บทที่ 2
การอนุมานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มประชากร 2 กลุ่ม
(Inference about Two Treatments)

บทที่ 2
การอนุมานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มประชากร 2 กลุ่ม
(Inference about Two Treatments)

2.1 บทนำ

ในบทนี้จะทำการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการเท่ากันของ vector ของ mean ของ 2 วิธีการในกรณีของตัวแปรพหุ เรายังจะใช้ D^2 และตัวสถิติ Hotelling's T^2 ถ้าเราปฏิเสธ Ho เราจะได้พิจารณาต่อไปด้วยว่า mean ตัวใดที่ทำให้เราปฏิเสธ Ho นั่นคือสมาชิกของ vector ของ mean ตัวใดที่ต่างไปจากตัวอื่น ๆ เมื่อเราขยายการทดสอบด้วย pooled t - test (ในกรณีของตัวแปรเดียว) มาเป็นกรณีของตัวแปรพหุนั้น เราต้องมีเงื่อนไขว่า variance - covariance matrices ต้องเท่ากัน ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงการทดสอบการเท่ากันของ variance - covariance matrices 2 matrices

ถ้าแม้เราปฏิเสธสมมติฐานว่า variance - covariance matrices 2 matrices เท่ากัน เราจะทำการทดสอบสมมติฐานว่า mean vectors 2 vectors เท่ากันด้วย เราจะพิจารณา linear discriminant function และจะแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันดังกล่าวกับตัวสถิติ Hotelling's T^2 และจะแสดงวิธีการจัดจำแนกสิ่งหนึ่งเข้ากลุ่มที่ 1 หรือกลุ่มที่ 2 โดยการใช้ linear discriminant function

2.2 ทบทวนการทดสอบในการวิเคราะห์ของตัวแปรเดียว : Pooled t - Test

เมื่อตัวอย่างสุ่ม 2 ตัวอย่าง ถูกสุ่มอย่างเป็นอิสระต่อกันจากประชากรแบบปกติ 2 ประชากร ซึ่งมี mean μ_1 และ μ_2 เรามักจะทำการทดสอบสมมติฐานว่า mean ทั้ง 2 เท่ากัน นั่นคือทดสอบ Ho : $\mu_1 = \mu_2$ vs. $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

โครงสร้างของข้อมูล

ประชากรที่ 1 : สุ่มตัวอย่างที่ 1 ขนาด n_1 : $y_{11}\ y_{12}, \ldots, y_{1j}, \ldots, y_{1n_1}$

ประชากรที่ 2 : สุ่มตัวอย่างที่ 2 ขนาด n_2 : $y_{21}\ y_{22}, \ldots, y_{2j}, \ldots, y_{2n_2}$

ถ้าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองเท่ากัน ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) แต่เราไม่ทราบค่า ตัวสถิติทดสอบคือ T ถ้า t_c เป็นค่าค่าหนึ่งของ T เราคำนวน t_c ดังนี้

$$\bar{y}_1 = \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} / n_1 \quad , \quad \bar{y}_2 = \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j} / n_2$$

$$SSy_1 = \sum_{j=1}^{n_1} (y_{1j} - \bar{y}_1)^2$$

$$SSy_2 = \sum_{j=1}^{n_2} (y_{2j} - \bar{y}_2)^2$$

$$SS_{combined} = SS_c = SSy_1 + SSy_2$$

$$s_c^2 = s_{pooled}^2 = SS_c/(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\sigma^2_{\bar{Y}_1} = \frac{\sigma^2_{Y_1}}{n_1} \quad , \quad \sigma^2_{\bar{Y}_2} = \frac{\sigma^2_{Y_2}}{n_2} \quad , \quad \sigma^2_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = \sigma^2_{\bar{Y}_1} + \sigma^2_{\bar{Y}_2} = \frac{\sigma^2_{Y_1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{Y_2}}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

$$s^2_{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2} = s^2_{pooled}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \quad , \quad \hat{\sigma}^2 = s^2_{pooled}$$

$$= s^2_{pooled}\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)$$

$$t_c = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{s_{pooled}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{s_c\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad \text{——①}$$

ถ้าใช้แนวความคิดเรื่องระยะทาง

$$d = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$$

และ $D = \frac{d}{s_c}$

$$= \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{s_c}$$

$$D^2 = \frac{d^2}{s_c^2} = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2}{s_c^2}$$

$$D^2 = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)\ \frac{1}{s_c^2}\ (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \qquad \text{——②}$$

เปรียบเทียบ ① และ ②

$$t_c^2 = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2}{s_c^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

$$= D^2/\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) = \frac{D^2}{\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)}$$

$$\therefore\ t_c^2 = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}\right) D^2$$

2.3 การทดสอบ $H_0: \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ เมื่อตัวอย่าง (ไม่เป็นคู่) เป็นอิสระต่อกัน

ในกรณีของตัวแปร p ตัว ความสัมพันธ์ระหว่าง D^2 และตัวสถิติ Hotelling's T^2 คือ

$$T^2_{(p, n_1 + n_2 - 2)} = \left(\frac{n_1 \, n_2}{n_1 + n_2}\right) D^2$$

โครงสร้างของข้อมูล แสดงในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.1

Treatment															
$1 : [\underline{Y}_1 \sim N_p(\underline{\mu}_1, \underline{\Sigma}_1)]$								$2 : [\underline{Y}_2 \sim N_p(\underline{\mu}_2, \underline{\Sigma}_2)]$							
Sample No.	Characteristic 1	2	.	k	.	.	p	Sample No.	Characteristic 1	2	...	k		p	
1	$y_{11}^{(1)}$	$y_{11}^{(2)}$	...	$y_{11}^{(k)}$	...		$y_{11}^{(p)}$	1	$y_{21}^{(1)}$	$y_{21}^{(2)}$	...	$y_{21}^{(k)}$	...	$y_{21}^{(p)}$	
2	$y_{12}^{(1)}$	$y_{12}^{(2)}$	...	$y_{12}^{(k)}$	...		$y_{12}^{(p)}$	2	$y_{22}^{(1)}$	$y_{22}^{(2)}$	. . .	$y_{22}^{(k)}$	.	$y_{22}^{(p)}$	
.		.		.			.	.	.	.	.	.		.	
j	$y_{1j}^{(1)}$	$y_{1j}^{(2)}$	...	$y_{1j}^{(k)}$	. . .		$y_{1j}^{(p)}$	j	$y_{2j}^{(1)}$	$y_{2j}^{(2)}$	. . .	$y_{2j}^{(k)}$	. . .	$y_{2j}^{(p)}$	
:	:	.					.	.	.	.	.	.		.	
n_1	$y_{1n}^{(1)}$	$y_{1n_1}^{(2)}$	.	$y_{1n_1}^{(k)}$	...		$y_{1n_1}^{(p)}$	n_2	$y_{1n_2}^{(1)}$	$y_{2n_2}^{(2)}$	...	$y_{2n_2}^{(k)}$	...	$y_{2n_2}^{(p)}$	

$$\underline{Y}_1' = [\, Y_1^{(1)} \, Y_1^{(2)} \dots Y_1^{(p)} \,], \quad \underline{Y}_2' = [\, Y_2^{(1)} \, Y_2^{(2)} \dots Y_2^{(p)} \,]$$

จากตารางที่ 2.1 $\boxed{y_{ij}^{(k)}}$

subscript i ระบุวิธีการที่ (treatment ที่ในที่นี้มี 2 วิธีการ) $i = 1, 2$

subscript j ระบุหน่วยทดลองที่ "(experimental unit ที่) $j = 1, \dots, n_i$

superscript k ระบุลักษณะที่วัด (ทั้งหมดมี p ลักษณะ) $k = 1, \dots, p$

เรามี p-variate observations จาก multivariate normal population 2 populations

เราอาจเขียนข้อมูลในตารางที่ 2.1 ในรูปของ p-dimensional vectors

$\underline{y}'_{11}$	$\underline{y}'_{21}$
$\underline{y}'_{12}$	$\underline{y}'_{22}$
$\vdots$	$\vdots$
$\underline{y}'_{1j}$	$\underline{y}'_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$
$\underline{y}'_{1n_1}$	$\underline{y}'_{2n_2}$

โดยที่ $\underline{y}'_{11} = (y_{11}^{(1)}\ y_{11}^{(2)} \dots y_{11}^{(p)})$, ...

$\underline{y}'_{2n_2} = (y_{2n_2}^{(1)}, y_{2n_2}^{(2)} \dots y_{2n_2}^{(p)})$ เป็นต้น

และมีข้อสมมุติว่า

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{Y}_{1j} \sim N_p(\underline{\mu}_1, \Sigma_1), j = 1, \dots n_1 \\ \underline{Y}_{2j} \sim N_p(\underline{\mu}_2, \Sigma_2), j = 1, \dots, n_2 \\ \text{และ } \Sigma_1 = \Sigma_2 \end{array}}$$

ต้องการทดสอบ $H_0: \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ โดยที่

$$\underline{\mu}'_1 = (\mu_1^{(1)}\ \mu_1^{(2)} \dots \mu_1^{(p)})$$

$$\text{และ } \underline{\mu}'_2 = (\mu_2^{(1)}\ \mu_2^{(2)} \dots \mu_2^{(p)})$$

หรืออาจเขียน H_0 ใหม่ดังนี้

$H_0: (\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)}, \mu_1^{(2)} = \mu_2^{(2)}, \dots, \mu_1^{(p)} = \mu_2^{(p)})$ และ

$H_1: \underline{\mu}_1 \neq \underline{\mu}_2$

ก่อนการทดสอบต้องทำการคำนวณสิ่งต่อไปนี้คือ

$$\bar{y}_1^{(k)} = \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}^{(k)}/n_1$$

$$\bar{y}_2^{(k)} = \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}^{(k)}/n_2 \qquad \dots. (2.3.1)$$

โดยที่ $k = 1, 2, \dots . p$

$$SSy_1^{(k)} = \sum_{j=1}^{n_1} (y_{1j}^{(k)})^2 - (\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}^{(k)})^2/n_1$$

$$SSy_2^{(k)} = \sum_{j=1}^{n_2} (y_{2j}^{(k)})^2 - (\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}^{(k)})^2/n_2$$

$k=1, \ldots . p$ ...(2.3.2)

$$SPy_1^{(k)}y_1^{(m)} = \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}^{(k)}y_{1j}^{(m)} - (\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}^{(k)})(\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}^{(m)})/n_1$$

$$SPy_2^{(k)}y_2^{(m)} = \sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}^{(k)}y_{2j}^{(m)} - (\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}^{(k)})(\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}^{(m)})/n_2$$

$k \neq m = 1, \ldots . p$ ...(2.3.3)

$$SSy^{(k)} = SSy_1^{(k)} + SSy_2^{(k)}, \; k = 1, \ldots . p$$

$$SPy^{(k)}y^{(m)} = SPy_1^{(k)}y_1^{(m)} + SPy_2^{(k)}y_2^{(m)}, \; k \neq m = 1, \ldots . p$$

...(2.3.4)

$$s_{kk} = SSy^{(k)}/(n_1 + n_2 - 2), \; k = 1, \ldots . p$$

$$s_{km} = SPy^{(k)}y^{(m)}/(n_1 + n_2 - 2), \; k \neq m = 1, \ldots . p$$

...(2.3.5)

$$d_k = \bar{y}_1^{(k)} - \bar{y}_2^{(k)}, \; k = 1, \ldots . p \qquad \ldots(2.3.6)$$

