บทที่ 1
การอนุมานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย
(Inference about Means)

บทที่ 1
การอนุมานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย
(Inference about Means)

1.1 ทบทวนการทดสอบ H_0: $\mu = \mu_0$ เมื่อทราบค่า σ^2

ในการวิเคราะห์ของตัวแปรเดี่ยว การทดสอบ H_0: $\mu = \mu_0$, H_1: $\mu \neq \mu_0$ นั้นเราใช้ค่าสังเกต n ค่าคือ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ซึ่งเป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 [$Y \sim N_1(\mu, \sigma^2)$] [เลข 1 ที่ $N_1(\mu, \sigma^2)$ แสดงว่าเป็นการกระจายแบบปกติของตัวแปรเดี่ยว (Univariate normal distribution)]

ถ้าทราบค่าความแปรปรวน σ^2

ตัวสถิติทดสอบคือ $Z = \dfrac{\bar{Y} - \mu_0}{\sigma_{\bar{Y}}}$

$$z_c = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} ,$$

$$\text{โดยที่ } \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

ถ้า H_0 จริง $Z \sim N(0, 1)$

เขตวิกฤต (Critical region: CR): $|Z| > z_{.025} = 1.96$

ในการทดสอบ $H_0: \mu = \mu_0$, H_1: $\mu \neq \mu_0$ เราอาจใช้ f-test ได้ ทั้งนี้เพราะ $Z^2 = \chi^2_{1df}$ และจุดวิกฤตคือ $(1.96)^2 = 3.84 = \chi^2_{1, .05}$

CR: $X^2 > \chi^2_{1,.05} = 3.84$

1.2 การทดสอบ H_{01}: $\mu_1 = \mu_{10}$ และ H_{02}: $\mu_2 = \mu_{20}$

ถ้าเรามีข้อมูลอยู่ 2 ชุด ซึ่งเป็นตัวอย่างสุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกัน คือ

$y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1,n_1}$ และ

$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2,n_2}$

เราอาจทดสอบ 1) $\{H_{01}: \mu_1 = \mu_{10},\ H_{02}: \mu_2 = \mu_{20}\}$ หรือทดสอบเพียงสมมติฐานเดียว คือ 2) H_0: ($\mu_1 = \mu_{10}$ และ $\mu_2 = \mu_{20}$) แต่วิธีการทดสอบของ 1) และ 2) ต่างกัน

ในการทดสอบเราสมมุติว่า

$Y_{ij} \sim N_1(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y_{2j} \sim N_1(\mu_2, \sigma_2^2)$

โดยที่ y_{ij} คือข้อมูลตัวที่ j จากชุดที่ i, i= 1, 2; j= 1, 2; . . . . n_i

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ถ้า $Y_{1j} \sim N_1(\mu_1, 20)$ และ $Y_{2j} \sim N_1(\mu_2, 10)$, j = 1, ... 10

$n_1 = 10,\ n_2 = 10,\ \bar{y}_1, = 4,\ y_2 = 121$

$$\sigma^2_{\bar{Y}_1} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\sigma^2_{\bar{Y}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_2} = \frac{10}{10} = 1$$

ในการทดสอบ $H_{,,,} : \mu_1 = 6$ (โดยที่ $\mu_{10} = 6$)

$H_{11} : \mu_1 \neq 6$

$$\because \chi_c^2 = z_c^2 \quad \text{ดังนั้น } \chi_c^2 = \left(\frac{\bar{y}_1 - \mu_{10}}{\sigma_{\bar{Y}_1}}\right)^2$$

$$= \frac{(4-6)^2}{2}$$

$= 2$ ซึ่งน้อยกว่า $\chi^2_{1,.05} = 3.84$

และในการทดสอบ $H_{02}: \mu_2 = 120$ $(\mu_{20} = 120)$

$H_{12}: \mu_2 \neq 120$

$$\chi_c^2 = \left(\frac{\bar{y}_2 - \mu_{20}}{\sigma_{\bar{Y}_2}}\right)^2$$

$$= \frac{(121-120)^2}{1}$$

$= 1$ ซึ่งน้อยกว่า $\chi^2_{1,.05} = 3.84$

เราไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานทั้งสองเพราะค่าคำนวณทั้งคู่มีค่าน้อยกว่า 3.84

1.3 การทดสอบ H_0: ($\mu_1 = \mu_{10}$ **และ** $\mu_2 = \mu_{20}$)

สมมติฐาน H_o: (μ_1 = 6 และ μ_2 = 120) ต่างจากสมมติฐานในหัวข้อ 1.2 **ในหัวข้อ 1.3 นี้ เราจะถือว่า H_o จริง ถ้าสมมติฐานย่อยคือ H_{01} และ H_{02} เป็นจริงทั้งคู่** ดังนั้นความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 (Type I-error) จะเกิดขึ้นเมื่อเราปฏิเสธ H_o โดยที่ทั้ง H_{01} และ H_{02} เป็นจริงการปฏิเสธ H_o นั้นหมายความว่า $\mu_1 \neq 6$ หรือ $\mu_2 \neq 120$ หรือทั้ง $\mu_1 \neq 6$ และ $\mu_2 \neq 120$

ดังนั้นถ้า $\bar{Y}_1$ และ $\bar{Y}_2$ เป็นอิสระต่อกัน เราสามารถคำนวณระดับนัยสำคัญสำหรับ H_o ได้ดังนี้

Pr [ปฏิเสธ $H_0|H_0$ จริง] $= 1-(1-\alpha)^2$

โดยที่ α คือพื้นที่ทางหางขวาของ χ^2 distribution

ดังนั้นถ้า $\alpha = .05$

Pr [ปฏิเสธ $H_0|H_0$ จริง] $= 1-(1-0.05)^2$

$= .0975$

ทั้งนี้เพราะ

Pr [ปฏิเสธ $H_0|H_0$ จริง] = 1 − Pr [ไม่ปฏิเสธ $H_0|H_0$ จริง]

= 1 − Pr [ไม่ปฏิเสธ H_{01} และ $H_{02}|H_0$ จริง]

= 1 − Pr [ไม่ปฏิเสธ $H_{01}|H_{01}$ จริง] ×

Pr [ไม่ปฏิเสธ $H_{02}|H_{02}$จริง]

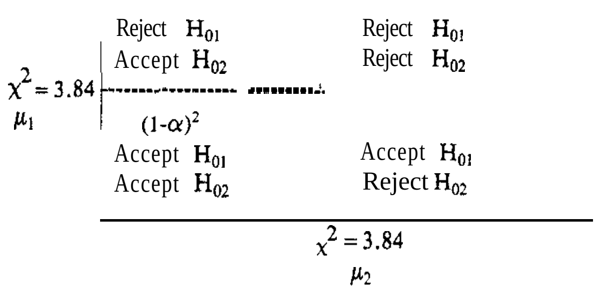
(ทั้งนี้เพราะการทดสอบ H_{01} และ H_{02} เป็นอิสระต่อกัน)

$= 1-(1-\alpha)(1-\alpha)$

$= 1-(1-\alpha)^2$

ในการทดสอบ H_0 เราใช้ตัวสถิติทดสอบเช่นเดียวกับหัวข้อ 1.2 และเนื่องจากค่าคำนวณทั้งสองมีค่าไม่เกิน 3.84 ดังนั้นเราไม่ปฏิเสธ H_0: ($\mu_1 = 6$ และ $\mu_2 = 120$) ที่ระดับนัยสำคัญ $0.0975 \approx .1$

