บทที่ 3

การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการจำแนกทางเดียว

(Analysis of Variance for One - Way Classification)

หน้า

บทที่ 3
การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการจำแนกทางเดียว
(Analysis of Variance for One - way Classifications)

3.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบ Completely Randomized Design (CRD) ในการวิเคราะห์เชิงพหุ นั่นคือการทดสอบการเท่ากันของ mean vectors ทั้งหมด t vectors จาก t multivariate populations หรือทดสอบ

$$Ho : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \ldots = \underline{\mu}_t$$

วิธีการทดสอบ 2 วิธีที่จะกล่าวถึงคือ

1) Likelihood Ratio Test ซึ่งใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$U = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}|}$$

และ 2) Union Intersection Test ซึ่งใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$\theta = \frac{ch_{max}(\mathbf{HE}^{-1})}{1 + ch_{max}(\mathbf{HE}^{-1})}$$

เนื่องจากลักษณะของทฤษฎีที่ยุ่งยากซับซ้อนของวิธีการทั้งสอง จึงทำให้เราไม่สามารถบอกได้ว่าวิธีการทดสอบใดดีกว่ากัน

นอกจากนั้นในบทนี้ยังกล่าวถึงวิธีต่าง ๆ ที่จะสร้าง simultaneous confidence intervals ของ linear contrast ของ vectors of treatment means เพื่อที่จะหาว่าตัวแปรใดที่ทำให้เราปฏิเสธ Ho ข้อสมมุติที่ใช้ในบทนี้คือ Ho : $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_t$ ซึ่งวิธีการทดสอบสมมติฐานนี้จะได้กล่าวในบทที่ 4 ตอนที่ 2

3.2 ทบทวนการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบ Completely Randomized Design (CRD) ในการวิเคราะห์ของตัวแปรเดียว

มีวิธีการ t วิธีการ ใช้วิธีการที่ i กับ n_i หน่วยทดลองแบบสุ่ม โครงสร้างข้อมูลคือข้อมูลในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.1
โครงสร้างของข้อมูลสำหรับการทดลองแบบ CRD

	G_1	G_2	$\ldots G_i$	G_t	
	y_{11}	y_{21}	y_{i1}	y_{t1}	
	y_{12}	y_{22}	y_{i2}	y_{t2}	
	y_{1n_1}	y_{2n_2}	y_{in_i}	y_{tn_t}	
Total	$y_{1.}$	$y_{2.}$	$\ldots\ y_{i.}\ \ldots$	$y_{t.}$	$y_{..}$
Mean	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_t$	

y_{ij} = ค่าสังเกตจากหน่วยทดลองที่ j ซึ่งได้รับวิธีการที่ i

$i = I,\ldots, t$ และ $j = I,\ldots, n_i$

$y_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$

$\bar{y}_i = y_{i.}/n_i$

$y_{..} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$

ต้องการทดสอบ Ho : $\mu_1 = \mu_2 = . = \mu_t$

ตารางที่ 3.2
ตาราง ANOVA สำหรับการทดสอบ $H_o : \mu_1 = \cdots = \mu_t$

S.V.	**df**	SS		MS = SS/df	fc
Treatments	$\nu_H = t - 1$	SSH	$= \frac{\Sigma y_{i.}^2}{n_i} - \frac{(y..)^2}{\Sigma n}$	MSH = s_H^2	s_H^2 / s_E^2
Error	$\nu_E = \Sigma_{i=1} (n_i \quad I$	SSE	= SST -- SSH	MSE = s_E^2	
Total	$\Sigma_{i=1} n - 1$	SST	$= \Sigma_i \Sigma_j y_{ij}^2 - \frac{(y..)^2}{\Sigma n_i}$		

จะปฏิเสธ H_o ถ้า $f_c > f_{(t-1, \sum_{i=1}^{t} (n_i - 1)), \alpha}$

หรือ $f_c > f\,(\nu_H, \nu_E), \alpha$

ตัวอย่างที่ 3.1* ข้อมูลในตารางต่อไปนี้ได้จากการทดลองเพื่อศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่าง metabolic activity ของกระต่ายกับภูมิต้านทานเชื้อวัณโรคจากคน กลุ่มทดลอง 4 กลุ่มคือ G1 - G4 ได้รับวิธีการดังนี้

