_{x+20\frac{1}{2}} + \mu_{x+25\frac{1}{2}}$$

แทนค่า $\mu_{x+\frac{1}{2}} = A + BC^{x+\frac{1}{2}}$ จะได้

$$\Sigma_1 = 18A + BC^{x+\frac{1}{2}}(1 + 3C^5 + 5C^{10} + 5C^{15} + 3C^{20} + C^{25})$$

ในทำนองเดียวกัน ผลบวกของกลุ่มที่ 2 จะได้

$$\Sigma_2 = 18A + BC^{x+15\frac{1}{2}} f(c)$$

และผลบวกของกลุ่มที่ 3 จะได้

$$\Sigma_3 = 18A + BC^{x+30\frac{1}{2}} f(c)$$

จากผลบวกของทั้ง 3 กลุ่ม จะได้

$$\frac{\Sigma_3 - \Sigma_2}{\Sigma_2 - \Sigma_1} = \frac{BC^{x+15\frac{1}{2}}(C^{15}-1)f(C)}{BC^{x+\frac{1}{2}}(C^{15}-1)f(C)} = C^{15} \qquad \text{..........(11)}$$

จากสมการ (11) เราก็สามารถหาค่าคงที่ C ได้

5.4.4 การหาค่าคงที่ A และ B

จากสมการ $\frac{\theta_x}{L_x} = \mu_{x+\frac{1}{2}} = A + BC^{x+\frac{1}{2}}$ ....(12)

โดยที่ $L_x \doteqdot E_x - \frac{1}{2}\theta_x$

$$\doteqdot E_x - \frac{1}{2}\theta''_x$$

เราจะได้

$$\Sigma\theta_x = A\Sigma L_x + B\Sigma L_x C^{x+\frac{1}{2}} = \Sigma\theta''_x \qquad \text{.........(13)}$$

และจะได้

$$\Sigma x\theta_x = A\Sigma xL_x + B\Sigma xL_x C^{x+\frac{1}{2}} = \Sigma x\theta''_x \qquad \text{.........(14)}$$

แก้สมการ (13) และ (14) หาค่า A และ B ได้

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. จงปรับปรุงความใกล้เคียง (fit) ของ graduation ต่อไปนี้ให้ดีขึ้น

Age	exposure	Actual Deaths	Graduated Deaths
70	200	10	11.9
71	200	15	12.9
72	300	18	20.9
73	300	22	22.6
74	500	50	40.9
รวม	1500	115	109.2

2. จงปรับปรุงสูตร Karup-King

$$u_{x+s} = su_{x+1} - \frac{1}{2}s^2(1-s)\delta^2 u_{x+1} + s'u_x - \frac{1}{2}s'^2(1-s')\delta^2 u_x$$

โดยที่ $s' = 1 - s$ ให้เหมาะสมกับหลักในการคำนวณค่าของ polated values สำหรับ pivotal points ที่มีช่วงห่างกัน 5 ปี

3. จงปรับปรุงความใกล้เคียง (fit) ของ graduation ที่ 2 ในตัวอย่างที่ 5.1 โดยหาจาก $q'_x = aq_x + b$

4. จะหาค่า pivotal values ของ q_x จากตารางต่อไปนี้ สำหรับแต่ละกลุ่มของอายุ โดยใช้สูตรของ King กับ exposure และจำนวนคนตาย จงหาค่าของ q_x สำหรับอายุ 52 ถึง 60

Attained Ages	Exposed to Risk	Actual Deaths	Rate of Mortality per 1,000	Expected Deaths	Ratio of Act. to exp.
25 – 29	35,700	139	3.89	114	122%
30 – 34	244,066	599	2.45	990	61
35 – 39	741,041	1,842	2.49	3,905	47
40 – 44	1,250,601	4,771	3.81	8,933	53
45 – 49	1,746,393	11,073	6.34	17,540	63
50 – 54	2,067,008	21,693	10.50	29,794	73
55 – 59	1,983,710	31,612	15.94	41,743	76
60 – 64	1,484,347	39,948	26.91	46,137	87
65 – 69	988,980	40,295	40.74	45,637	88
70 – 74	559,049	33,292	59.55	38,380	87
75 – 79	241,497	20,773	86.02	24,508	85
80 – 84	78,229	11,376	145.41	11,622	98
85 – 89	15,411	2,653	172.18	3,312	80
90 – 94	2,552	589	230.77	791	74
95^+	162	44	270.24	64	69
total	11,438,746	220,699		273,470	81%

5. จง graduate ข้อมูลจากตารางในข้อ (4) โดยใช้สูตรของ Makeham หาค่า C โดยวิธีของ Hardy และหาค่า A และ B