แผนภาพแสดงการหา Pr [ปฏิเสธ $H_0|H_0$ จริง] = 0.0975



1.4 แนวความคิดเรื่องระยะทาง (Distance Concept)

ก่อนที่จะแสดงวิธีที่ใช้ในการทดสอบ H_0: $(\mu_1 = \mu_{10}$ และ $\mu_2 = \mu_{20})$ เมื่อ y_{1j} และ y_{2j} เป็นข้อมูลที่วัดมาจากหน่วยข้อมูลที่ j เดียวกัน ซึ่งทำให้ข้อมูล 2 ชุดไม่เป็นอิสระต่อกัน เราจะพิจารณาเรื่องระยะทางก่อน

ถ้าเราต้องการทดสอบ H_{01}: $\mu_1 = \mu_{10}$ โดยใช้แนวคิดเรื่องระยะทาง

เราให้ $d = (\bar{y}_1 - \mu_{10})$ เป็นระยะทางระหว่างค่าเฉลี่ยของตัวอย่างและค่าเฉลี่ยของประชากรใน H_{01} ในที่นี้ d อาจเป็นบวกหรือลบก็ได้

ให้
$$D = \frac{d}{\sigma_{Y_1}}$$

$$D = \frac{(\bar{y}_1 - \mu_{10})}{\sigma_{Y_1}}$$ ซึ่งเป็น standardized distance

$$D^2 = \frac{(\bar{y}_1 - \mu_{10})^2}{\sigma^2_{Y_1}}$$

$$\because \sigma^2_{\bar{Y}_1} = \frac{\sigma^2_{Y_1}}{n_1}$$

$$n_1 \sigma^2_{\bar{Y}_1} = \sigma^2_{Y_1}$$

$$\chi^2_c = \frac{(\bar{y}_1 - \mu_{10})^2}{\sigma^2_{\bar{Y}_1}}$$

$$= \frac{(\bar{y}_1 - \mu_{10})^2}{\sigma^2_{Y_1} / n_1}$$

$$= \frac{n_1(\bar{y}_1 - \mu_{10})^2}{\sigma^2_{Y_1}}$$

$$= n_1 D^2$$

ดังนั้น $\chi^2_c = n_1 D^2$ นั่นคือ ถ้าเราคำนวณค่า D^2 แล้วคูณกับ n_1 เราจะได้ค่าของตัวสถิติทดสอบ $X^2 \sim \chi^2_{1df}$

1.5 Multivariate Test of H_o: $\underline{\mu} = \underline{\mu}_o$ เมื่อทราบค่า Σ

เมื่อ y_{1j} และ y_{2j} ในหัวข้อ 1.2 นั้นมาจากหน่วยข้อมูลหน่วยที่ j เดียวกัน (ขนาดตัวอย่าง $= n$) นั่นคือตัวอย่างสุ่มทั้ง 2 ตัวอย่างไม่เป็นอิสระต่อกัน

เราต้องการทดสอบ H_o: $\underline{\mu} = \underline{\mu}_o$

โดยที่
$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} , \quad \underline{\mu}_o = \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \end{bmatrix}$$

สมมติว่า $Y \sim N_2(\underline{\mu},\underline{\Sigma})$

โดยที่ $\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$, $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$

N_2 แทน Bivariate normal distribution

Σ คือ covariance matrix ขนาด (2 x 2) (variance-covariance matrix)

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \sigma^2_{Y_1}$$

$$\sigma_{22} = \sigma^2_{Y_2}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \operatorname{cov}(Y_1, Y_2) = \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{12}}$$

ρ คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient)

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{\sigma^2_{Y_1}\sigma^2_{Y_2}}}$$

$$= \frac{\operatorname{cov}(Y_1, Y_2)}{\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}$$

Bivariate normal distribution

$$f(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}Q} \quad , -\infty < y_1 < \infty \, ; -\infty < y_2 < \infty$$

โดยที่ $$Q = \left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_{Y_1}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_{Y_1}}\right)\left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_{Y_2}}\right) + \left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_{Y_2}}\right)^2$$

ทั้งนี้ถ้าเราสุ่มตัวอย่างจาก p-variate normal population และต้องการทดสอบ H_0: $\underline{\mu} = \underline{\mu}_0$

เราสมมุติว่า $Y \sim N_p(\mu, \Sigma)$

$$\mathbf{Y}' = [Y_1 \; Y_2 \; \dots \; Y_p]$$

โดยที่

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix}$$

และ $$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ & \vdots & & \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

แต่ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i \neq j$ $[\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{cov}(Y_j, Y_i)]$

ดังนั้น $$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ & \vdots & & \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$ ซึ่งเป็น symmetric matrix

Joint probability density function ของ $Y_1, Y_2, \ldots Y_p$ คือ

$$f(\mathbf{y}) = f(y_1, y_2, \ldots, y_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\{-(1/2)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\}$$

ในหัวข้อ 1.4 เราคำนวณค่า $\chi_c^2 = nD^2$ ทำนองเดียวกัน ถ้าเราสุ่มตัวอย่างจาก p-variate normal population และคำนวณค่าของ D^2 แล้ว

$$\chi_p^2 = \chi_{pdf}^2 = nD^2$$

จาก $$D^2 = \frac{(\bar{y}_1 - \mu_{10})^2}{\sigma_{Y_1}^2}$$

$$= (\bar{y}_1 - \mu_{10}) \frac{1}{\sigma_{Y_1}^2} (\bar{y}_1 - \mu_{10})$$

$$\boxed{D^2 = d \frac{1}{\sigma_{Y_1}^2} d}$$ ซึ่งเป็น "quasiquadratic form" in scalar

ดังนั้น ถ้าเราสุ่มตัวอย่างจาก p-variate normal population (แทนการสุ่มจาก univariate normal population) ข้อมูลจะอยู่ในรูป

หน่วยทดลองที่	ลักษณะที่ 1	ลักษณะที่ 2	...	ลักษณะที่ i	...	ลักษณะที่ p	Observed row vector
1	$[y_{11}$	y_{21}	...	y_{i1}	...	$y_{p1}]$	$= \underline{y}_1'$
2	$[y_{12}$	y_{22}	...	y_{i2}	...	$y_{p2}]$	$= \underline{y}_2'$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	$[y_{1j}$	y_{2j}	...	y_{ij}	...	$y_{pj}]$	$= \underline{y}_j'$
n	$[y_{1n}$	y_{2n}	$y_{pn}]$	y_{in}	... =		$\underline{y}'_n$
$\bar{y}_i$	$[\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	...	$\bar{y}_i$	...	$\bar{y}_p]$	$= \bar{y}'$

ในการคำนวณหาค่า D^2 เราคำนวณ $d_i = (y_i - \mu_{i0})$ สำหรับแต่ละตัวใน p ตัว แล้วเขียน $\mathbf{d}' = [d_1\ d_2\ \dots\ d_p]$

โดยที่ y_i เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างสำหรับลักษณะที่ i ที่เราวัดมาได้

ดังนั้น
$$D^2 = \mathbf{d}'\,\Sigma^{-1}\,\mathbf{d}$$
$$= [d_1\ d_2\ \dots\ d_p] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ & \vdots & & \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix}$$

ในการทดสอบ H_0: $\underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ เราคำนวณค่า nD^2 และ CR คือ $X^2 > \chi^2_{p,\alpha}$

ตัวอย่างที่ 1.1 ตัวอย่างเลือดจากคนไข้ 5 คน ซึ่งมีอาการของโรคและอายุใกล้เคียงกัน วัดความเข้มข้นของแคลเซี่ยมและฟอสฟอรัสได้ดังนี้

ตารางที่ 1.1
ความเข้มข้นของแคลเซี่ยมและฟอสฟอรัสในตัวอย่างเลือด

คนที่	แคลเซี่ยม	ฟอสฟอรัส
1	11.5	2.93
2	10.4	3.95
3	10.2	4.51
4	10.9	3.85
5	10.1	3.59
รวม	53.1	18.83
ค่าเฉลี่ย	$\bar{y}_1 = 10.6$	$\bar{y}_2 = 3.77$

จากประสบการณ์ที่ผ่านมาทราบว่าคนไข้ที่มีรอยร้าวที่กระดูกจะหายเป็นปกติ ถ้าความเข้มข้นเฉลี่ยของแคลเซี่ยมในเลือดเป็น 10.5/ ซีซี.และความเข้มข้นเฉลี่ยของฟอสฟอรัสในเลือดเป็น 4.14/ ซีซี.