เขียน D^2 ในเทอมของ d_k, s_{kk} และ s_{km} ดังนี้

$$D^2 = [\, d_1 \; d_2 \ldots d_p \,] \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{a}'\,\mathbf{d} \text{ โดยที่ } \boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}}$$

ในการทดสอบ $H_0: \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ เราคำนวณ

$$T_c^2 = [n_1 n_2/(n_1 + n_2)]D^2$$

ถ้า H_0 จริง T_c^2 เป็นค่าของ $T^2_{(p,\, n_1 + n_2 - 2)}$

เราปฏิเสธ H_0 ถ้า T_c^2 มีค่ามากกว่า $T^2_{(p,\, n_1 + n_2 - 2),\, \alpha}$

2.4 ตัวอย่างการทดสอบ $H_o\ \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ ถ้า $\Sigma_1 = \Sigma_2$

ตัวอย่างที่ 2.1* โรงงานผลิตเหล็กกล้าใช้คาร์บอน 0.2% และอุณหภูมิ 2 ระดับในการหมุนชิ้นเหล็กรูปทรงกระบอกถูกสุ่มมาจากการผลิตในอุณหภูมิที่ต่างกัน ได้ทำการวัด yield point ($y^{(1)}$) และ ultimate strength ($y^{(2)}$) ของเหล็กรูปทรงกระบอกแต่ละชิ้น ค่าที่วัดได้คูณด้วย 1,000 ปอนด์/ตารางนิ้วของพื้นที่หน้าตัดของรูปทรงกระบอก แสดงค่าในตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2

Yield Point (Y.P.) and Ultimate Strength (U.S.) of Steel Produced at Two Rolling Temperatures

	Temperature 1		Temperature 2	
	$y_1^{(1)}$(Y.P.)	$y_1^{(2)}$(U.S.)	$y_2^{(1)}$(Y.P.)	$y_2^{(2)}$(U.S.)
	33	60	35	57
	36	61	36	59
	35	64	38	59
	38	63	39	61
	40	65	41	63
			43	65
			41	59
Total	182	313	273	423

คำนวณค่าต่าง ๆ ตามสูตรในหัวข้อ 2.3 **ดังนี้** ($p = 2$, $n_1 = 5$, $n_2 = 7$)

จาก (2.3.1) $\bar{y}_1^{(1)} = 182/5 = 36.40$, $\bar{y}_1^{(2)} = 313/5 = 62.60$

$\bar{y}_2^{(1)} = 273/7 = 39.00$ $\bar{y}_2^{(2)} = 423/7 = 60.429$

จาก (2.3.2) $SSy_1^{(1)} = 6654 - 6624.80 = 29.20$

$SSy_1^{(2)} = 19611 - 19593.80 = 17.20$

$SSy_2^{(1)} = 10697 \quad 10647 = 50.00$

$SSy_2^{(2)} = 25607 - 25561.28 = 45.72$

จาก (2.3.3) $SP_{y_1^{(1)}, y_1^{(2)}} = 11410 - 11393.20 = 16.80$

$SP_{y_2^{(1)} y_2^{(2)}} = 16537 - 16497 = 40.00$

จาก (2.3.4) $SSy^{(1)} = SSy_1^{(1)} + SSy_2^{(1)} = 29.20 + 50.00 = 79.20$

$SSy^{(2)} = SSy_1^{(2)} + SSy_2^{(2)} = 17.20 + 45.72 = 62.92$

$SPy^{(1)}y^{(2)} = SPy_1^{(1)}y_1^{(2)} + SPy_2^{(1)}y_2^{(2)}$

$= 16.80 + 40.00 = 56.80$

จาก (2.3.5) $s_{11} = 79.20/10 = 7.920$ $(n_1 + n_2 - 2 = 5 + 7 - 2 = 10)$

$s_{22} = 62.92/10 = 6.292$

$s_{12} = 56.80/10 = 5.680$

จาก (2.3.6) $d_1 = \bar{y}_1^{(1)} - \bar{y}_2^{(1)} = 36.40-39.00 = -2.60$

$d_2 = \bar{y}_1^{(2)} - \bar{y}_2^{(2)} = 62.60 - 60.429 = 2.171$

$$\therefore \quad S = \begin{bmatrix} 7.92 & 5.68 \\ 5.68 & 6.292 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.358106 & -0.323274 \\ -0.323274 & 0.450762 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} -2.60 & 2.171 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.358106 & -0.323274 \\ -0.323274 & 0.450762 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.6 \\ 2.171 \end{bmatrix} = \mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.6329034 & 1.8191167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.6 \\ 2.171 \end{bmatrix} = \mathbf{a}' \begin{bmatrix} -2.6 \\ 2.171 \end{bmatrix}$$

$$= 8.1948511$$

$$\therefore \quad T_c^2 = \left[(5)(7) / (5 + 7) \right] (8.1948511)$$

$$= 23.901648$$

จากตาราง $T^2_{(2,\ 10),\ .01} = 17.826$

$\because$ 23.901 > 17.826 เราปฏิเสธ H_o ที่ $\alpha = .01$ นั่นคือ $\mu_1^{(1)} \neq \mu_2^{(1)}$ หรือ $\mu_1^{(2)} \neq \mu_2^{(2)}$ หรืออาจเป็นทั้ง 2 กรณี นั่นแสดงว่าอุณหภูมิในการหมุนมีผลต่อลักษณะใดลักษณะหนึ่งที่เราสนใจหรือทั้ง 2 ลักษณะ (2 ลักษณะคือ yield point และ ultimate strength)

2.5 Linear Discriminant Functions

จากตารางที่ 2.2 (หัวข้อ 2.4)

ถ้าใช้ pooled t-test ทดสอบ

1) H_0: $\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)}$

$$t_{c1} = (36.40 - 39.00)/\sqrt{(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7})\,7.92} = -1.58$$

2) H_0: $\mu_1^{(2)} = \mu_2^{(2)}$

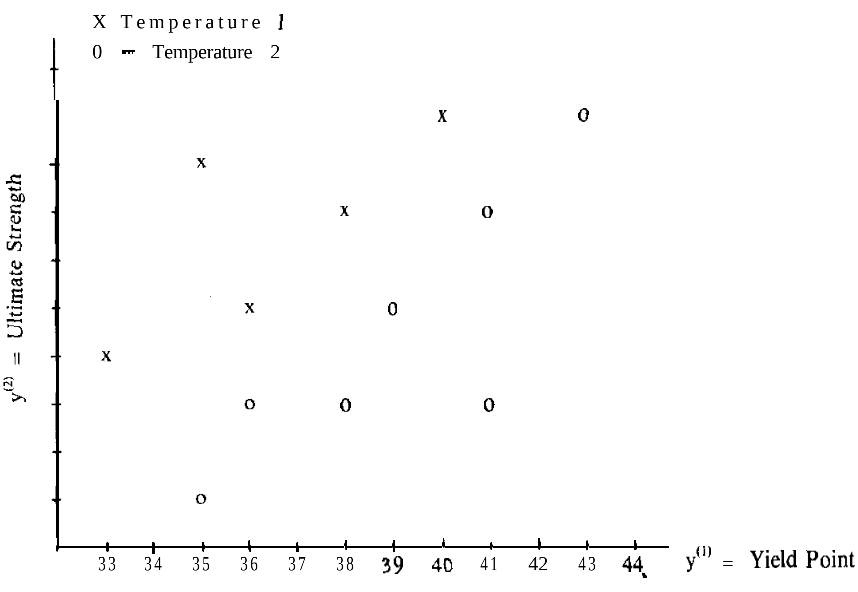
$$t_{c2} = (62.6 - 60.43)/\sqrt{(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7})\,6.292} = -1.48$$

เปรียบเทียบ t_{c1} และ t_{c2} กับ $t_{10,\ .025} = 2.228$ $(t^2_{10,\ .025} = 4.964)$

หรือเทียบ t^2_{c1} และ t^2_{c2} กับ $T^2_{(1,\ 10),\ .05} = 4.965$

เราจะไม่ปฏิเสธสมมติฐานทั้ง 2 ข้อ

จากวิธีการทดสอบทั้ง 2 ลักษณะพร้อมกันโดยใช้วิธีการวิเคราะห์ของตัวแปรพหุ (หัวข้อ 2.4) เราอาจกล่าวได้ว่าวิธีการทดสอบและการใช้วิธีการวิเคราะห์ของตัวแปรพหุมีความสามารถในการแยกแยะความแตกต่างระหว่างวิธีการได้ดีกว่าวิธีวิเคราะห์ของตัวแปรเดี่ยว ทั้งนี้จะแสดงให้เห็นได้ในรูปของกราฟและแนวความคิดของ linear discriminant function



รูปแสดงจุดซึ่งมี coordinate $(y^{(1)}, y^{(2)})$ สำหรับอุณหภูมิแต่ละระดับ

จากรูปถ้าพิจารณาที่ $y^{(1)}$: yield point อย่างเดียว นั่นคือการฉาย (projection) จุดทั้งหลายลงบนแกน $y^{(1)}$ เราจะพบว่าจุดที่เกิดจากอุณหภูมิ 2 ระดับซ้อนกันอยู่ นั่นคือ ไม่น่าแปลกที่เราจะไม่ปฏิเสธ H_0: $\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)}$ เมื่อเราใช้ pooled t-test และถ้าเราพิจารณาที่ $y^{(2)}$: Ultimate strength อย่างเดียว ก็จะได้ผลสรุปเช่นเดียวกัน เมื่อเราฉายจุดทั้งหลายลงบนแกน $y^{(2)}$

ถ้าเราพิจารณาการกระจายของจุดดังรูป เราจะเห็นได้ว่าจุดเหล่านั้นแยกกันเป็น 2 กลุ่ม โดยที่แต่ละกลุ่มสมนัยกับระดับอุณหภูมิ และเราสามารถแยกกลุ่มทั้ง 2 ออกได้ด้วยเส้นตรงเส้นหนึ่ง ปรากฏการณ์นี้อธิบายได้ว่าทำไมเราจึงปฏิเสธสมมติฐาน H_o : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ เมื่อเราใช้ค่า Hotelling's T^2 ในการทดสอบ แต่อาจจะไม่เกิดเหตุการณ์ในลักษณะนี้เสมอไป เพราะจุดอาจจะปนเปกัน และเมื่อค่า T^2 อาจไม่มีนัยสำคัญก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าการปนเปนั้นมากน้อยเพียงใด