G1 = ไม่ได้ฉีดวัคซีน (กลุ่มทดลอง)

G2 = ฉีดวัคซีนในขณะที่ metabolic depression

G3 = ฉีดวัคซีนในขณะที่ heightened metabolic activity

G4 = ฉีดวัคซีนในขณะที่ อาการปกติ

ค่าสังเกตในตารางที่ 3.3 คือจำนวน bacilli inhaled per tubercle formed

ตารางที่ 3.3

	G_1	G_2	G_3	G_4	
	24.0	7.4	16.4	25.1	
	13.3	13.2	24.0	5.9	
	12.2	8.5	53.0		
	14.0	10.1	32.7		
	22.2	9.3	42.8		
	16.1	8.5			
	27.9	4.3			
n_i	$n_1 = 7$	$n_2 = 7$	$n_3 = 5$	$n_4 = 2$	$\Sigma n_i = 21$
Total : $y_{i.}$	$y_{1.} = 129.7$	$y_{2.} = 61.3$	$_{3.} = 168.9$	$y_{4.} = 31.0$	$y_{..} = 390.9$
Mean : $\bar{y}_i$	18.53	8.76	33.78	15.50	

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 = 10482.59, \quad \text{C.F.} = \frac{(y_{..})^2}{\Sigma n_i} = \frac{(390.9)^2}{21} = 1216.3243$$

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{(y_{i.}^2)}{n_i} = \frac{(129.7)^2}{7} + \frac{(61.3)^2}{7} + \frac{(168.9)^2}{5} + \frac{(31.0)^2}{2} = 9125.9105$$

SSH = 9125.9105 - C.F. = 1849.5862

SST = 10482.59 - C.F. = 3152.2657

SSE = SST - SSH = 1302.6795

ตารางที่ 3.4

ANOVA

S.V.	df	SS	MS	fc
Treatments	3	SSH = 1849.5862	616.5287	8.05
Error	17	SSE = 1302.6795	76.6282	
Total	20	SST = 3152.2657		

$f_c = 8.05 > f_{(3,17),.05} = 5.185$ เราปฏิเสธ Ho : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

สรุปว่ามีความแตกต่างระหว่าง mean ของ 4 กลุ่ม

3.3 Multivariate Analysis of Variance Table (MANOVA Table)

สำหรับแต่ละหน่วยทดลองเราจะสังเกต p ลักษณะ (ค่า) (แทนที่จะสังเกตเพียง 1 ค่า) ไม่ว่าเราจะทำการทดสอบสมมติฐานด้วยวิธีการใดจาก 2 วิธีที่กล่าวในหัวข้อ 3.1 การคำนวณในเบื้องต้นจะเหมือนกัน คือตัวสถิติทดสอบทั้ง 2 ตัวเป็นฟังก์ชันของ sample matrices of SS และ SP สำหรับแต่ละที่มาของความแปรปรวน โครงสร้างของข้อมูลจะแสดงในตารางที่ 3.5

การวิเคราะห์ในขั้นตอนต่อไปจะใช้ข้อสมมุติว่า variance - covariance matrices ของทุกกลุ่มเท่ากันหมด และ observation vectors มีการกระจายแบบปกติ