นอกจากนั้นจากคนไข้จำนวนมากทำให้ทราบ variance - covariance matrix ของแคลเซียมและฟอสฟอรัส คือ

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.03 \\ 0.03 & 0.40 \end{bmatrix}$$

ศัลยแพทย์ต้องการทราบว่าคนไข้กลุ่มนี้จะหายเป็นปกติได้หรือไม่ เพื่อตอบปัญหาของศัลยแพทย์เราจะทดสอบ H_o : $\underline{\mu} = \underline{\mu}_o$ หรือ

$$H_o : [\ \mu_1\ \mu_2\ ] = [\ 10.5\ 4.14\ ] = [\ \mu_{10}\ \mu_{20}\ ]$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 20.9424 & -1.5707 \\ -1.5707 & 2.6178 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \bar{y}_1 - \mu_{10} = 10.6 - 10.5 = 0.10$$

$$d_2 = \bar{y}_2 - \mu_{20} = 3.77 - 4.14 = -0.37$$

ดังนั้น $D^2 = d' \ \Sigma^{-1}\ d$

$$= \begin{bmatrix} 0.10 & -0.37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20.9424 & -1.5707 \\ -1.5707 & 2.6178 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.10 \\ -0.37 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.6754 & -1.1257 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.10 \\ -0.37 \end{bmatrix}$$

$$= 0.6840$$

$$\therefore \chi^2_c = n D^2$$

$$= 5\ (0.6840)$$

$$= 3.42$$

CR : $X^2 > \chi^2_{2,\ .05} = 5.99\ (p = 2)$

เราไม่สามารถปฏิเสธ H_o ได้ ดังนั้นจึงเชื่อว่าคนไข้กลุ่มนี้จะหายเป็นปกติได้

เมื่อกลับไปพิจารณาหัวข้อ 1.2 และ 1.3 และทดสอบ H_o : $\underline{\mu} = \underline{\mu}_o$ โดยสมมติว่า y_{1j} และ y_{2j} นั้นมาจากหน่วยทดลองเดียวกัน นั่นคือข้อมูล 2 ชุดไม่เป็นอิสระต่อกัน

เราอาจเขียนได้ว่า

$$\underset{\sim}{Y} \sim N_2(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$$

สมมุติว่า

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma^2_{Y_1} = 20, \quad \sigma^2_{Y_2} = 10, \quad \sigma_{Y_1Y_2} = 10]$$

$$n = 10, \bar{\underset{\sim}{y}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 121 \end{bmatrix} \text{ และ}$$

$$\underset{\sim}{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 120 \end{bmatrix}$$

คำนวณ

$$d_1 = \bar{y}_1 - \mu_{10} = 4 - 6 = -2$$

$$d_2 = \bar{y}_2 - \mu_{20} = 121 - 120 = 1$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1$$

$$\therefore \chi^2_c = n\,D^2 = 10\,(1) = 10$$

$$\chi^2_{2,\,.10} = 4.61$$

ดังนั้นเราปฏิเสธ H_0 **ที่** $\alpha = .10$

ในหัวข้อ 1.3 **นั้น เมื่อเราสมมุติว่า** Y_{1j} และ Y_{2j} เป็นอิสระต่อกัน **เรายอมรับ** H_0 **ที่** $\alpha = 0.0975 \approx .10$

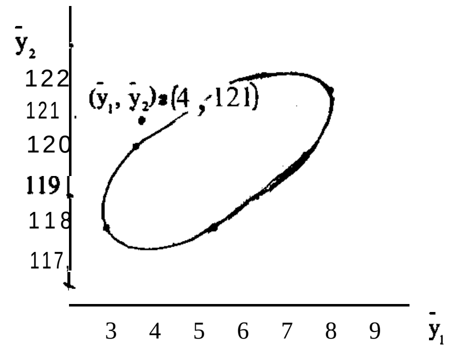
จากตัวอย่างข้างต้นแสดงให้เห็นว่า ผลสรุปของการทดสอบนั้นขึ้นอยู่กับว่าค่าสังเกตเป็นอิสระต่อกันหรือมีความสัมพันธ์กัน กรณีแรกเรายอมรับ H_o ส่วนกรณีหลังเราไม่ยอมรับ H_o ทั้งนี้แม้ว่าเราจะใช้ข้อมูลชุดเดียวกัน

ดังนั้นสรุปได้ว่า เราจำเป็นต้องใช้วิธีวิเคราะห์ของตัวแปรพหุ เมื่อสามารถประยุกต์ใช้ได้ การใช้วิธีวิเคราะห์ของตัวแปรเดี่ยวอย่างผิด ๆ จะนำไปสู่ผลสรุปที่ไม่ถูกต้องได้

1.6 Elliptical Region for Bivariate Case

ในกรณีของตัวแปรเดี่ยว เราปฏิเสธ $H_o : \mu = \mu_o$ ถ้าค่าของ $\bar{y}$ ตกในเขตวิกฤต ในกรณีของสองตัวแปร (bivariate) เขตวิกฤตคือ พื้นที่ที่อยู่นอก ellipse ในรูปที่ 1 บริเวณดังกล่าวนี้สมนัยกับหางของการทดสอบโดยใช้ normal curve ในกรณีของตัวแปรเดี่ยว ค่าต่าง ๆ ที่ใช้พลอตรูป ellipse ดังกล่าวได้จาก solutions ของสมการ

$$n(\bar{\underline{y}} - \underline{\mu}_o)' \underline{\Sigma}^{-1} (\bar{\underline{y}} - \underline{\mu}_o) = \chi^2_{2,\alpha}$$



รูปที่ 1 Elliptical region containing 90% of the values $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ in random samples of 10 obs. from a bivariate normal population with $\underline{\mu}' = [6 \quad 120]$ and $\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$

Ellipse ในรูปที่ 1 จะมี 90% ของประชากรของค่า $\bar{y}_1$ และ $\bar{y}_2$ ภายใต้ข้อสมมุติว่า

$$\underline{\mu}' = [6 \quad 120] \text{ และ } \Sigma = \begin{bmatrix} & \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นถ้าสุ่มตัวอย่างจากการแจกแจงซึ่งเขียนแทนได้ในรูปที่ 1 แล้ว การที่จะสุ่มตัวอย่างที่ให้ค่า $\bar{y}' = [4 \quad 121]$ นั้นคงมีโอกาสเป็นไปได้น้อย ทั้งนี้เพราะจุดนี้อยู่นอก ellipse ดังนั้นตัวอย่างนี้จะเป็นหลักฐานยืนยันอย่างมากที่จะทำให้ปฏิเสธ $H_o: \underline{\mu}' = [6 \quad 120]$ ทั้งนี้เราปฏิเสธที่ระดับ $\alpha = .10$ ทำนองเดียวกับที่ได้ปฏิเสธสมมติฐานเมื่อใช้ scalar statistic ND^2