เนื่องจากว่าในตัวอย่างนี้ กลุ่มของจุดทั้ง 2 กลุ่มอาจถูกแยกจากกันด้วยเส้นตรง เราอาจจะรวมการวัดทั้ง 2 ลักษณะ (yield point และ ultimate strength) เข้าเป็น **การวัดประกอบ** (a single composite measurement) 1 ค่า เพื่อวัตถุประสงค์ของการจำแนกกลุ่ม 2 กลุ่มที่แตกต่างกัน เราทำได้โดยการแทน bivariate observations ($y_{ij}^{(1)}$, $y_{ij}^{(2)}$) ภายใต้อุณหภูมิระดับที่ 1 ด้วยข้อมูลตัวเลข (scalar observation) คือ

$$L_{1j} = a_1 y_{1j}^{(1)} + a_2 y_{1j}^{(2)} \quad , \quad j = 1, \ldots, (n_1 = 5)$$

a_1 และ a_2 เป็นค่าคงที่

ในทำนองเดียวกัน bivariate observation 7 ตัวภายใต้อุณหภูมิระดับที่ 2 จะถูกแทนด้วย

$$L_{2j} = a_1 y_{2j}^{(1)} + a_2 y_{2j}^{(2)} \quad , \quad j = 1, \ldots, (n_2 = 7)$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยของวิธีการทั้งสองในรูปของ L_{1j} **และ** L_{2j} **คือ**

$$\bar{L}_1 = \sum_{j=1}^{n_1} L_{1j}/n_1$$

$$\bar{L}_2 = \sum_{j=1}^{n_2} L_{2j}/n_2$$ ทั้งนี้สำหรับค่าใด ๆ ของ a_1 และ a_2

อย่างไรก็ดีค่าคงที่เหล่านี้อาจถูกเลือก (โดยคำนึงถึงส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของมัน) เพื่อทำให้ความแตกต่าง $(\bar{L}_1 - \bar{L}_2)$ มีค่าสูงสุดสำหรับค่า a_1 และ a_2 ที่เราเลือกได้

เราเรียก linear combination $\boxed{L = a_1 y^{(1)} + a_2 y^{(2)}}$ ของ bivariate medsurement ว่า **linear discriminant function**

ถ้าเราทราบค่า a_1 และ a_2 เราก็สามารถคำนวณค่า L สำหรับแต่ละคู่ของค่าที่วัดมาได้ในตัวอย่างข้างต้น หรือโดยทั่ว ๆ ไปสำหรับชุดของ p ค่าที่วัดได้

อันที่จริงแล้ว เราได้คำนวณค่า a_1 และ a_2 แล้ว (ในหัวข้อ 2.4)

โดยที่ $\boxed{\mathbf{a}' = \mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}}$

นั่นคือ $a_1 = -1.6329034$ และ $a_2 = 1.8191167$ สำหรับตัวอย่างดังกล่าว เพื่อให้เห็นชัดเจนขึ้น เราจะคำนวณค่าของ L โดยใช้สูตร

$$L = -1.6329034y^{(1)} + 1.8191167y^{(2)}$$

ตัวอย่างเช่น หา L_{ij}, $i = 1,\dots, p ; j = 1, \dots, n_i$

$$L_{11} = -1.6329034)(33) + (1.8191167)(60)$$

$$= 55.26 \text{ (สำหรับข้อมูลคู่แรกในตารางที่ 2.2)}$$

ค่า L สำหรับข้อมูลทั้งหมดในตารางที่ 2.2 แสดงไว้ในตารางที่ 2.3 และได้คำนวณหา $\bar{L}_1$ และ $\bar{L}_2$ ด้วย

ตารางที่ 2.3

แสดงค่าของ Linear discriminant function สำหรับข้อมูลจากตารางที่ 2.2

	Temperature 1	Temperature 2
	55.26	46.54
	52.18	48.54
	59.27	45.28
	52.55	47.28
	52.93	47.66
		48.03
		40.38
Total	272.19	323.71
Mean	54.438	46.244

เราอาจคำนวณ $\bar{L}_1 = a_1\bar{y}_1^{(1)} + a_2\bar{y}_1^{(2)} = \mathbf{a}'\bar{\underline{y}}_1$

$$\bar{L}_2 = a_1\bar{y}_2^{(1)} + a_2\bar{y}_2^{(2)} = \mathbf{a}'\bar{\underline{y}}_2$$

นอกจากนั้นค่า $\bar{L}_1$ และ $\bar{L}_2$ ที่คำนวณได้จากตัวอย่าง อาจจะนำมาใช้คำนวณค่า D^2 ทั้งนี้เพราะ $\boxed{D^2 = \bar{L}_1 - \bar{L}_2} = 54.438 - 46.244 = 8.194$ (ซึ่งเราได้คำนวณมาก่อนแล้วในหัวข้อ 2.4)

ต่อไปเราจะใช้ข้อมูลในตารางที่ 2.3 ทำการทดสอบด้วยวิธีการของตัวแปรเดี่ยว โดยใช้ t-test เพื่อทดสอบว่าค่าเฉลี่ยของทั้ง 2 วิธีการเท่ากันหรือไม่ เราจะคำนวณค่าต่าง ๆ ตามสูตรในหัวข้อ 2.2 ดังนี้

$$\bar{L}_1 = 272.19/5 = 54.438$$

$$\bar{L}_2 = 323.71/7 = 46.244$$

$$SS_1 = 14843.6487 - 14808.7704 = 34.8783$$

$$SS_2 = 15006.4584 - 14959.5657 = 46.8927$$

$$SS_c = 34.8783 + 46.8927 = 81.7710$$

$$s_c^2 = 81.7710/10 = 8.1771$$

$$s^2_{\bar{L}_1 - \bar{L}_2} = (12/35)\,(8.1771) = 2.8036$$

$$t_c = (54.438 - 46.244)/\sqrt{2.8036} = 4.89$$

เราปฏิเสธ H_o นั่นคือค่าเฉลี่ยของ 2 วิธีการต่างกัน

$$\left[\begin{array}{l} t_{(n_1 + n_2 - 2), \frac{\alpha}{2}} = t_{10, .025} \\ t_{10, .025} = 2.228 \end{array}\right]$$

$$t_c^2 = (4.89)^2 = 23.91$$

ซึ่งเป็นค่าเดียวกับ T_c^2 ในหัวข้อ 2.4 (T_c^2 = 23.901[illegible])

(ต่างกันเล็กน้อยเนื่องจากการตัดทศนิยมทิ้งไประหว่างการคำนวณ)

เมื่อเราย้อนกลับไปดูตารางที่ 2.2 เราจะเห็นว่ากลุ่มทั้ง 2 ไม่ได้ซ้อนกันเลย ความจริงดังกล่าวเราได้คาดไว้แล้ว ทั้งนี้เพราะเราสามารถลากเส้นตรงแบ่งแยกจุดในกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ได้อย่างสมบูรณ์ ในหัวข้อ 2.7 เราจะพิจารณาการจำแนกจุดแต่ละจุด (individual) โดยใช้วิธีของ linear discriminant function

2.6 Simultaneous Confidence Intervals

ในกรณีของการเปรียบเทียบ 2 วิธีการและตัวอย่างทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน เมื่อเราวัดค่าเกิน 1 ค่า (เกิน 1 ลักษณะ) จากแต่ละหน่วยทดลอง เราอาจหา Confidence intervals เพื่อหาว่าสมาชิกตัวใดของ mean vector ต่างไปเมื่อวิธีการเปลี่ยนไป นั่นคือดูว่าสมาชิกตัวใดทำให้เราปฏิเสธ $H_o : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$

ตัวอย่างที่ 2.2 ชายสูงอายุ 49 คน ถูกจำแนกออกเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มที่มีอาการความจำเสื่อมและกลุ่มที่ไม่มีอาการของโรคดังกล่าว ทั้งนี้เพื่อตรวจสอบอาการทางประสาท ได้ทำการทดสอบตามสเกลที่เรียกว่า Wechsler Adult Intelligence Scale โดยทดสอบ 4 ชนิดย่อย ๆ ผลการทดสอบทั้ง 4 ชนิด แสดงความแตกต่างของค่าเฉลี่ยระหว่าง 2 กลุ่ม ค่าเฉลี่ยแสดงในตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.4

ขนาดของตัวอย่าง ค่าเฉลี่ยของการทดสอบย่อย 4 ชนิด

ซึ่งทดสอบกับชายสูงอายุ 2 กลุ่ม

	ไม่มีอาการความจำเสื่อม	มีอาการความจำเสื่อม
	$n_1 = 37$	$n_2 = 12$
Information	$\bar{y}_1^{(1)} = 12.57$	$\bar{y}_2^{(1)} = 8.75$
Similarities	$\bar{y}_1^{(2)} = 9.57$	$\bar{y}_2^{(2)} = 5.33$
Arithmetic	$\bar{y}_1^{(3)} = 11.49$	$\bar{y}_2^{(3)} = 8.50$
Picture Completion	$\bar{y}_1^{(4)} = 7.97$	$\bar{y}_2^{(4)} = 4.75$

ภายใต้เงื่อนไขว่า variance-covariance matrices ของทั้ง 2 กลุ่มเท่ากัน ค่าประมาณของ variance-covariance matrix ที่เท่ากันคือ S จากข้อมูลเราคำนวณได้ S ดังนี้

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 11.2553 & 9.4042 & 7.1489 & 3.3830 \\ 9.4042 & 13.5318 & 7.3830 & 2.5532 \\ 7.1489 & 7.3830 & 11.5744 & 2.6170 \\ 3.3830 & 2.5532 & 2.6170 & 5.8085 \end{bmatrix}$$

ต้องการทดสอบว่าชายสูงอายุ 2 กลุ่มนี้เป็นตัวอย่างที่มาจากประชากร 2 ประชากรที่มีคะแนนเฉลี่ยของการทดสอบทั้ง 4 ชนิดเท่ากัน และถ้าเราปฏิเสธสมมติฐานนี้ เราจะใช้วิธีการหา simultaneous confidence interval เพื่อหาว่าค่าเฉลี่ยของการทดสอบย่อยใดที่แตกต่างกันระหว่าง 2 กลุ่ม

คำนวณค่า $\mathbf{S}^{-1}$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.259064 & -0.135783 & -0.058797 & -0.064719 \\ 0.135783 & 0.186449 & 0.038305 & 0.014382 \\ -0.058797 & -0.038305 & 0.150964 & -0.016920 \\ -0.064719 & 0.014283 & 0.016920 & 0.211171 \end{bmatrix}$$

$p = 4$, $k = 1, \ldots, 4$

$$d_1 = \bar{y}_1^{(1)} - \bar{y}_2^{(1)} = 12.57 - 8.75 = 3.82$$

$$d_2 = \bar{y}_1^{(2)} - \bar{y}_2^{(2)} = 9.57 \quad 5.33 = 4.24$$

$$d_3 = \bar{y}_1^{(3)} - \bar{y}_2^{(3)} = 11.49 - 8.50 = 2.99$$

$$d_4 = \bar{y}_1^{(4)} - \bar{y}_2^{(4)} = 7.97 - 4.75 = 3.22$$

ดังนั้น

$D^2 = \mathbf{d}' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{d} = a' \ \mathbf{d}$

$$= [\, 3.82 \quad 4.24 \quad 2.99 \quad 3.22 \,]\ \mathbf{S}^{-1} \begin{bmatrix} 3.82 \\ 4.24 \\ 2.99 \\ 3.22 \end{bmatrix}$$

$$= [\, 0.0297 \quad 0.2036 \quad 0.0099 \quad 0.4431 \,] \begin{vmatrix} 3.82 \\ 4.24 \\ 2.99 \\ 3.22 \end{vmatrix} = \mathbf{a}' \ \mathbf{d}$$

$= 2.4331$

และ $T_c^2 = [\, n_1 n_2 \,/\, (n_1 + n_2) \,]\ (2.4331)$

$= [\, (37)(12) \,/\, (37 + 12) \,]\ (2.4331)$

$= 22.047$

จากตาราง $T^2_{(4,\ 47),.01} = 16.155$ (จากการทำ linear interpolation)