ตารางที่ 3.5

โครงสร้างของข้อมูลสำหรับ multivariate observations ใน t กลุ่ม

	G_1	G_2 ...	G_t	
	$y_{11}^{(1)}\ \ y_{11}^{(2)}\cdots\ \ y_{11}^{(k)}\cdots\ \ y_{11}^{(p)}$	$Y_{21}^{(1)}\ \ y_{21}^{(2)}\cdots\ \ y_{21}^{(k)}\cdots\ \ y_{21}^{(p)}$	$y_{t1}^{(1)}\ \ y_{t1}^{(2)}\ \cdots\ y_{t1}^{(k)}\cdots\ \ y_{t1}^{(p)}$	
	$\vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots$	$\vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots$	$\vdots\ \ \vdots$	
	$y_{1j}^{(1)}\ \ y_{1j}^{(2)}\cdots\ \ y_{1j}^{(k)}\cdots\ \ y_{1j}^{(p)}$	$y_{2j}^{(1)}\ \ y_{2j}^{(2)}\cdots\ \ y_{2j}^{(k)}\cdots\ \ y_{2j}^{(p)}$	$y_{tj}^{(1)}\ \ y_{tj}^{(2)}\cdot\ \ y_{tj}^{(k)}\cdots\ \ y_{tj}^{(p)}$	
	$\vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots$	$\vdots\ \ \vdots$	$\vdots$	
	$y_{1n_1}^{(1)}\ \ y_{1n_1}^{(2)}\cdots\ \ y_{1n_1}^{(k)}\cdots\ \ y_{1n_1}^{(p)}$	$Y_{2n_2}^{(1)}\ \ y_{2n_2}^{(2)}\cdots\ \ y_{2n_2}^{(k)}\cdots\ \ y_{2n_2}^{(p)}$	$Y_{tn_t}^{(1)}\ \ y_{tn}^{(2)}\cdot\ \ y_{tn}^{(k)}\cdots\ \ y_{tn}^{(p)}$	
Total	$y_{1.}^{(1)}\ \ y_{1.}^{(2)}\cdots\ \ y_{1.}^{(k)}\cdots\ \ y_{1.}^{(p)}$	$y_{2}^{(1)}\ \ y_{2.}^{(2)}\cdots\ \ y_{2.}^{(k)}\cdots\ \ y_{2.}^{(p)}$	$y_{t.}^{(1)}\ \ y_{t.}^{(2)}\cdots\ \ y_{t.}^{(k)}\cdots\ \ y_{t.}^{(p)}$	$y_{..}^{(1)}\ \ y_{..}^{(2)}\ \cdots\ y_{..}^{(p)}$
Mean	$\bar{y}_1^{(1)}\ \ \bar{y}_1^{(2)}\cdots\ \ \bar{y}_1^{(k)}\cdots\ \ \bar{y}_1^{(p)}$	$y_2^{(1)}\ \ y_2^{(2)}\cdots\ \ y_2^{(k)}\cdots\ \ y_2^{(p)}$	$\bar{y}_t^{(1)}\ \ \bar{y}_t^{(2)}\cdots\ \ \bar{y}_t^{(k)}\cdots\ \ \bar{y}_t^{(p)}$	
n_i	n_1	n_2	n	$\sum_{i=1} n_i$

ตารางที่ 3.6

MANOVA สำหรับ One-way Classification

S.V.	df	SS and SP							
Treatments	t-1	H_{11}	H_{12}		H_{1p}		H_{22}	H_{2p}	H_{pp}
Error	$\sum_{i=1} (n_i-1)$	E_{11}	E_{12} .	. .	E_{1p}	E_{22}	.	. E_{2p} .	E_{pp}
Total	$\sum_{i=1} n_i-1$	T_{11}	T_{12}	T	T_{1p}	T_{22}	...	T_{2p}	T_{pp}

ที่มาของความแปรปรวน และ df ในตารางที่ 3.6 นั้น เหมือนกับในตารางที่ 3.2 แต่เนื่องจากเราสังเกตมากกว่า 1 ลักษณะจากหน่วยทดลองหนึ่ง ๆ ส่วนประกอบอื่น ๆ ของตารางจึงต่างออกไป ปริมาณที่สมนัยกับ Treatments, Error และ Total นั้นใช้แทนด้วย H, E และ T ตามลำดับ ทั้งนี้แต่ละตัวได้ถูกใส่ subscript ไว้ด้วย ค่าในแต่ละคอลัมน์คือ SS (sum of squares) ของแต่ละลักษณะจาก p ลักษณะ ส่วน SP (sum of products) นั้นเป็นของ 2 ลักษณะใด ๆ subscript จะเป็นตัวระบุว่าลักษณะใดที่ใช้ในการคำนวณปริมาณนั้น ๆ ปริมาณ H_{kk}, E_{kk} และ T_{kk} นั้นคือ SS ที่คำนวณตามสูตรของตารางที่ 3.2 สำหรับลักษณะที่ k นั่นเองโดยที่ $k = 1, 2, \ldots, p$