ตามหลักการแล้ว เขตวิกฤตลักษณะนี้อาจถูกสร้างขึ้นสำหรับหลาย ๆ มิติก็ได้แต่อย่างไรก็ดีจะไม่มีประโยชน์ในทางปฏิบัติ ในทางปฏิบัติวิธีทางกราฟฟิคนั้นจำกัดอยู่ที่ 3 มิติและต่ำกว่า โชคดีที่ไม่มีความยุ่งยากเกิดขึ้นเพราะการที่ univariate statistic ND^2 จะตกอยู่ในหรือนอกเขตวิกฤตนั้นสอดคล้องกับการที่ observed sample means $\bar{y}' = [\bar{y}_1, \bar{y}_2]$ เกิดอยู่ในและนอกเขตวิกฤตของมัน ดังนั้นการทดสอบโดยใช้ a scalar statistic จะมีความสะดวกมากกว่ามาก

1.7 ทบทวนการทดสอบ $H_o : \mu = \mu_o$ เมื่อไม่ทราบค่า σ^2

เมื่อทำการทดสอบ $H_o : \mu = \mu_o$ จากการสุ่มตัวอย่างขนาด n จาก $N_1(\mu, \sigma^2)$ แต่ไม่ทราบค่า σ^2 เราต้องประมาณค่า σ^2 โดยใช้ข้อมูลจากตัวอย่าง ตัวสถิติทดสอบที่ใช้คือ T โดยการคำนวณ

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n$$

$$s_{\bar{Y}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2/n}{n(n-1)}}$$

$$\left(s^2_{Y'ii-} = \hat{\sigma}^2_{ii} = \frac{s_Y^2}{n} \quad \left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y)^2/n \right) \right] \right)$$

$t_c = $ Y-r, Y เป็นค่าของ $T \sim t_{n-1}$

ในตอนต้นเมื่อเราทราบค่า σ^2 เราทำการทดสอบโดยใช้ distance concept เราจะใช้ distance concept ในหัวข้อนี้ด้วย

$$\text{ให้ } d = (\bar{y} - \mu_o)$$

$$D = \frac{d}{s_Y}$$

$$= \frac{(\bar{y} - \mu_o)}{s_Y}$$

$$\because s_Y^2 = n\, s_{\bar{Y}}^2 \therefore s_Y = \sqrt{n}\, s_{\bar{Y}} \quad \left[s_{\bar{Y}}^2 = \frac{s_Y^2}{n} \right]$$

$$\text{ดังนั้น } D^2 = (\bar{y} - \mu_o)^2 / s_Y^2$$

$$= (\bar{y} - \mu_o) \frac{1}{s_Y^2} (\bar{y} - \mu_o)$$

$$= \quad d\frac{1}{s^2_Y}d$$

จาก $t_c = \dfrac{\bar{y}-\mu_0}{s_{\bar{Y}}}$, $t_c^2 = (\bar{y}-\mu_0)^2 / s^2_{\bar{Y}} = \dfrac{(\bar{y}-\mu_0)^2}{\frac{s^2_Y}{n}} = \dfrac{n(\bar{y}-\mu_0)^2}{s^2_Y} = nD^2$

นั่นคือตัวสถิติทดสอบ T จึงเป็นฟังก์ชั่นง่าย ๆ ของ *sample distance* นั่นเอง

1.8 การทดสอบ H_o : $\mu = \mu_0$ เมื่อไม่ทราบค่า Σ

เราจะพิจารณาปัญหาการสุ่มตัวอย่างจาก p-variate normal population $N_p(\mu, \Sigma)$ ***แต่*** **เราไม่ทราบค่าของ** variance - covariance matrix Σ **และต้องประมาณค่าของ** Σ จากตัวอย่าง ***ขนาด*** n คือ $y_1', y_2', \ldots, y_n'$

โดยที่ $y_j' = [\, y_{1j}\; y_{2j} \ldots y_{pj}\,]$, j= 1, . . . , n (n > p)

y_j' **เป็น** observed row vector (**ดูหัวข้อ** 1.5 ประกอบ)

ทำนองเดียวกับกรณีที่เราทราบค่าความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม ค่าของตัวสถิติทดสอบ เพื่อทดสอบ $H_o : \mu = \mu_o$ คำนวณได้ง่าย ๆ ในเทอมของ D^2

ก่อนที่จะพิจารณาวิธีคำนวณ D^2 ในกรณีของ p - variate เราจะแสดงความสัมพันธ์ในรูป

$$T^2_{(p,\, n-1)} = nD^2$$

โดยเรียก $T^2_{(p,\, n-1)}$ ว่า**ตัวสถิติ Hotelling's T^2** และเรียกการแจกแจงของตัวสถิตินี้ว่า **Hotelling's T^2 distribution ซึ่งมี p มิติและ (n-1) df.**

ถ้า p=1 ซึ่งคือกรณีของตัวแปรเดี่ยว $T^2_{(1,\, n-1)} = t^2_{(n-1)\ df}$ ซึ่งเราจะเห็นได้จากการเปรียบเทียบค่าในคอลัมน์ที่ 1 ของตาราง T^2 กับการยกกำลัง 2 ของค่าที่สมนัยกันจากตาราง t

จากตารางแสดง upper percentage points of Hotelling's T^2 distribution $(T^2_{(1,\nu),\alpha})$

(α = 0.01)

ν \ p	1
2	98.503
3	34.116
4	21.198
5	16.258
6	13.745
7	12.246
8	11.259
9	10.561
10	10.044

จากตารางแสดง Critical values of the t distribution $(t_{\nu,\alpha})$

ν	$\alpha = 0.005$	$t^2_{\nu,.005}$
2	9.925	98.5056
3	5.841	34.1173
4	4.604	21.1968
5	4.032	16.2570
6	3.707	13.7418
7	3.499	12.2430
8	3.355	11.2560
9	3.250	10.5625
10	3.169	10.0426

โปรดสังเกตว่าทั้ง 2 กรณี คือ

$T^2_{(p,n-1)}$ ในกรณีของตัวแปรพหุและ $t^2_{(n-1)}$ ในกรณีของตัวแปรเดี่ยวต่างก็มีค่า

เท่ากับ nD^2 ในหัวข้อที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่าค่าคงที่ (n) ซึ่งคูณกับ D^2 นั้นเป็นตัวเดียวกันทั้งใน T^2 และ t^2 และนอกเหนือจากนั้น df. ของ T^2 ยังเป็นตัวเดียวกับที่ใช้กับ t^2 ในกรณีของตัวแปรเดี่ยว

ก่อนที่เราจะมีตารางเพื่อหา critical values ของ Hotelling's T^2 นั้นเราใช้ตาราง F เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างตัวสถิติ F และ D^2 ดังนี้

$$F_{(p,n-p)} = \left[(n-p) \,/\, p\,(n-1) \right] n\,D^2 \qquad \ldots①$$

$$\boxed{F_{(p,n-p)} = \left[(n-p) \,/\, p\,(n-1) \right] T^2_{(p,n-1)}} \qquad \ldots②$$

จาก ② ; ถ้า $p = 1$; $F_{(1,n-1)} = [(n-1)/1 \quad (n-1)] \; T^2_{(1,n-1)} = T^2_{(1,n-1)}$