$[\, n_1 + n_2 - 2 = 37 + 12 - 2 = 47 \,]$

$\because T_c^2 > 16.155$ เราปฏิเสธ H_o ที่ $\alpha = .01$ สรุปว่า $\underline{\mu}_1$ และ $\underline{\mu}_2$ ต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

เราหา simultaneous confidence intervals สำหรับความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของการทดสอบระหว่าง 2 กลุ่ม เพื่อหาดูว่าคู่ใดที่แตกต่างกันและทำให้เราปฏิเสธ H_o

สูตรในการหา **simultaneous** confidence intervals สำหรับ **c** ใด ๆ คือ

$$\mathbf{c}'\, d - \sqrt{\mathbf{c}'\, \mathbf{S}\, \mathbf{c}} \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)}{n_1 n_2} \, T^2_{(p,\ n_1 + n_2 - 2),\ \alpha}} < \mathbf{c}'\, (\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2) < \mathbf{c}'\, d + \sqrt{\mathbf{c}'\, \mathbf{S}\, \mathbf{c}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \, T^2_{(p, n_1 + n_2 - 2),\ \alpha}}$$

ถ้า p = 1 เราจะเห็นว่าสูตรข้างบนนั้นคือสูตรที่เราใช้กับการหา confidence intervals ในกรณีของ **ตัวแปรเดี่ยวคือ**

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - s_{pooled}\, t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + s_{pooled}\, t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

จากข้อมูลของการทดสอบย่อยที่ 1 คือ Information

$$c_1'd = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 3.82 \\ 4.24 \\ 2.99 \\ 3.22 \end{bmatrix} = 3.82$$

$$\sqrt{c_1' S c_1} = \sqrt{[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 11.2553 & 9.4042 & 7.1489 & 3.3830 \\ 9.4042 & 13.5318 & 7.3830 & 2.5532 \\ 7.1489 & 7.3830 & 11.5744 & 2.6170 \\ 3.3830 & 2.5532 & 2.6170 & 5.8085 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \sqrt{[11.2553 \quad 9.4042 \quad 7.1489 \quad 3.3830] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \sqrt{11.2553}$$

$$= 3.3549$$

และ $$\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} T^2_{(4,\,47),\,.05}} = \sqrt{\frac{(37 + 12)}{(37)\,(12)}\, 11.044)} = \sqrt{1.2188}$$

$$= 1.1040$$

ดังนั้น 3.82 ± (3.3549) (1.1040) = 3.82 ± 3.70 = (0.12, 7.52)

∴ C.I. ของ $\mu_1^{(1)} - \mu_2^{(1)}$ คือ (0.12, 7.52)

เนื่องจากศูนย์ไม่รวมอยู่ในช่วงนี้ เราสรุปที่ 95% joint confidence level ว่าค่าเฉลี่ยสำหรับการทดสอบเรื่อง "Information" ของ 2 กลุ่ม แตกต่างกัน

ในทำนองเดียวกันสำหรับ การทดสอบ **Similarity**

$\mathbf{c}_2' = [\,0\ 1\ 0\ 0\,]$

เราหา c; d = 4.24

$\sqrt{\mathbf{c}_2'\mathbf{S}\mathbf{c}_2} = 3.6786$

ดังนั้น C.I. ของ $\mu_1^{(2)} - \mu_2^{(2)}$ คือ 4.24 ± (3.6786) (1.1040)

= 4.24 ± 4.06

= (0.18, 8.30)

สำหรับการทดสอบ Arithmetic

$\mathbf{c}_3' = [\,0\ 0\ 1\ 0\,]$

c; d = 2.99

$\sqrt{\mathbf{c}_3'\mathbf{S}\mathbf{c}_3} = 3.4021$

ดังนั้น C.I. ของ $\mu_1^{(3)} - \mu_2^{(3)}$ คือ 2.99 ± 3.4021 (1.1040)

= 2.99 ± 3.76

= (-0.77, 6.75)

และสำหรับการทดสอบ Picture Completion

$\mathbf{c}_4' = [\,0\ 0\ 0\ 1\,]$

$\mathbf{c}_4'\mathbf{d} = 3.22$

$\sqrt{\mathbf{c}_4'\mathbf{S}\mathbf{c}_4} = 2.4101$

ดังนั้น C.I. ของ $\mu_1^{(4)} - \mu_2^{(4)}$ คือ 3.22 ± 2.4101 (1.1040)

= 3.22 ± 2.66

= (.56, 5.88)

จากผลข้างต้นเราสรุปได้ว่ากลุ่มทั้ง 2 แตกต่างกันในเรื่องค่าเฉลี่ยของการทดสอบ Information, Similarity และ Picture Completion ส่วนค่าเฉลี่ยของการทดสอบ Arithmetic นั้นไม่แตกต่างกัน

จากวิธีการทดสอบ $H_o : \mu_1 = \mu_2$ นั้นผลการทดสอบเราสรุปได้เพียงว่าเรายอมรับหรือไม่ยอมรับ H_o เท่านั้น แต่วิธีการในข้อนี้ทำให้เราสามารถบอกเจาะจงลงไปได้ว่าค่าเฉลี่ยของลักษณะใดระหว่าง 2 กลุ่มที่แตกต่างกัน อย่างไรก็ดีการอนุมานข้างต้นนั้นบางครั้งยังมีความสำคัญรองลงมาเมื่อเรามีวัตถุประสงค์ในการตรวจสอบที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรพหุ เราจะพิจารณาว่า linear discriminant function (ซึ่งกล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2.5) จะถูกนำไปใช้เพื่อจุดประสงค์ในการกำหนดกลุ่มที่อยู่ให้แก่ข้อมูลแต่ละตัวได้อย่างไร

2.7 การจำแนกกลุ่มของสิ่งของโดยใช้วิธีการของ Linear Discriminant Function

ในหัวข้อ 2.5 เรากล่าวถึง linear function $L = a_1y^{(1)} + a_2y^{(2)}$ ว่าคือเลขจำนวนที่สะท้อนให้เห็นความแตกต่างระหว่างกลุ่ม 2 กลุ่ม ในตัวอย่างที่ใช้พบว่าค่าของ L แตกต่างกันมากสำหรับ 2 กลุ่ม เราตั้งคำถามว่าความสัมพันธ์นี้จะถูกนำมาใช้ในทางกลับกันได้หรือไม่ **นั่นคือถ้าเราไม่ทราบว่าข้อมูลตัวหนึ่ง ๆ อยู่ในกลุ่มใดแต่เราทราบค่าของ $y^{(1)}$ และ $y^{(2)}$ เราจะสามารถใช้ความรู้นี้ร่วมกับ L เพื่อกำหนดว่าข้อมูลตัวนั้น ๆ ควรจะอยู่ในกลุ่มใดได้หรือไม่** อาจกล่าวโดยทั่วไปว่า**เราตั้งคำถามว่า linear function $L = a_1y^{(1)} + a_2y^{(2)} + \ldots + a_py^{(p)}$ จะถูกใช้ในการที่จะบอกว่าข้อมูลตัวหนึ่งนั้นควรจะเป็นสมาชิกของกลุ่มใดมากกว่าที่จะเป็นสมาชิกของกลุ่มอื่น ๆ หรือไม่**

ปัญหาชนิดนี้เกิดขึ้นบ่อย **ตัวอย่างเช่น** โรงงานอุตสาหกรรมทำการทดสอบพนักงานเพื่อจะกำหนดงานให้แก่พนักงานแต่ละคนอย่างถูกต้อง พร้อมทั้งต้องการบอกว่าคนนั้นมีความสามารถหรือถนัดในด้านการบริหารหรือไม่ **หรือ** อาจจะมีผู้สนใจในความแตกต่างระหว่างเชื้อชาติ (races) ในงานการวินิจฉัยหรือในการคัดผู้สมัครเข้าฝึกการบิน เป็นต้น

จากตัวอย่างที่ 2.2 ในหัวข้อ 2.6 จากการทำการสำรวจตรวจสอบทางประสาทอย่างเข้มข้นจะต้องใช้เวลามากและเสียค่าใช้จ่ายสูง จึงเป็นที่สนใจว่าการใช้คะแนนการทดสอบจะทำให้สามารถแยกกลุ่มทั้ง 2 ได้หรือไม่

จากที่ผ่านมา $\boxed{L = \mathbf{a}'\mathbf{y} \text{ และ } \mathbf{a}' = \mathbf{d}'\,\mathbf{S}^{-1}}$

และได้จากหัวข้อ 2.6 ว่า

$$L = 0.0297\, y^{(1)} + 0.2036\, y^{(2)} + 0.0099\, y^{(3)} + 0.4431\, y^{(4)}$$

ในการจำแนกบุคคลคนหนึ่งซึ่งเราไม่รู้จักออกตามอาการของความจำเสื่อม ค่าที่วัดได้คือ $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ และ $y^{(4)}$ ถูกใช้เพื่อคำนวณค่า L_c

ถ้าค่าของ $L_c - \mathbf{a}'\bar{\mathbf{y}}_2 > D^2/2 = 1.2166$ $(D^2 = 2.4331)$

เราจะกำหนดให้คนคนนั้นอยู่ในกลุ่มที่ 1 (กลุ่มที่ไม่มีอาการความจำเสื่อม) นอกจากนั้นจะกำหนดให้อยู่ในกลุ่มที่ 2 (กลุ่มที่มีอาการความจำเสื่อม)

เพื่อให้เข้าใจถึง discriminant function L ดียิ่งขึ้น **เราอาจดูความสัมพันธ์ของ L กับ $y^{(k)}$, $k = 1, \ldots, p$**

ค่าประมาณของสหสัมพันธ์ $\hat{\varrho}(y^{(k)}, L)$ หาได้จากสูตร

$$\boxed{\hat{\varrho}(y^{(k)}, L) = d_k/\sqrt{s_{kk}D^2}}$$

สำหรับ **Information** $(y^{(1)})$ เราได้

$$\hat{\varrho}(y^{(1)}, L) = 3.82/\sqrt{(11.2553)(2.4331)}$$
$$= 3.82/5.2331$$
$$= 0.7300$$

สำหรับ Similarities $(y^{(2)})$ เราได้ $\hat{\varrho}(y^{(2)}, L) = 0.7389$

สำหรับ Arithmetic $(y^{(3)})$ เราได้ $\hat{\varrho}(y^{(3)}, L) = 0.5634$

สำหรับ Picture Completion $(y^{(4)})$ เราได้ $\hat{\varrho}(y^{(4)}, L) = 0.8565$

$$\hat{\varrho}(y^{(2)}, L) = 4.24/\sqrt{(13.5318)(2.4331)} = 4.24/5.7380 = 0.7389$$

$$\hat{\varrho}(y^{(3)}, L) = 2.99/\sqrt{(11.5744)(2.4331)} = 2.99/5.3068 = 0.5634$$

$$\hat{\varrho}(y^{(4)}, L) = 3.22/\sqrt{(5.8085)(2.4431)} = 3.22/3.7594 = 0.8565$$