3.4 ตัวอย่างของ MANOVA

ตัวอย่างที่ 3.2" เราทำการวัด 2 ลักษณะ (ค่า) จากกระต่ายแต่ละตัว คือ

$y^{(1)}$ = number of bacilli inhaled per tubercle formed

$y^{(2)}$ = tubercle size (in mm.)

ข้อมูลทั้งหมดแสดงในตารางที่ 3.7

ตารางที่ 3.7

	G1		G2		G3		G4		Totals	
	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
	24.0	3.5	7.4	3.5	16.4	3.2	25.1	2.7		
	13.3	3.5	13.2	3.0	24.0	2.5	5.9	2.3		
	12.2	4.0	8.5	3.0	53.0	1.5				
	14.0	4.0	10.1	3.0	32.7	2.6				
	22.2	3.6	9.3	2.0	42.8	2.0				
	16.1	4.3	8.5	2.5						
	27.9	5.2	4.3	1.5						
Totals: $y_{i.}^{(k)}$	129.7	28.1	61.3	18.5	168.9	11.8	31.0	5.0	$y_{..}^{(1)}$ = 390.9	$y_{..}^{(2)}$ = 63.4
Mean : $\bar{y}_i^{(k)}$	18.5286	.0143	8.7571	2.6428	3.7800	2.3600	5.5000	2.5000	$\bar{y}^{(1)}$ = 18.6143	$\bar{y}^{(2)}$ = 3.0190
n_i	7		7		5		2		21	

ทำการคำนวณค่าต่าง ๆ สำหรับ $y^{(2)}$ ทำนองเดียวกับที่ทำกับ $y^{(1)}$ ในตัวอย่างที่ 3.1 ได้ผลดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.8

$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}^{(1)})^2 = 10482.59$	$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}^{(2)})^2 = 208.82$
$\sum_{i=1}^{4}\frac{(y_{i.}^{(1)})^2}{n_i}$ 9125.9105	$\sum_{i=1}^{4}\frac{(y_{i.}^{(2)})^2}{n_i} = 202.0422$
$C.F.^{(1)} = \frac{(y_{..}^{(1)})^2}{\Sigma n_i} = \frac{(390.9)^2}{21}$	$C.F.^{(2)} = \frac{(y_{..}^{(2)})^2}{\Sigma n_i} = \frac{(63.4)^2}{21}$
$= 1216.3243$	$= 191.4076$
$E_{11} = 10482.59 - 9125.9105$	$E_{22} = 208.82 - 202.0422$
$= 1302.6795$	$= 6.7778$
$H_{11} = 9125.9105 - C.F.^{(1)}$	$H_{22} = 202.0422$ $C.F.^{(2)}$
$= 1849.5862$	$= 10.6346$
$T_{11} = 10482.59 - C.F.^{(1)}$	$T_{22} = 208.82 - C.F.^{(2)}$
$= 3152.2657$	$= 17.4124$

ต่อไปทำการคำนวณค่าต่าง ๆ สำหรับ products ของ $y^{(1)}$ และ $y^{(2)}$ ดังนี้

$$C.F.^{(1)(2)} = y^{(1)}_{..} y^{(2)}_{..} / \sum_{i=1}^{4} n_{i} = (390.9)(63.4)/21 = 1180.1457$$

$$H_{12} = \sum_{i=1}^{4} y^{(1)}_{i.} y^{(2)}_{i.} / n_i - C.F.^{(1)(2)} = \frac{(129.7)(28.1)}{7} + \ldots + \frac{(31.0)(5.0)}{2} - C.F.^{(1)(2)}$$