จาก ① ; ถ้า $p = 1$ เราจะได้รูปความสัมพันธ์ที่เราคุ้นเคยคือ

$$\boxed{\begin{aligned} F_{(1,n-1)} &= nD^2 \\ &= t^2_{(n-1)} \end{aligned}} \qquad \ldots③$$

จาก ① นั้นเราสามารถตรวจสอบว่าจริงได้โดยการเลือกค่าจากตาราง T^2 แล้วคูณค่านั้นด้วย $(n-p)\,/\,p\,(n-1)$ เราจะได้ค่า $F_{(p,n-p)}$

ตัวอย่างที่ 1.2

ถ้า $n = 18, p = 3$

$\nu = n-1 = 17$

$T^2_{(3,17),.05} = 11.177$

และ $[(n-p)\,/\,p(n-1)]\,T^2_{(3,17)} = [(18-3)\,/\,3(17)]\,11.177$

$= 3.29 = F_{(3,15),.05}$

ดังนั้นการมีตาราง T^2 ที่สมบูรณ์ ทำให้เราสามารถทดสอบสมมติฐานสำหรับการวิเคราะห์ของตัวแปรพหุได้สะดวกขึ้น

ต่อไปเป็นการแสดงการหาค่า D^2 ซึ่งใช้ในการทดสอบ $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ เมื่อไม่ทราบค่า Σ

ตารางที่ 1.2

โครงสร้างของข้อมูลสำหรับการวิเคราะห์ของตัวแปรพหุ

หน่วยตัวอย่างที่	ค่าสังเกต ลักษณะที่ 1	2	...	i	...	p	
1	$[y_{11}$	y_{21}	...	y_{i1}	...	$y_{p1}]$	$= \mathbf{y}'_1$
2	$[y_{12}$	y_{22}	...	y_{i2}	...	$y_{p2}]$	$= \mathbf{y}'_2$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
j	$[y_{1j}$	y_{2j}	...	y_{ij}	...	$y_{pj}]$	$= \mathbf{y}'_j$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
n	$[y_{1n}$	y_{2n}	...	y_{in}	...	$y_{pn}]$	$= \mathbf{y}'_n$

จากข้อมูลในตารางที่ 1.2 เราคำนวณสิ่งต่อไปนี้

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}/n$$

$$SSy_i = \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)^2}{n}, \quad i = 1, \ldots, p$$

$$SPy_iy_k = \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)(y_{kj} - \bar{y}_k) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}y_{kj} - \left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_{kj}\right)/n$$

$$s_{ii} = SSy_i / (n-1)$$

$$s_{ik} = SPy_iy_k / (n-1)$$

$$d_i = (\bar{y}_i - \mu_{io})$$

$$i = 1, \ldots, p, \; k = 1, \ldots, p \; ; \; i \neq k$$

ดังนั้น S (Sample variance-covariance matrix) = $\hat{\Sigma}$ **คือ**

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ & & & \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} = \frac{1}{n-1} E$$

โดยที่

$$E = \begin{bmatrix} SSy_1 & SPy_1y_2 & \cdots & SPy_1y_p \\ SPy_1y_2 & SSy_2 & \cdots & SPy_2y_p \\ & & & \\ SPy_1y_p & \cdots & & SSy_p \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\boxed{D^2 = \mathbf{d}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{d}}$

$$= \left[d_1 d_2 \ldots d_p \right] \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ & & & \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \\ d_p \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{และหาค่า } T_c^2 = nD^2 \sim T^2_{(p,n-1)}}$

เราจะปฏิเสธ H_o ถ้า T_c^2 มีค่าเกินจุดวิกฤต
(นั่นคือ CR : $T^2 > T^2_{(p,n-1),\alpha}$) ซึ่งคือ upper percentage point ของ **Hotelling's T^2** ซึ่งมี p มิติ และ df = n-1

ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้นว่า df ของ T^2 นั้นคือตัวเดียวกับตัวสถิติ T ในปัญหาของตัวแปรเดี่ยวและโปรดสังเกตว่าสิ่งที่ต้องการคือ n > p ในกรณีของตัวแปรพหุ

1.9 ตัวอย่าง การทดสอบ $H_o : \underline{\mu} = \underline{\mu}_o$ เมื่อไม่ทราบค่า $\underline{\Sigma}$

ตัวอย่างที่ 1.3*

ปริมาณแคลเซียมในผักคะน้าทั้งหมด 29 ค่าสังเกตจากผักคะน้าซึ่งเก็บตัวอย่างมาจากสถานที่ต่าง ๆ ในจังหวัดทางใต้ ในแต่ละการทดลองได้วัดปริมาณแคลเซียมในต้นผัก และปริมาณแคลเซียมในดินซึ่งจะถูกประมาณค่าด้วยแคลเซียม 2 ชนิดคือ

1) available soil calcium และ 2) exchangeable soil calcium

ผู้เชี่ยวชาญทางโภชนาการคาดว่าปริมาณแคลเซียมที่มีอยู่ในผักคะน้านั้นจะมีค่าประมาณ 2.85 และลักษณะของดินที่ต้องการคือมี available soil calcium 15.0 และมี exchangeable soil calcium 6.0 (หน่วยของทั้ง 3 ค่าวัดเป็น mulliequivalents per hundred grams)

ถ้า μ_1 คือ mean available soil calcium
μ_2 คือ exchangeable soil calcium.
μ_3 คือ mean calcium ในผักคะน้า

ต้องการทดสอบ Ho : (μ_1 = 15.0, μ_2 = 6.0, μ_3 = 2.85)

ตารางที่ 1.3
ปริมาณแคลเซี่ยมในดินและในผักคะน้า

หน่วยทดลองที่	Available Ca y_1	Exchangeable Ca y_2	Plant Ca y_3
1	10	3.4	2.11
2	35	4.1	2.36
3	2	1.9	2.13
4	6	3.8	2.78
5	2	1.7	2.17
6	6	1.1	1.76
7	6	1:7	1.68
8	2	0.9	1.89
9	2	1.9	1.98
10	2	0.8	1.76
11	35	3.5	2.80
12	35	4.9	2.70
13	40	30.0	4.38
14	10	2.8	3.21
15	6	2.7	2.73
16	20	2.8	2.81
17	35	4.6	2.88
18	35	10.9	2.90
19	35	8.0	3.28
20	30	1.6	3.20
21	4	1.7	2.17
22	2	0.9	1.38
23	15	2.9	2.44
24	35	11.8	2.34
25	35	3.9	2.21
26	35	5.4	2.14
27	2	1.6	2.69
28	4	2.3	2.02
29	35	3.7	2.46
รวม	521	127.3	71.36

n = 29 $\bar{y}_1$ = 521/29 = 17.9655, $\sum_{j=1} y_{1j}^2$ = 15779, $\sum_{j=1}^{29} y_{1j}\, y_{2j}$ = 3628.7

p = 3 $\bar{y}_2$ = 127.3129 = 4.3897, $\sum_{j=1}^{29} y_{2j}^2$ = 1441.49. $\sum_{j=1}^{29} y_{1j}y_{3j}$ = 1428.11

$\bar{y}_3$ = 71.36/29 = 2.4607, $\sum_{j=1}^{29} y_{3j}^2$ = 186.0506, $\sum_{j=1}^{29} y_{2j}y_{3j}$ = 379.534