จากหัวข้อ 2.6 C.I. ของ Arithmetic รวมศูนย์อยู่ด้วย และเห็นได้ว่าตัวแปรตัวนี้ไม่ได้มีส่วนทำให้ค่า D^2 มีนัยสำคัญ จาก $\hat{\varrho}(y^{(k)}, L)$ เราจะเห็นว่า $\hat{\varrho}$ สำหรับ Arithmetic น้อยกว่าของตัวแปรอื่นอีก 3 ตัวอย่างเห็นได้ชัด จากการพิจารณาดังกล่าวแสดงว่าเราอาจไม่นำเอา Arithmetic มาช่วยในการจัดจำแนกเราจะใช้เพียงตัวแปร 3 ตัวเพื่อบอกความแตกต่างระหว่างกลุ่มทั้ง 2 ก็ได้

ต่อไปเราจะพิจารณาผลที่เกิดจากการตัดตัวแปร Arithmetic $(y^{(3)})$ ออก

ขณะนี้ $p = 3$ เราตัดแถวที่ 3 และคอลัมน์ที่ 3 ของ **S** ในหัวข้อ 2.6 ออกเราได้

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 11.2553 & 9.4042 & 3.3830 \\ 9.4042 & 13.5318 & 2.5532 \\ 3.3830 & 2.5532 & 5.8085 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.236193 & -0.150687 & -0.071326 \\ -0.150687 & 0.176720 & 0.010084 \\ -0.071326 & 0.010084 & 0.209271 \end{bmatrix}$$

และ $D^2 = [\ 3.82\ \ 4.24\ \ 3.22\ ]\ S^{-1} \begin{bmatrix} 3.82 \\ 4.24 \\ 3.22 \end{bmatrix}$

$= [\ 0.0337\ \ 0.2061\ \ 0.4441\ ] \begin{bmatrix} 3.82 \\ 4.24 \\ 3.22 \end{bmatrix}$

$= 2.4326$

$\therefore\ \ T^2_c = [(37)\ (12)\ /\ (37 + 12)]\ (2.4326)$

$= 22.042$

จากการทำ linear interpolation $T^2_{(3,47),.01} = 13.321$

$T^2_c > 13.321$ เราปฏิเสธ $H_o : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$

โดยที่ $\underline{\mu}_1' = [\ \mu_1^{(1)}\ \ \mu_1^{(2)}\ \ \mu_1^{(4)}\ ]$ และ

$\underline{\mu}_2' = [\ \mu_2^{(1)}\ \ \mu_2^{(2)}\ \ \mu_2^{(4)}\ ]$

Linear discriminant function ในขณะนี้ คือ

$L = 0.0337\ y^{(1)} + 0.2061\ y^{(2)} + 0.4441\ y^{(4)}$

ต่อไปหา Simultaneous **C.I.'s**

สำหรับ Information $(y^{(1)})$

$c_1'\ d = 3.82$

$\sqrt{c_1'\ S\ c_1} = \sqrt{11.2553} = 3.3549$

$\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} T^2_{(3,47),.05}} = \sqrt{\frac{(37) + (12)}{(37)\ (12)} 8.813} = 0.9862$

$\therefore$ ช่วงความเชื่อมั่นของ $\mu_1^{(1)} - \mu_2^{(1)}$ คือ $3.82 \pm (3.3549)\ (0.9862)$

$= (0.51,\ 7.13)$

สำหรับ Similarity $(y^{(2)})$

$c_2'\ d = 4.24,\ \sqrt{c_2'\ S\ c_2} = \sqrt{13.5318} = 3.6786$

$\therefore$ C.I. ของ $\mu_1^{(2)} - \mu_2^{(2)}$ คือ $4.24 \pm (3.6786)\ (0.9862)$

$= (0.61,\ 7.87)$

สำหรับ Picture Completion $(y^{(4)})$

$c_4'\ d = 3.22$

$\sqrt{c_4'\ S\ c_4} = \sqrt{5.8085} = 2.4101$

$\therefore$ C.I. ของ $\mu_1^{(4)} - \mu_2^{(4)}$ คือ $3.22 \pm (2.4101)\ (0.9862)$

$= (.84,\ 5.60)$

จากช่วงทั้ง 3 ข้างต้นเราจะเห็นว่าไม่มีช่วงใดที่รวมศูนย์อยู่เลย และเราสรุปได้ว่าค่าที่วัดทั้ง 3 นั้นทำให้เราปฏิเสธ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$

ต่อไปเราพิจารณา $\hat{\varrho}_{(y^{(i)}, L)}$ เพื่อดูว่าตัวแปรแต่ละตัวสัมพันธ์กับ L อย่างไร

เราหาค่า $\hat{\varrho}_{(y^{(1)}, L)} = 3.82 / \sqrt{(11.2553)(2.4326)} = 0.7300$

$$\hat{\varrho}_{(y^{(2)}, L)} = 4.24 / \sqrt{(13.5318)(2.4326)} = 0.7390$$

$$\hat{\varrho}_{(y^{(4)}, L)} = 3.22 / \sqrt{(5.8085)(2.4326)} = 0.8566$$

เราจะเห็นได้ว่าตัวแปรทั้ง 3 ตัวนั้นมีความสัมพันธ์กับ L เท่าเทียมกันหรือดีกว่าเมื่อมีตัวแปร Arithmetic อยู่ด้วย

ดังนั้นเราจึงควรใช้ linear discriminant function

$$L = 0.0337\, y^{(1)} + 0.2061\, y^{(2)} + 0.4441\, y^{(4)}$$

ในการจำแนกแต่ละหน่วยทดลองเพื่อให้ตกอยู่ในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งใน 2 กลุ่ม

2.8 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการเท่ากันของ Variance - Covariance Matrices 2 Matrices ($H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2$)

ในกรณีของตัวแปรเดี่ยวการใช้ pooled t - test นั้นเราต้องมีข้อสมมติว่าความแปรปรวนของ 2 ประชากรเท่ากัน นั่นคือ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ในทำนองเดียวกันจากหัวข้อ 2.3 จะเห็นว่าการทดสอบในกรณีของตัวแปรพหุนั้นเราต้องมีข้อสมมุติ $\Sigma_1 = \Sigma_2$

ดังนั้นหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการทดสอบ Ho: $\Sigma_1 = \Sigma_2$ ซึ่งควรจะต้องกระทำก่อนการทดสอบการเท่ากันของ vectors ของ means ถ้าผลการทดสอบในข้อนี้ได้ผลสรุปว่า $\Sigma_1 = \Sigma_2$ เราใช้วิธีการทดสอบ Ho: $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ ในหัวข้อ 2.3 ได้ แต่ถ้า $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ เราจะใช้วิธีการซึ่งจะกล่าวในหัวข้อ 2.12 ในการทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$

ในการวิเคราะห์ของตัวแปรเดี่ยว

การทดสอบ Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ นั้นเราใช้ตัวสถิติทดสอบ $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

$f_c = s_1^2 / s_2^2$ เทียบกับจุดวิกฤตของ F - distribution โดยที่ s_1^2 และ s_2^2 เป็นความแปรปรวนของตัวอย่างที่ 1 และของตัวอย่างที่ 2 ตามลำดับ

ในการวิเคราะห์ของตัวแปรพหุ

เราทดสอบ Ho: $\Sigma_1 = \Sigma_2$ ตามวิธีการต่อไปนี้คือ

เราคำนวณค่า

$$M = (n_1 + n_2 - 2) \log |S| - (n_1 - 1) \log |S_1| - (n_2 - 1) \log |S_2|$$

โดยที่ S_1 และ S_2 เป็น variance - covariance matrices ของกลุ่มที่ 1 และ กลุ่มที่ 2 ตามลำดับ

$$S = \left[(n_1 - 1) S_1 + (n_2 - 1) S_2 \right] / (n_1 + n_2 - 2)$$

และ log คือ log ฐานสิบ

คำนวณ $m = 1 - \left[\frac{1}{(n_1 - 1)} + \frac{1}{(n_2 - 1)} - \frac{1}{(n_1 + n_2 - 2)} \right] \left[(2p^2 + 3p - 1) / 6(p + 1) \right]$

สำหรับ n_1 และ n_2 ที่มีขนาดใหญ่

$$\chi^2 = 2.3026\, m\, M \sim \chi^2_{p(p+1)/2}$$

$$\left[\log_e x = \ln x = 2.3026 \log_{10} x \right]$$

ตัวอย่างที่ 2.3 เรากลับไปพิจารณาตัวอย่างของการผลิตเหล็กกล้าโดยใช้อุณหภูมิ 2 ระดับ (ตัวอย่างที่ 2.1) และทดสอบ Ho : $\Sigma_1 = \Sigma_2$, $n_1 = 5$, $n_2 = 7$

ในตัวอย่างนี้เราคำนวณ

$$S_1 = \begin{bmatrix} 7.3000 & 4.2000 \\ 4.2000 & 4.3000 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 8.3333 & 6.6667 \\ 6.6667 & 7.6200 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{4(7.3) + (6)(8.3333)}{10} & \frac{4(4.2) + 6(6.6667)}{10} \\ \frac{4(4.2) + 6(6.6667)}{10} & \frac{4(4.3) + 6(7.62)}{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7.9199 & 5.6800 \\ 5.6800 & 6.2920 \end{bmatrix}$$

$$|S| = 17.5702, \quad |S_1| = 13.7500, \quad |S_2| = 19.0548$$

$$\begin{aligned} M &= 10 \log (17.5702) - 4 \log (13.75) - 6 \log (19.0548) \\ &= 10 (1.24477) - 4 (1.13830) - 6 (1.28) \\ &= 0.21450 \end{aligned}$$

และ $m = 1 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right] \left[(8 + 6 - 1) / 18 \right]$

$= 1 - (0.3167)(0.7222)$

$= 0.7713$

ดังนั้น $2.3026\, m\, M = (2.3026)(0.7713)(0.21450)$

$$\chi^2_c = 0.3810$$

$\therefore \; \chi^2_{3,.05} = 7.815 > 0.3810$ เราไม่ปฏิเสธ Ho : $\Sigma_1 = \Sigma_2$

หมายเหตุ เราอาจอ่านค่า $\chi^2_{3,.05}$ โดยการอ่านค่าของ $T^2_{(3,\infty).05}$ แทนได้

2.9 ทบทวนการทำ Paired t - Test ในกรณีของการวิเคราะห์ของตัวแปรเดี่ยว

สมมุติว่าหน่วยทดลองมีการจับคู่กันก่อนที่จะสุ่มวิธีการหนึ่งให้แก่สมาชิกตัวหนึ่งในคู่ ถ้า μ_1 **และ** μ_2 เป็นค่าเฉลี่ยของวิธีการที่ 1 และ 2 ตามลำดับให้ $\delta = \mu_1 - \mu_2$ เรามักทดสอบ Ho: $\delta = 0$ นั่นคือทดสอบว่าค่าเฉลี่ยทั้ง 2 ตัวเท่ากัน

ข้อมูลคือ $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1j}, \ldots, y_{1n}$

$y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2j}, \ldots, y_{2n}$

เราทำการคำนวณสิ่งต่อไปนี้คือ

$$d_j = y_{1j} - y_{2j} \quad , j = 1,\ldots,n$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d_j \quad = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$$

$$SSd = \sum_{j=1}^{n} d_j^2 \quad \frac{(\Sigma\, d_j)^2}{n} \quad , S_D^2 = \frac{SSd}{n-1}$$

$$s_{\bar{D}}^2 = \frac{s_D^2}{n}$$

$$t_c = \frac{\bar{d}}{s_{\bar{D}}} = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) / \sqrt{s_{\bar{D}}^2} \text{ เป็นค่าของ } T \sim t_{n-1}$$

เราอาจยกกำลัง 2 ของ t_c แล้วเทียบกับจุดวิกฤต $T^2_{(1,n-1)}$ ถ้าเราใช้ $H_1 : \delta \neq O$ การทดสอบนี้ เราอาจพิจารณาในรูปของระยะทางดังนี้

กำหนดให้ $d = \bar{d} = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$

และ $D = d / s_D$

ดังนั้น $D^2 = d^2 / s^2_D$

$$= d \frac{1}{s^2_D} d = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2}{s^2_D}$$

นั่นคือ $t^2_c = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 / (s^2_D / n)$

$$= \frac{n\,(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2}{s^2_D}$$

$t^2_c = nD^2 = T^2_c$ ซึ่งเป็นค่าของ $T^2_{(1,\, n-1)}$

การทดสอบข้างต้นนั้นสามารถใช้ได้เมื่อวิธีการ 2 วิธีถูกใช้กับหน่วยทดลองเดียวกันอย่างต่อเนื่องกัน ข้อมูลชนิดนี้จะได้เมื่อหน่วยทดลองเป็นคนหรือสัตว์ ตัวอย่างเช่น การทดสอบกับกลุ่มของนักเรียนที่เลือกมาอย่างสุ่ม ข้อมูลคือคะแนนสอบก่อนได้รับวิธีการ และคะแนนสอบหลังจากได้รับวิธีการแล้ว การวัดความดันโลหิตของกลุ่มคนไข้ก่อน และหลังการรักษาเพื่อดูอิทธิพลวิธีการรักษานั้น ๆ

2.10 การทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ หรือ $H_o : \underline{\delta} = O$ เมื่อข้อมูลมีการจับคู่

สำหรับกรณีของ p - variate

$$T^2_{(p,\, n-1)} = n\, D^2$$

ถ้าให้ $\underline{\mu}_1$ และ $\underline{\mu}_2$ เป็น vectors ของ means สำหรับวิธีการที่ 1 และวิธีการที่ 2 ตามลำดับ

$$\underline{\delta} = \underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2$$

เราสนใจการทดสอบ $H_o : \underline{\delta} = o,\ H_1 : \underline{\delta},\ o$

นั่นคืออาจเขียน Ho ได้ดังนี้

$$Ho : (\delta_1 = o,\ \delta_2 = o,\ \ldots,\ \delta_p = o)$$

หรือ

$$Ho : (\mu_1^{(1)} = \mu_2^{(1)},\ = \mu_1^{(2)} = \mu_2^{(2)},\ \ldots,\ \mu_1^{(p)} = \mu_2^{(p)})$$

โครงสร้างของข้อมูลใน p-variate คือข้อมูลในตารางที่ 2.5

ตารางที่ 2.5

โครงสร้างของข้อมูลสำหรับการวิเคราะห์ของตัวแปรพหุ

	1						Treatment			2			
Sample No.	Characteristic						Sample No.	Characteristic					
	1	2	...	k	...	p		1	2	...	k	...	p
1	$y_{11}^{(1)}$	$y_{11}^{(2)}$	...	$y_{11}^{(k)}$	...	$y_{11}^{(p)}$	1	$y_{21}^{(1)}$	$y_{21}^{(2)}$	...	$y_{21}^{(k)}$	...	$y_{21}^{(p)}$
2	$y_{12}^{(1)}$	$y_{12}^{(2)}$	...	$y_{12}^{(k)}$	...	$y_{12}^{(p)}$	2	$y_{22}^{(1)}$	$y_{22}^{(2)}$	...	$y_{22}^{(k)}$	...	$y_{22}^{(p)}$
.	.	.		.		.	.	.	.		.		.
.	.	.		.		.	.	.	.		.		.
.	.	.		.		.	.	.	.		.		.
j	$y_{1j}^{(1)}$	$y_{1j}^{(2)}$	...	$y_{1j}^{(k)}$	...	$y_{1j}^{(p)}$	j	$y_{2j}^{(1)}$	$y_{2j}^{(2)}$	...	$y_{2j}^{(k)}$	...	$y_{2j}^{(p)}$
.	.	.		.		.	.	.	.		.		.
.	.	.		.		.	.	.	.		.		.
.	.	.		.		.	.	.	.		.		.
n	$y_{1n}^{(1)}$	$y_{1n}^{(2)}$	...	$y_{1n}^{(k)}$	...	$y_{1n}^{(p)}$	n	$y_{2n}^{(1)}$	$y_{2n}^{(2)}$	...	$y_{2n}^{(k)}$	...	$y_{2n}^{(p)}$

ในตารางที่ 2.5

$y_{ij}^{(k)}$: i = subscript แรกหมายถึงวิธีการที่ และ

j = subscript ตัวที่สองหมายถึง คู่ที่เท่าใด และ

k = superscript หมายถึงลักษณะที่ที่เราวัดมา

เราคำนวณ $\quad d_j^{(k)} = y_{1j}^{(k)} - y_{2j}^{(k)},\ k = 1, \ldots, p\ ;\ j = 1, \ldots, n$

ดังนั้นเราอาจเขียน $d_j^{(k)}$'s ทั้งหมดดังนี้

$$\begin{array}{cccccc}
d_1^{(1)} & d_1^{(2)} & \ldots & d_1^{(k)} & \ldots & d_1^{(p)} \\
d_2^{(1)} & d_2^{(2)} & \ldots & d_2^{(k)} & \ldots\ldots & d_2^{(p)} \\
 & & \vdots & & & \\
d_j^{(1)} & d_j^{(2)} & \ldots & d_j^{(k)} & \ldots & d_j^{(p)} \\
d_n^{(1)} & d_n^{(2)} & .\ \ . & d_n^{(k)} & .\ . & d_n^{(p)}
\end{array}$$

ต่อไปคำนวณสิ่งต่อไปนี้

$$\bar{d}_k = \sum_{j=1}^{n} d_j^{(k)} / n, k = 1, \ldots, p$$

$$SS_k = \sum_{j=1}^{n} (d_j^{(k)})^2 - (\sum_{j=1}^{n} d_j^{(k)})^2 / n, k = 1, \ldots, p$$

$$SP_{km} = \sum_{j=1}^{n} d_j^{(k)} d_j^{(m)} - (\sum_{j=1}^{n} d_j^{(k)}) (\sum_{j=1}^{n} d_j^{(m)}) / n, k \neq m = 1, \ldots, p$$

$$s_{kk} = SS_k/(n-1), k = 1, \ldots, p$$

$$s_{km} = SP_{km} / (n-1), k \neq m = 1, \ldots, p$$

ดังนั้น $D^2 = \bar{\mathbf{d}}' S^{-1} \bar{\mathbf{d}}$

$$= \left[\bar{d}_1 \, \bar{d}_2 \ldots \bar{d}_p \right] \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdot & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdot\cdot & s_{2p} \\ \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdot\cdot & s_{pp} \end{vmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \\ \bar{d}_p \end{bmatrix}$$

และ $T_c^2 = n D^2 \sim T^2_{(p,n-1)}$

2.11 ตัวอย่างการทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ เมื่อข้อมูลมีการจับคู่

ตัวอย่าง 2.4* จากการให้นักศึกษาฟังเทปบทความหนึ่งแล้วหลังจากนั้นให้เวลา 10 นาที เพื่อเขียนบทความแบบ informal ที่ตนจำได้ แล้วต่อไปให้เวลานักศึกษาอีก 25 นาทีเพื่อเขียนบทความนั้นแบบ formal ซึ่งในการเขียนจะต้องคำนึงถึงตรรกะของการเขียน ความชัดเจนของนิพจน์ โครงสร้างและไวยากรณ์ที่ดี

ตารางที่ 2.6 แสดงผลของนักศึกษา 15 คน สำหรับจำนวนคำและจำนวนคำกริยา สำหรับ informal และ formal essays เราสนใจจะทดสอบดูว่ามีความแตกต่างระหว่างจำนวนคำและจำนวนกริยาที่ใช้ในบทความ 2 ชนิดหรือไม่ นั่นคือเราจะทดสอบ $H_o : \underline{\delta} = \mathbf{0}$

ตารางที่ 2.6
แสดงจำนวนคำและจำนวนคำกริยาที่ใช้

	Informal		Formal		Words	Verbs
	$y_1^{(1)}$ Words	$y_1^{(2)}$ Verbs	$y_2^{(1)}$ Words	$y_2^{(2)}$ Verbs	$d^1 = y_1^{(1)} - y_2^{(1)}$	$d^2 = y_1^{(2)} - y_2^{(2)}$
1	148	20	137	15	+11	+5
2	159	24	164	25	- 5	-1
3	144	19	224	27	-80	-8
4	103	18	208	33	-105	-15
5	121	17	178	24	-57	-7
6	89	11	128	20	-39	-9
7	119	17	154	18	-35	-1
8	123	13	158	16	-35	-3
9	76	16	102	21	-26	-5
10	217	29	214	25	+ 3	+4
11	148	22	209	24	-61	-2
12	151	21	151	16	0	+5
13	83	7	123	13	-40	-6
14	135	20	161	22	-26	-2
15	178	15	175	23	+ 3	-8
				Total	-492	-53

คำนวณสิ่งต่อไปนี้

$\bar{d}_1 = -492/15 = -32.80$

$\bar{d}_2 = -53/15 = -3.53$

$SS_1 = 31482 - 16137.60 = 15,344.40$

SS, = 629 - 187.27 = 441.73

$SP_{12} = 3697 - 1738.40 = 1958.60$

$s_{11} = 15344.40/14 = 1096.03$

$s_{22} = 441.73/14 = 31.55$

$s_{12} = 1958.60/14 = 139.90$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1096.03 & 139.90 \\ 139.90 & 31.55 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.00210225 & -0.00932186 \\ -0.00932186 & 0.07303100 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $D^2 = \begin{bmatrix} -32.8 & -3.53 \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} -32.8 \\ -3.53 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -0.03604763 & 0.04795758 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -32.8 \\ -3.53 \end{bmatrix}$

$= 1.0131$

และ $T_c^2 = nD^2 = 15\,(1.0131) = 15.1965$

จากตาราง $T^2_{(2,\ 14),\ .05} = 8.197$ ดังนั้นเราปฏิเสธ Ho : $\underline{\delta} = \underline{O}$ เราสรุปได้ว่ามีความแตกต่างกันระหว่าง informal และ formal essays โดยที่การวัดตัวใดตัวหนึ่งอาจต่างกันหรืออาจต่างกันที่การวัดทั้ง 2 ชนิด เพื่อที่จะหาว่าการวัดตัวใดที่ต่างกัน ซึ่งทำให้เราปฏิเสธสมมติฐาน เราต้องทำการหา simultaneous C.I.'s โดยการใช้วิธีที่กล่าวแล้วในหัวข้อ 1.10

ตัวอย่างที่ 2.5

ตารางที่ 2.7

ความลึกของรอยสึกกร่อนที่ลึกที่สุด (maximum pit) และจำนวนรอยสึกกร่อน (pits) ของท่อไอเสียอาบน้ำยา (Coated Pipes)