$SSy_1 = 15{,}779 - (521)^2 / 29 = 15{,}779 - 9{,}360.0345 = 6{,}418.9655$

$SSy_2 = 1{,}441.49 - (127.3)^2 / 29 = 1{,}441.49 - 558.8031 = 882.6869$

$SSy_3 = 186.0506 - (71.36)^2 / 29 = 186.0506 - 175.5948 = 10.4558$

$SPy_1y_2 = 3628.7 - (521)(127.3) / 29 = 3628.7 - 2287.0103 = 1341.6897$

$SPy_1y_3 = 1428.11 - (521)(71.36) / 29 = 1428.11 - 1282.0193 = 146.0907$

$SPy_2y_3 = 379.534 - (127.3)(71.36) / 29 = 379.534 - 313.2458 = 66.2882$

$$\left.\begin{aligned} s_{11} &= SSy_1 / 28 = 6418.9655 / 28 = 229.2488 \\ s_{22} &= SSy_2 / 28 = 882.6869 / 28 = 31.5245 \\ s_{33} &= SSy_3 / 28 = 10.4558 / 28 = 0.3734 \end{aligned}\right\} \text{sample variances}$$

$$\left.\begin{aligned} s_{12} &= SPy_1y_2 / 28 = 1341.6897 / 28 = 47.9175 \\ s_{13} &= SPy_1y_3 / 28 = 146.0907 / 28 = 5.2175 \\ s_{23} &= SPy_2y_3 / 28 = 66.2882 / 28 = 2.3674 \end{aligned}\right\} \text{sample covariances}$$

$d_1 = \bar{y}_1 - \mu_{10} = 17.9655 - 15.0 = 2.9655$

$d_2 = \bar{y}_2 - \mu_{20} = 4.3897 - 6.0 = -1.6103$

$d_3 = \bar{y}_3 - \mu_{30} = 2.4607 - 2.85 = -0.3893$

ดังนั้น

$$D^2 = \mathbf{d}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{d}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.9655 & -1.6103 & -0.3893 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 229.2488 & 47.9175 & 5.2175 \\ 47.9175 & 31.5245 & 2.3674 \\ 5.2175 & 2.3674 & 0.37341 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2.9655 \\ -1.6103 \\ -0.3893 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.9655 & -1.1603 & -0.3893 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0069923 & -0.0062824 & -0.05787260 \\ -0.0062824 & 0.06619570 & -0.33190540 \\ -0.05787260 & -0.33190540 & 5.59105900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.9655 \\ -1.6103 \\ -.3893 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0533819 & 0.0039854 & -1.8137531 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.9655 \\ -1.6103 \\ -0.3893 \end{bmatrix}$$

$$= 0.8579804$$

$$\therefore (29)(0.8579804) = 24.881431 = T_c^2$$

$$\text{C R : } T^2 > T^2_{(3, .01)} = 14.98$$

24.8814 > 14.98 เราปฏิเสธ Ho ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ mean อย่างน้อย 1 ตัวไม่มีค่าเท่ากับที่เราคาดไว้

ถ้าเรายอมรับ Ho เราไม่จำเป็นต้องอภิปรายใด ๆ ต่อไปอีก แต่อย่างไรก็ดีผู้อ่านควรระลึกไว้ว่าเราได้วัดลักษณะต่าง ๆ 3 ลักษณะ และค่าเหล่านั้นได้ถูกใช้ในการคำนวณตัวสถิติทดสอบ ดังนั้นจึงไม่ผิดปกติที่จะสงสัยว่าเหตุใดที่ทำให้เราปฏิเสธ Ho ตัวอย่างที่เรามีอยู่เป็นหลักฐานสนับสนุนว่า mean บางตัวหรืออาจจะทุกตัวมีค่าต่างไปจากค่าที่ระบุใน Ho ถ้าเป็นเช่นนั้น mean ตัวใดบ้างที่เป็นดังกล่าวคำตอบสำหรับปัญหาชนิดนี้มีความสำคัญมากในการที่จะแปลความหมายของข้อมูลจากการทดลองอย่างเหมาะสม (ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อหลัง) วิธีการที่ได้กล่าวมาในหัวข้อข้างต้นเป็นเพียงการพิจารณาเริ่มต้น เพื่อจะนำไปสู่การสำรวจข้อมูลที่ละเอียดและมากกว่านี้

ตัวอย่างที่ 1.4* ข้อมูลจากตารางที่ 1.4 เป็นตัวอย่างสุ่มของนักศึกษาที่เข้าเรียนวิชาเอกคณิต-ศาสตร์ในมหาวิทยาลัยหนึ่ง

จากประสบการณ์ที่ผ่านมาเราทราบว่านักศึกษาที่สามารถเรียนวิชาปีที่ 1 ได้ดีเป็นที่น่าพอใจควรมีคะแนนเฉลี่ยดังต่อไปนี้

SAT		**Achievement**	
Verbal	Math	Eng	Math
553	635	532	613

ภาควิชาสนใจที่จะทราบว่านักศึกษาปีที่ 1 ของปีนี้จะสามารถเรียนได้ผลดีเป็นที่น่าพอใจหรือไม่ นั่นคือเราจะทดสอบ

$H_0 : \mu' = \mu_0' = [\,553 \quad 635 \quad 532 \quad 613\,]$

$[\, H_0 : \mu' - \mu_0' = 0' \,]$

ตารางที่ 1.4

คะแนนของนิสิตปีที่ 1 วิชาเอกคณิตศาสตร์

คนที่	SAT		Achievement	
	Verbal y_1	Math y_2	English y_3	Math y_4
1	525	609	515	631
2	407	615	487	554
3	538	665	389	625
4	556	661	595	612
5	690	710	611	575
6	427	572	404	544
7	436	615	333	591
8	618	555	634	647
9	453	563	383	565
10	604	632	53.3	641
11	569	575	592	660
12	556	661	465	583
13	545	664	487	679
14	562	642	517	653
15	639	679	655	602
Mean	$\bar{y}_1 = 545$	$\bar{y}_2 = 629.5333$	$\bar{y}_3 = 510.8667$	$\bar{y}_4 = 611.1333$

เพื่อทำการทดสอบ Ho เราต้องหาค่า S จากตารางที่ 1.4 ซึ่งหาได้ดังนี้

$$S = \begin{bmatrix} 6081.43 & 2025.21 & 5477.50 & 1478.28 \\ 2025.21 & 1842.70 & 1330.29 & 163.35 \\ 5471.50 & 1330.29 & 8760.41 & 1390.23 \\ 1478.28 & 163.35 & 1390.23 & 1745.84 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0006642 & 0.0004897 & -0.0002985 & -0.0002789 \\ -0.0004897 & 0.0009717 & 0.0001237 & 0.0002253 \\ -0.0002985 & 0.0001237 & 0.0002810 & 0.0000174 \\ -0.0002789 & 0.0002253 & 0.0000174 & 0.0007740 \end{bmatrix}$$

และ $d' = \bar{y}' - \mu'_o = \begin{bmatrix} 545 - 553 & 629.5333 - 635 & 510.8667 - 532 & 611.1333 - 613 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -8 & -5.4667 & -21.1333 & -1.8667 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $D^2 = d'S^{-1}d$

$$= \begin{bmatrix} -8 & -5.4667 & -21.1333 & -1.8667 \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} -8 \\ -5.4667 \\ -21.1333 \\ -1.8667 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0041922 & -0.0044289 & -0.004259 & -0.0008129 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -5.4667 \\ -21.1333 \\ -1.8667 \end{bmatrix}$$

$= 0.0821979$

$\therefore T_c^2 = n D^2 = 15 \ (0.0821979) = 1.2329685$

จากตาราง $T^2_{(4,\ 14),\ .05} = 17.089$

$T_c^2 < 17.089$ เรายอมรับ Ho ดังนั้นจึงหวังได้ว่านักศึกษาปีที่ 1 ของปีนี้จะสามารถเรียนได้ดีเป็นที่น่าพอใจ

1.10 Simultaneous Confidence Intervals เมื่อไม่ทราบค่า Σ

เท่าที่ผ่านมาเราได้ทดสอบ Ho เกี่ยวกับ vector of means (μ) และได้ผลสรุปเพียงว่ายอมรับหรือไม่ยอมรับ Ho ตัวอย่างเช่นการยอมรับ Ho : $\mu = \mu_o$ ทำให้ไม่ปฏิเสธว่า mean ทุกตัวคือ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ มีค่าเท่ากับค่าที่ระบุไว้ใน Ho ในขณะที่การปฏิเสธ Ho จะทำให้สรุปว่า mean ตัวหนึ่งหรือมากกว่า (หรืออาจจะทุกตัว) ไม่เท่ากับค่าที่ระบุไว้ใน Ho แน่นอนว่าจะเกิดข้อผิดพลาดถ้าเราทำการทดสอบตามวิธีของตัวแปรเดี่ยว โดยใช้ t - test สำหรับ mean แต่ละตัว สำหรับจำนวนครั้งของการทดสอบ และความสัมพันธ์ระหว่างค่าสังเกต ทำให้ค่าของ α แตกต่างไปมากจากค่าของ α ที่เลือกใช้สำหรับการใช้ t - test เพื่อที่จะแสดงความสำคัญของปัญหาดังกล่าวให้เห็นชัด เราจะทำการทดสอบตามวิธีการข้างต้นเป็นขั้นแรก และทำการสำรวจข้อมูลที่มีอยู่อย่างละเอียดมากขึ้นอีก

สมมุติว่าเราปฏิเสธ Ho : $\mu = \mu_o$ แล้วโดยวิธีการของตัวแปรพหุ เราต้องการใช้วิธีของ simultaneous confidence intervals เพื่อหาว่าสมาชิกตัวใดของ μ ต่างไปจากค่าที่ระบุไว้ใน Ho ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงวิธีการหา simultaneous confidence intervals

ตัวอย่างที่ 1.5 โรงงานอุตสาหกรรมโรงงานหนึ่งทำการผลิตชิ้นส่วนเครื่องจักร ซึ่งมีรูเปิดรูป ellipse ซึ่งมีแกนยาว (major axis) 60 มม. และแกนสั้น (minor axis) 50 มม. เร็ว ๆ นี้วิศวกรได้ออกแบบ milling process ใหม่เพื่อให้อัตราการผลิตต่อชั่วโมง (unit / hour) ดีขึ้น และต้องการจะตรวจสอบดูว่าวิธีการใหม่จะทำให้ของที่ผลิตมีคุณภาพเท่าที่ต้องการหรือไม่ด้วย ชิ้นส่วน 100 ชิ้นถูกสุ่มมาวัดแกนยาว (y_1) และแกนสั้น (y_2) คำนวณได้ค่าต่อไปนี้

$$\bar{y}_1 = 56.42\ ,\quad \bar{y}_2 = 38.79$$

และ

$$S = \begin{bmatrix} 128.18 & 117.56 \\ 213.23 & 128.18 \end{bmatrix}$$

ทดสอบ Ho : $\mu = \mu_0$ หรือ Ho : ($\mu_1 = 60$, $\mu_2 = 50$)

หาค่า $d_1 = \bar{y}_1 - \mu_{10} = 56.42 - 60 = -3.58$

$$d_2 = \bar{y}_2 - \mu_{20} = 38.79 - 50 = 11.21$$

และ

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.013611 & \\ -0.014840 & 0.024687 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = d'\, S^{-1}\, d$$

$$= [\,2.085601\ \ 11.21\,] \begin{bmatrix} 0.013611 & 0.0148 \\ 0.014840 & 0.024687 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.58 \\ -11.21 \end{bmatrix}$$

$$T_c^2 = n\,D^2 = 100\,(2.085601) = 208.560$$

จากการทำ linear interpolation $T^2_{(2,\,99),\,.01} = 9.756$

$\because T_c^2 > 9.756$ ดังนั้นเราปฏิเสธ H_o แสดงว่าวิธีการผลิตวิธีใหม่ผลิตชิ้นส่วนต่างไปจากวิธีการผลิตแบบเก่า

ในการพิจารณาต่อไปว่าปริมาณที่วัดได้ (แกนยาว, แกนสั้น) ตัวใดที่จะทำให้เราปฏิเสธ Ho เราจะทำการหา confidence interval (C.I.) ของทุก linear function ของสมาชิกของ $\underline{\mu}$ ซึ่งอยู่ในรูป $c'\underline{\mu}$

Pin $\mathbf{c}$ ใด ๆ ด้วย confidence coefficient $(1-\alpha)$ นิพจน์ของ C.I. คือ

$$\boxed{\mathbf{c}'\bar{y} - \sqrt{\tfrac{1}{n}\mathbf{c}'\mathbf{S}\mathbf{c}}\; T_{(p,\, n-1),\, \alpha} \le \mathbf{c}'\underline{\mu} \le \mathbf{c}'\bar{\boldsymbol{y}} + \sqrt{\tfrac{1}{n}\mathbf{c}'\mathbf{S}\mathbf{c}}\; T_{(p,\, n-1),\, \alpha}}$$

โดยที่ $T_{(p,\, n-1)\, \alpha}$ คือ positive square root ของ $T^2_{(p,\, n-1)\, \alpha}$

ถ้า $\boxed{p=1}$ นิพจน์นี้จะกลายเป็น

$$\bar{y} - \sqrt{\tfrac{1}{n}s^2}\, T_{(1,\, n-1),\alpha} \le \mu \le \bar{y} + \sqrt{\tfrac{1}{n}s^2}\, T_{(1,\, n-1),\, \alpha}$$

$$\because\ T_{(1,\, n-1),\, \alpha} = t_{n-1,\, \frac{\alpha}{2}}$$

ดังนั้นเมื่อ $p = 1$, C.I. **ข้างต้นคือ C.I. ของ** μ **ในกรณีของ** univariate **นั่นเอง**

เพื่อหา joint **C.I.'s ของ** μ_1 **และ** μ_2 **สำหรับวิธีการใหม่ จากตัวอย่างข้างต้น** (ตัวอย่างที่ 1.5)

ในที่นี้ $p = 2$ ให้ $\underline{c}_1' = [1 \quad 0]$ และ $\underline{c}_2' = [0 \quad 1]$

ดังนั้น $\underline{c}_1'\underline{\mu} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} = \mu_1$

$$\underline{c}_2'\underline{\mu} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} = \mu_2$$

$$\underline{c}_1'\bar{\underline{y}} = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}56.42\\ 38.79\end{bmatrix} = 56.42 = \bar{y}_1$$

$$\underline{c}_2'\bar{\underline{y}} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}56.42\\ 38.79\end{bmatrix} = 38.79 = \bar{y}_2$$