	Coating 1		Coating 2		Depth	Number
	$y_1^{(1)}$	$y_1^{(2)}$	$y_2^{(1)}$	$y_2^{(2)}$		
Location	Depth	Number	Depth	Number	$d_1^1 = (y_1^{(1)} - y_2^{(1)})$	$d_2^2 = (y_1^{(2)} - y_2^{(2)})$
1	73	31	51	35	22	-4
2	43	19	41	14	2	5
3	47	22	43	19	4	3
4	53	26	41	29	12	-3
5	58	36	47	34	11	2
6	47	30	32	26	15	4
7	52	29	24	19	28	10
8	38	36	43	37	-5	-1
9	61	34	53	24	8	10
10	56	33	52	27	4	6
11	56	19	57	14	-1	5
12	34	19	44	19	-10	0
13	55	26	57	30	-2	-4
14	65	15	40	7	25	8
15	75	18	68	13	7	5
					120	46

ท่อไอเสียชนิดเดียวกัน 30 อัน ถูกเคลือบด้วยน้ำยาหนึ่งใน 2 ชนิด เอาท่อ 2 ท่อที่เคลือบด้วยน้ำยาแต่ละชนิดนั้นฝังในดินชนิดเดียวกันที่ความลึก และลักษณะการวางที่เหมือนกัน

และฝังทิ้งไว้เป็นระยะเวลานานเท่ากัน ในที่ 15 ที่ต่าง ๆ กัน หลังจากเวลาที่กำหนดให้ได้ขุดเอาท่อไอเสียเหล่านั้นมาดูการสึกกร่อน วัดความลึก (หน่วยเป็น $\frac{1}{1000}$ นิ้ว) ของรอยสึกกร่อนที่ลึกที่สุด ($y^{(1)}$) และจำนวนรอยสึกกร่อน ($y^{(2)}$) ของท่อไอเสียแต่ละคู่

คำนวณค่าต่อไปนี้

$\bar{d}_1$ = 120/15 = 8.0

$\bar{d}_2$ = 46/15 = 3.07

SS, = 2662 - 960.00 = 1702.00

SS_2 = 446 - 141.07 = 304.93

SP_{12} = 607 368.00 = 239.00

s_{11} = 1702.00/14 = 121.57

s_{22} = 304.93/14 = 21.78

s_{12} = 239.00/14 = 17.07

เราหา

$$S = \begin{bmatrix} 121.57 & 17.07 \\ 17.07 & 21.78 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.009243 & -0.007244 \\ 0.007244 & 0.051591 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น,

$$D^2 = \begin{bmatrix} 8.00 & 3.07 \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} 8.00 \\ 3.07 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.051705 & 0.100432 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.00 \\ 3.07 \end{bmatrix}$$

= 0.721966

และ T_c^2 = (15) (0.721966) = 10.829

เปรียบเทียบ T_c^2 กับ $T^2_{(2,\ 14),\ .05}$ = 8.197 เราปฏิเสธ Ho : $\underline{\delta} = \underline{O}$ สรุปว่าวิธีการเคลือบที่ต่างกันมีผลต่อการสึกกร่อนต่างกัน นั่นคือค่าเฉลี่ยตัวใดตัวหนึ่งหรือทั้ง 2 ตัว (ของความลึกของรอยสึกกร่อนที่ลึกที่สุด และจำนวนรอยสึกกร่อน) แตกต่างกันระหว่างการเคลือบทั้ง 2 ชนิด

2.12 **ทดสอบ** Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ **เมื่อ** $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$

ค่าสังเกต n_1 ค่าได้จากการสุ่มตัวอย่างขนาด n_1 จาก multivariate normal population ที่มี mean $\underline{\mu}_1$ และ variance covariance matrix Σ_1 และ

ค่าสังเกต n_2 ค่าได้จากการสุ่มตัวอย่างขนาด n_2 จาก multivariate normal population ที่มี mean $\underline{\mu}_2$ และ Σ_2

ในการทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ ถ้า $\Sigma_1 = \Sigma_2$ นั้นเราจะใช้วิธีการในหัวข้อ 2.3 คือใช้ตัวสถิติทดสอบ T^2 ซึ่งมี df = $n_1 + n_2 - 2$ อย่างไรก็ดีถ้า $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ เราจะพบปัญหาที่ต่างออกไป นั่นคือพบปัญหาที่เรียกว่า ปัญหา Behrens - Fisher

ตัวอย่างที่ 2.6*เมื่อ $n_1 = n_2$ เราอาจลองทดสอบสมมติฐาน Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ โดยใช้วิธีการทดสอบกับข้อมูลแบบ paired observations ซึ่งคือวิธีการที่อธิบายไว้ในหัวข้อ 2.10 โดยจะได้ใช้ข้อมูลจากตารางที่ 2.8 เพื่อแสดงวิธีการนี้

ตารางที่ 2.8

ตารางแสดง Yield point และ Tensile strength ของเหล็กกล้า ที่ผลิตภายใต้สถานการณ์ที่ต่างกัน 2 สถานการณ์

	สถานการณ์ที่ 1		สถานการณ์ที่ 2	
Number	$y_1^{(1)}$ Yield point	$y_1^{(2)}$ Ultimate Strength	$y_2^{(1)}$ Yield Point	$y_2^{(2)}$ Ultimate Strength
1	55	91	30	84
2	49	95	37	106
3	48	81	34	90
4	53	83	34	93
5	44	76	27	76
6	57	108	57	77
7	50	89	54	75
8	59	97	57	74
9	52	88	64	82
10	50	92	56	72
Total	517	900	450	829

ก่อนอื่นเราจะทดสอบ $H_o : \Sigma_1 = \Sigma_2$ ตามวิธีการในหัวข้อ 2.8 ก่อน จากข้อมูลในตารางที่ 2.8 เราคำนวณ

$$S_1 = \begin{bmatrix} 20.0111 & 29.5556 \\ 29.5556 & 81.5556 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 189.5556 & -72.4444 \\ -72.4444 & 114.5444 \end{bmatrix}, \quad n_1 = 10, \; n_2 = 10$$

และ $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 104.7833 & -21.4444 \\ -21.4444 & 98.05000 \end{bmatrix}$

$|\mathbf{S}| = 9814.1403$, $|\mathbf{S}_1| = 758.4838$, $|\mathbf{S}_2| = 16464.3414$

$$
\begin{aligned}
M &= 18 \log (9814.1403) - 9 \log (758.4838) - 9 \log (16464.3414) \\
&= 18 (3.99186) - 9 (2.87995) - 9 (4.21654) \\
&= 7.98507
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m &= 1 - \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right]\left[(8 + 6 - 1) / 18\right] \\
&= 0.8796
\end{aligned}
$$

ดังนั้นค่าของตัวสถิติทดสอบคือ $\chi_c^2 = 2.3026\ mM$

$$
\begin{aligned}
&= 2.3026\ (0.8796)\ (7.98507) \\
&= 16.1727
\end{aligned}
$$

จุดวิกฤติคือ $\chi^2_{3,.01} = 11.345$ $\because \chi_c^2 > 11.345$ เราปฏิเสธ Ho : $\Sigma_1 = \Sigma_2$ สรุปได้ว่า variance - covariance matrices ทั้ง 2 ไม่เท่ากัน

ขั้นต่อไปลองใช้วิธีการในหัวข้อ 2.10 สำหรับปัญหานี้ นั่นคือ**วิธีของ** paired observations

ค่าของ $d_j^{(k)} = y_{1j}^{(k)} - y_{2j}^{(k)}$, k = 1, 2 ; j = 1, ... , 10 แสดงในตารางที่ 2.9

ตารางที่ 2.9

แสดงว่า $d_j^{(1)}$ และ $d_j^{(k)}$ สำหรับข้อมูลในตารางที่ 2.8

Number	$d_j^{(1)}$	$d_j^{(2)}$
1	25	7
2	12	−11
3	14	−9
4	19	−10
5	17	0
6	0	31
7	−4	14
8	2	23
9	−12	6
10	−6	20
Total	67	71
Mean	6.7	7.1

คำนวณค่าต่าง ๆ จากข้อมูลในตารางที่ 2.9

$$S = \begin{bmatrix} 151.79 & -105.63 \\ -105.63 & 218.77 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.009922 & 0.004791 \\ 0.004791 & 0.006884 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T^2_c &= nD^2 \\ &= 10 \begin{bmatrix} 6.7 & 7.1 \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} 6.7 \\ 7.1 \end{bmatrix} \\ &= 10 \begin{bmatrix} 0.100494 & 0.080976 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.7 \\ 7.1 \end{bmatrix} \\ &= 12.482 \end{aligned}$$

ค่าจากตารางคือ $T^2_{(2,\,9),\ .05} = 10.033$ ดังนั้นเราปฏิเสธ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ เพราะ $T^2_c > 10.033$

ถ้าเราทดสอบสมมติฐานนี้ด้วยวิธีในหัวข้อ 2.3 [ซึ่งต้องใช้เมื่อ $\Sigma_1 = \Sigma_2$ และเราได้พิสูจน์แล้วว่าไม่จริงสำหรับข้อมูลในตัวอย่างนี้] เราสรุปผลว่ายอมรับ Ho แทนที่จะปฏิเสธ Ho **โปรดสังเกตว่า** df สำหรับ T^2 คือ 2 (n - 1) เมื่อ $\Sigma_1 = \Sigma_2$ แต่เมื่อ$\Sigma_1 \neq \Sigma_2$นั้น df = n - 1 และข้อมูลเป็นแบบ paired ด้วย ดังนั้น df = n - 1 ได้ถูกละทิ้งไปจากวิธีการทดสอบในกรณีที่ variance - covariance matrices 2 matrices ไม่เท่ากัน

ถ้าทั้ง $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ และ $n_1 \neq n_2$ แล้วเราไม่สามารถใช้วิธีการวิเคราะห์แบบจับคู่เพื่อทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ เราจะต้องใช้วิธีการที่จะอธิบายต่อไปนี้

ทั้งนี้ $\boxed{n_1 < n_2}$

เราเริ่มคำนวณ

$$x_j^{(k)} = y_{1j}^{(k)} - \sqrt{n_1 / n_2}\, y_{2j}^{(k)} + \sqrt{\frac{1}{n_1 n_2}} \sum_{h=1}^{n_1} y_{2h}^{(k)} - \frac{1}{n_2} \sum_{h=1}^{n_2} y_{2h}^{(k)}$$

เมื่อ $k = 1, \ldots, p$ และ

$j = 1, \ldots, n_1$

จากนั้นเราคำนวณ

$$\bar{x}_k = \sum_{j=1}^{n_1} x_j^{(k)} / n_1 \quad , k = 1, \ldots, p$$

$$SS_k = \sum_{j=1}^{n_1} (x_j^{(k)})^2 - (\sum_{j=1}^{n_1} x_j^{(k)})^2 / n_1 \quad , k = 1, \ldots, p$$

$$SP_{km} = \sum_{j=1}^{n_1} x_j^{(k)} x_j^{(m)} - (\sum_{j=1}^{n_1} x_j^{(k)})(\sum_{j=1}^{n_1} x_j^{(m)}) / n_1 \quad , k \neq m = 1, \ldots, p$$

$$s_{kk} = SS_k / (n_1 - 1) \quad , k = 1, \ldots, p$$

$s_{km} = SP_{km}/(n_1 - 1)$, $k \neq m = 1,\ldots, p$

ดังนั้น **S** คือ
$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ & & \vdots & \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{vmatrix}$$

ตัวสถิติสำหรับทดสอบ $H_o : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ คือ

$$T_c^2 = n_1 \left[\bar{x}_1 \; \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_p \right] S^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