สำหรับแกนยาว

$$\sqrt{\tfrac{1}{n}\mathbf{c}_1'\mathbf{S}\,\mathbf{c}_1} = \sqrt{\tfrac{1}{100}[1 \quad 0]\begin{bmatrix}213.23 & 128.18\\ 128.18 & 117.56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{100}[213.23 \quad 128.18]\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{100}(213.23)}$$

$$= \sqrt{2.1323} = 1.4602$$

$$T_{(2,\ 99),\ .01} = \sqrt{T^2_{(2,99),\ .01}} = \sqrt{9.756} = 3.123$$

$\therefore$ C.I. ของ μ_1 (mean major axis length) ของวิธีการใหม่คือ

$$56.42 \pm 1.4602\ (3.123) = 56.42 \pm 4.56$$

$$= (51.86,\ 60.98)$$

โปรดสังเกตว่าค่า $\mu_{10} = 60$ (จาก H_o) นั้นรวมอยู่ใน C.I. นี้ด้วย นั่นคือ

$$51.86 < 60 < 60.98$$

ดังนั้นจึงสมเหตุสมผลที่จะสรุปว่า การวัดแกนยาวไม่ได้ทำให้เราปฏิเสธ H_o

สำหรับแกนสั้น

$$c_2' \bar{y} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 56.42 \\ 38.79 \end{bmatrix} = 38.19$$

$$\sqrt{\frac{1}{n} c_2' S c_2} = \sqrt{\frac{1}{100}[0 \quad 1]\begin{bmatrix} 213.23 & 128.18 \\ 128.18 & 117.57 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{100}[128.18 \quad 117.56]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{100}(117.56)}$$

$$= \sqrt{1.1756} = 1.0842$$

$\therefore$ C.I. ของ μ_2 (mean minor axis length) ของวิธีการใหม่คือ

$$38.79 \pm (1.0842)(3.123)$$

$$= 38.79 \pm 3.39 = (35.40, 42.18)$$

$\mu_{20} = 50 = c_2' \underset{\sim}{\mu}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 60 \\ 50 \end{bmatrix} = 50$ นั้นไม่รวมอยู่ใน C.I. นี้

เราจึงมีเหตุผลที่จะสรุปว่าแกนสั้นนั้นเป็นตัวทำให้เรา reject Ho ดังนั้นจากตัวอย่างจึงเป็นหลักฐานว่าความยาวเฉลี่ยของแกนสั้นจากวิธีการผลิตใหม่นั้นสั้นกว่าที่ต้องการ

C.I.'s ที่หาจากวิธีการข้างต้นนี้เชื่อมั่นได้ด้วย confidence coefficient อย่างน้อย $(1 - \alpha)$ นั่นคืออย่างน้อย .99 สำหรับตัวอย่างนี้

1.11 Simultaneous Confidence Intervals เมื่อทราบค่า Σ

ในหัวข้อ 1.5 เราแสดงวิธีการทดสอบ $H_0 : \mu = \mu_0$ เมื่อทราบค่า Σ โดยใช้ตัวสถิติทดสอบคือ χ^2_p

เมื่อเปรียบเทียบค่าตารางของ χ^2 และ T^2 จะพบว่า

$$\boxed{\chi^2_{p,\alpha} = T^2_{(p,\infty),\alpha}}$$

ดังนั้นเราอาจหาจุดวิกฤตจากตาราง T^2 แทนที่จะใช้ตาราง χ^2 เพื่อที่จะพิจารณาว่า mean ตัวใดที่ทำให้เราปฏิเสธ Ho เราจะหา simultaneous confidence intervals ของ $c'\mu$

Simultaneous confidence intervals ของ $c'\mu$ เมื่อทราบค่า Σ คือ

$$\boxed{c'\bar{y} - \sqrt{\frac{1}{n} c' \underset{\sim}{\Sigma} c \; T_{(p,\infty),\alpha}} \le c'\mu \le c'\bar{y} + \sqrt{\frac{1}{n} c' \underset{\sim}{\Sigma} c \; T_{(p,\infty),\alpha}}}$$

ซึ่งเหมือนกับ C.I. ในหัวข้อ 1.10 ยกเว้นแทน S ด้วย Σ

แบบฝึกหัดที่ 1

1.1 นักศึกษาปีที่ 1 คณะศิลปศาสตร์ จำนวน 50 คน ซึ่งเป็นตัวอย่างสุ่ม ให้คะแนนเฉลี่ยดังนี้

	SAT		Achievement	
Relative rank	**Math**	**English**	**Math**	**English**
20.9	533	554	535	534

สมมุติว่า

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{vmatrix} 178.53 & -238.85 & -178.46 & -396.70 & -266.30 \\ -238.85 & 6059.23 & 2626.54 & 4425.30 & 2775.70 \\ -178.46 & 2626.54 & 6228.37 & 2557.87 & 4972.24 \\ -396.70 & 4425.30 & 2557.87 & 7416.10 & 2444.65 \\ -266.30 & 2775.70 & 4972.24 & 2444.65 & 6974.28 \end{vmatrix}$$

จงทดสอบ Ho : $\underset{\sim}{\mu} = \begin{bmatrix}25 & 575 & 565 & 560 & 530\end{bmatrix}$ ที่ $\alpha = .05$ และหา joint confidence สำหรับคะแนนเฉลี่ย

1.2 ข้อมูลจากตัวอย่างสุ่มซึ่งประกอบด้วยนักศึกษาปีที่ 1 คณะบริหารธุรกิจ

โดยที่ y_1 คือ Relative rank

y_2 คือ SAT Math

y_3 คือ SAT English

y_4 คือ Achievement Math

y_5 คือ Achievement English

1) จงหาเมตริกซ์ **E** และ **S**

2) จงทดสอบ $H_0 : \mu' = [25 \quad 575 \quad 565 \quad 560 \quad 530]$ ที่ $\alpha = .05$

3) จงหา joint confident interval สำหรับค่าเฉลี่ย ที่ $\alpha = .05$

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
25.3	445	613	509	563
8.0	433	558	504	4%
17.9	545	502	493	457
37.5	446	436	432	448
9.7	466	655	581	573
45.5	440	527	354	457
30.4	431	556	448	546
23.3	683	615	615	612
16.6	512	502	626	419
33.7	562	528	465	486
57.1	506	417	366	409
46.9	466	575	415	428
39.3	532	527	509	506
8.1	551	493	637	477
33.3	584	637	615	506
23.3	542	604	449	525
23.1	414	508	464	535
26.1	410	651	377	583
20.3	387	637	399	532
35.2	394	580	468	509
21.0	677	545	537	525
33.5	460	600	393	602
11.1	406	551	399	535
22.5	348	527	387	435

1.3 ในการทำฟาร์มและเลี้ยงสัตว์ในประเทศสหรัฐอเมริกา จากตัวอย่างขนาดใหญ่มาก นักเศรษฐศาสตร์การเกษตรได้พบว่า พื้นที่เลี้ยงสัตว์เฉลี่ย (วัดเป็นเอเคอร์) เท่ากับ 88 พื้นที่ปลูกพืชเฉลี่ยเท่ากับ 34 และระยะทางเฉลี่ยไปถึงตลาดชุมชนใหญ่คือ 38 ไมล์ และยังพบว่า

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 16{,}413.30 & 5{,}530.86 & 850.25 \\ 5{,}530.86 & 2{,}456.32 & 212.99 \\ 850.25 & 2'72.99 & 396.60 \end{bmatrix}$$

จากฟาร์มที่สุ่มมาเป็นตัวอย่าง 55 แห่งใน Lee Country และ Scott County ในรัฐเวอร์-จิเนีย พบว่า $\bar{y}' = \begin{bmatrix} 53 & 13 & 47 \end{bmatrix}$ จะสรุปได้หรือไม่ว่าการทำฟาร์มใน county ทั้งสองของรัฐเวอร์จิเนียข้างต้นนี้อยู่ในมาตรฐาน