จากคำจำกัดความเราจะเห็นว่า

$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} x_j = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$ ซึ่งเหมาะสมที่ใช้ในการประมาณ $\underline{\mu}_1 - \underline{\mu}_2$

ตัวอย่างที่ 2.7 ใช้ข้อมูลจาก**ตารางที่ 2.8 บางส่วน**ดังแสดงในตารางที่ 2.10, $n_1 = 6$, $n_2 = 10$

ตารางที่ 2.10

Yield Point And Tensile Strength of Steel

สถานการณ์ที่ 1		**สถานการณ์ที่ 2**	
$y_1^{(1)}$ = **Ultimate strength**	$y_1^{(2)}$ = **Yield Point**	$y_2^{(1)}$ = **Ultimate Strength**	$y_2^{(2)}$ = **Yield Point**
91	55	84	30
95	49	106	37
81	48	90	34
83	53	93	34
76	44	76	27
108	57	77	57
Total 534	306	526	219
		15	54
		74	57
		82	64
		72	56
	Total	829	450

คำนวณหาค่าของสมาชิกของ $\underline{x}_j$ (ค่าทั้งหมดแสดงในตารางที่ 2.11) เช่น

$$x_1^{(1)} = 91 - \sqrt{\frac{6}{10}}\,(84) + \frac{1}{\sqrt{6\,(10)}}\,(526) - \frac{1}{10}\,(829) = 10.9402,$$ เป็นต้น

ตารางที่ 2.11

ค่าของ $x_j^{(1)}$ และ $x_j^{(2)}$ ซึ่งคำนวณจากข้อมูลในตารางที่ 2.10

Number	$x_j^{(1)}$	$x_j^{(2)}$
1	10.9402	15.0349
2	-2.1010	3.6127
3	-3.7074	4.9365
4	-4.0312	9.9365
5	2.1370	6.3587
6	33.3624	-3.8793
Mean	$\bar{x}_1$ = 6.1000	$\bar{x}_2$ = 6.0000

เราจะเห็นว่า $\bar{x}_1 = \bar{y}_1^{(1)} - \bar{y}_2^{(1)}$

$\bar{x}_2 = \bar{y}_1^{(2)} - \bar{y}_2^{(2)}$

ดังนั้นคำนวณ

$$\bar{y}_1^{(1)} = 534/6 = 89.0$$

$$\bar{y}_2^{(1)} = 829/10 = 82.9$$

$$\bar{y}_1^{(2)} = 306/6 = 51.0$$

$$\bar{y}_2^{(2)} = 450/10 = 45.0$$

ดังนั้นหลังจากคำนวณ s_{11}, s_{22} และ s_{12} แล้วเราจะได้

$$S = \begin{bmatrix} 209.69081360 & -47.37945701 \\ -47.37945701 & 40.33698360 \end{bmatrix}$$

และ $$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.00649185 & 0.00762526' \\ 0.00762526 & 0.03374771 \end{bmatrix}$$

$$T_c^2 = n_1 \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$= 6 \begin{bmatrix} 6.1 & 6.0 \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} 6.1 \\ 6.0 \end{bmatrix}$$

$$= (6) \begin{bmatrix} 0.08535185 & 0.24900035 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.1 \\ 6.0 \end{bmatrix} = 12.0879$$

เพราะว่า $T_c^2 < T^2_{(2, 15), .05} = 17.361$ เราไม่ปฏิเสธ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ และสรุปว่าสถานการณ์ของการผลิตที่เราศึกษาผลอยู่ ไม่มีผลต่อ tensile strength ของเหล็ก ผลสรุปดังกล่าวนี้ได้จากการใช้ข้อมูลเพียงบางส่วนในตารางที่ 2.8 เท่านั้น

2.13 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงวิธีการทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ สำหรับข้อมูลที่ไม่จับคู่ (independent กัน) เมื่อ $\Sigma_1 = \Sigma_2$ และ $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ ซึ่งใช้กับการทดลองแบบ CRD นอกจากนั้นยังทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ เมื่อข้อมูลเป็นแบบจับคู่ (dependent กัน) คือการทดสอบแบบ RCB เมื่อมีวิธีการอยู่ 2 วิธีการ

ถ้าเราปฏิเสธ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ เราหา Simultaneous C.I.'s เพื่อใช้ในการสืบหาต่อไปว่าสิ่งใดที่ทำให้เราปฏิเสธสมมติฐาน

นอกจากนั้นยังทำการทดสอบการเท่ากันของ variance - covariance matrices 2 matrices ได้ให้แนวความคิดเรื่อง linear discriminant function และได้แสดงวิธีการใช้ linear discriminant function เพื่อจำแนกวัตถุออกเป็น 2 กลุ่มอีกด้วย

แบบฝึกหัดที่ 2

2.1 ข้อมูลต่อไปนี้ได้มาจากนักเรียน 2 กลุ่มซึ่งฟังเรื่องจากเทป แล้วเขียนบทความแบบ informal กลุ่ม A ประกอบด้วยนักเรียนซึ่งสอบวิชาความถนัดในภาคคำศัพท์ได้เกิน 650 คะแนน และกลุ่ม B นั้นได้คะแนนดังกล่าวต่ำกว่า 450 คะแนน จำนวนคำ (words) ที่ใช้ ($y^{(1)}$) และจำนวนคำกริยา (verbs) ที่ใช้ ($y^{(2)}$) 1) ทดสอบ $H_o : \underline{\Sigma}_1 = \underline{\Sigma}_2$ ที่ $\alpha = .05$

2) ทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$ ที่ $\alpha = .05$

3) จงหา 95% Simultaneous confidence intervals ของ $\mu_1^{(1)} - \mu_2^{(1)}$ และของ $\mu_1^{(2)} - \mu_2^{(2)}$

กลุ่ม A		กลุ่ม B	
$y_1^{(1)}$ Words	$y_1^{(2)}$ Verbs	$y_2^{(1)}$ Words	$y_2^{(2)}$ Verbs
106	12	88	13
159	24	117	15
131	21	133	19
181	27	86	12
125	14	159	28
143	20	195	28
165	28	183	24
139	25	123	16
194	25	175	25
153	22	129	16
149	22	181	27
132	20	111	12
140	17	168	29
		117	13
		113	19

2.2 ในการศึกษาถึง metabolism of cholesterol และ beta lipoproteins ได้ให้ไขมัน 2 ชนิดแก่ลิง 10 ตัว แต่จะให้ในช่วงเวลาที่ต่างกัน ไขมัน 2 ชนิดคือไขมันจากฝ้าย และไขมันจากข้าวโพด Serum cholesterol ($y^{(1)}$) และ lipoproteins ($y^{(2)}$) ที่วัดได้แสดงในตารางต่อไปนี้

ทดสอบ Ho : $\underline{\delta} = \underline{O}$ ที่ $\alpha = 0.01$

ลิงตัวที่	ไขมันจากฝ้าย		ไขมันจากข้าวโพด	
	$y_1^{(1)}$	$y_1^{(2)}$	$y_2^{(1)}$	$y_2^{(2)}$
1	335	60	198	5
2	528	650	300	55
3	520	370	219	1 7 9
4	569	140	298	20
5	409	62	438	81
6	720	784	643	490
1	556	319	472	200
8	644	100	364	30
9	728	680	500	379
10	627	190	474	390

2.3 สุ่มตัวอย่างจากนักศึกษาปีที่ 1 ข้อมูลต่าง ๆ ได้จากนักศึกษาที่เข้าคณะรัฐศาสตร์และอักษรศาสตร์

Means

	n	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(4)}$	$y^{(5)}$
คณะรัฐศาสตร์ (PS)	24	IS.64	552.88	635.12	532.29	613.46
คณะอักษรศาสตร์ (LA)	40	20.92	533.40	554.42	535.27	533.95

และ

$$S_{PS} = \begin{bmatrix} 204.39 & -468.01 & -81.18 & -729.71 & -22.39 \\ -468.01 & 6999.16 & 2756.62 & 616.12 & 2995.45 \\ -81.18 & 2756.62 & 3430.46 & 2534.57 & 2255.24 \\ -129.71 & 616.12 & 2534.51 & 9833.52 & 3162.08 \\ -22.39 & 2995.45 & 2255.24 & 3162.08 & 3883.48 \end{bmatrix}$$

$$S_{LA} = \begin{bmatrix} 209.00 & -47.97 & -167.88 & -159.84 & -188.10 \\ -41.91 & 6334.40 & 3810.98 & 4294.83 & 3114.67 \\ 167.88 & 3810.98 & 5019.27 & 3792.32 & 2998.38 \\ -159.84 & 4294.83 & 3192.32 & 5602.32 & 2166.40 \\ 188.10 & 3174.67 & 2998.38 & 2166.40 & 4490.10 \end{bmatrix}$$

โดยที่ $y^{(1)}$ ลำดับที่ที่สอบได้ในชั้น ม.6

$y^{(2)}$ คะแนนความถนัด ภาคคำศัพท์

$y^{(3)}$ คะแนนความถนัด ภาคคณิตศาสตร์

$y^{(4)}$ คะแนนภาษาอังกฤษ

$y^{(5)}$ คะแนนคณิตศาสตร์

1) ทดสอบ Ho : $\Sigma_{PS} = \Sigma_{LA}$ ที่ $\alpha = .05$

2) ทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_{PS} = \underline{\mu}_{LA}$ ที่ $\alpha = .05$

3) จงหา joint confidence intervals

2.4 ชายสูงอายุ 17 คน เป็นพวก asymtotic diseased และชายสูงอายุอีก 26 คนเป็นพวกปกติ ได้ตรวจเลือดเพื่อวัด

$y^{(1)}$ = hemoglobin concentration

$y^{(2)}$ = O_2 concentration

$y^{(3)}$ = CO_2 concentration

จากข้อมูลในตารางข้างล่าง จงหา linear discriminant function แล้วตัดสินใจว่า linear discriminant function นี้จะใช้ในการจำแนกได้หรือไม่

Asymtotic Diseased			Normal		
$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$
13.33	18.14	45.49	16.04	19.92	48.40
13.49	17.78	47.11	13.78	17.38	47.91
13.98	18.19	51.71	13.49	16.78	49.64
14.56	19.10	46.72	15.09	18.93	47.52
13.37	17.74	49.28	13.28	16.76	50.13
14.25	18.64	53.91	14.56	18.65	49.22
15.71	19.91	47.13	14.35	18.56	44.87
13.12	16.59	51.80	14.68	19.10	45.32
13.57	17.87	49.79	14.27	18.17	51.79
15.71	20.75	44.59	14.68	17.94	50.11
13.12	17.10	50.88	13.12	17.36	53.08
15.30	18.90	48.31	14.27	18.66	45.38
14.89	18.64	46.44	13.98	18.64	46.33
14.15	18.05	49.97	13.20	17.28	50.03
13.98	18.22	50.06	12.46	16.35	52.20
15.63	20.76	41.29	14.39	18.67	48.91
13.86	17.08	50.24	11.94	15.85	52.58
			14.35	17.53	50.99
			14.07	17.93	51.78
			13.28	17.36	51.10
			14.27	18.21	50.21
			13.98	18.23	48.88
			16.04	20.70	45.38
			14.68	18.63	48.26
			11.34	15.12	53.26
			13.49	17.72	49.43