$$= 1158.7647 - 1180.1457 = -21.3810$$

$$T_{12} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{n_i} y^{(1)}_{ij} y^{(2)}_{ij} - C.F.^{(1)(2)} = (24.0)(3.5) + (13.3)(3.5) + \ldots + (25.1)(2.7) + (5.9)(2.3) - C.F.^{(1)(2)}$$

$$= 1141.12 - 1180.1457 = -39.0257$$

$$E_{12} = T_{12} - H_{12} = -39.0257 - (-21.3810) = -17.6447$$

ตารางที่ 3.9

MANOVA

S.V.	df	$SSy^{(1)}$	$SPy^{(1)}y^{(2)}$	$SSy^{(2)}$
Treatments	3	H_{11} = 1849.5862	H_{12} = -21.3810	H_{22} = 10.6346
Error	17	E_{11} = 1302.6795	E_{12} = -17.6447	E_{22} = 6.7778
Total	20	T_{11} = 3152.2657	T_{12} = -39.0257	T_{22} = 17.4124

3.5 Likelihood Ratio Test และ U - Distribution

ในการทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \ldots = \underline{\mu}_t$

ตัวสถิติทดสอบคือ $U = \frac{|E|}{|H + E|}$ (Wilks' Lambda Statistic หรือ U statistic)

โดยที่เมตริกซ์ **H** และ **E** นั้นคือเมตริกซ์สำหรับ "hypothesis" และเมตริกซ์ สำหรับ "Error" ตามลำดับเราใช้วิธีการทดสอบนี้ได้เมื่อ $\nu_E \geq p$ เท่านั้น

จากตารางที่ 3.6 สมาชิกของ **H** และ **E** คือ

$$H = \begin{bmatrix} H_{11}\ H_{12} \cdots H_{1p} \\ H_{12}\ H_{22} \cdots H_{2p} \\ \vdots \\ H_{1p}\ H_{2p} \cdots H_{pp} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{E} = \begin{vmatrix} E_{11}\ E_{12} \cdots E_{1p} \\ E_{12}\ E_{22} \cdots E_{2p} \\ \vdots \\ E_{1p}\ E_{2p} \cdots E_{pp} \end{vmatrix}$$

เราจะ**ปฏิเสธ Ho เมื่อ U มีค่าน้อย** ซึ่งตรงกันข้ามกับในกรณีของการวิเคราะห์ของตัวแปรเดี่ยว ซึ่งจะ reject เมื่อ ratio ของ variances มีค่ามาก

$$\boxed{U \sim U_{(p,\ \nu_H,\ \nu_E)}}$$

$u_{(p, \nu_H, \nu_E), \alpha}$ **เป็นจุดวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญคือ** α **ซึ่งอ่านได้จากตาราง A2** ในตารางสถิติ สำหรับ α = .05 และ .01, p = 1(1)4, ν_H มีหลายค่าระหว่าง 1 - 120 และ ν_E มีค่าจาก 1 - 1000

ในกรณีที่ p และ ν_H ตกอยู่ภายนอกช่วงที่กำหนดให้ในตาราง A2 ในการทดสอบ เราอาจจะใช้ตาราง F ได้โดยแปลงรูปตัว U ดังแสดงในตารางที่ 3.10

ตารางที่ 3.10

Transformations of U to Provide Exact Upper Tail Tests Using F - dist^{n}'s

Parameters : p, ν_H	Statistic having F - dist"	**Degrees of Freedom of F**
ν_H = 1, any p	$\frac{1-U}{U} \cdot \frac{\nu_E + \nu_H - p}{p}$	p, ($\nu_E + \nu_H$ - p)
ν_H = 2, any p	$\frac{1-G}{\sqrt{U}} \cdot \frac{\nu_E + \nu_H - p - 1}{p}$	2p, 2($\nu_E + \nu_H$ - p 1)
p = 1, any ν_H	$\frac{1-U}{U} \cdot \frac{\nu_E}{\nu_H}$	ν_H, ν_E
p = 2, any ν_H	$\frac{1-\sqrt{U}}{\sqrt{U}} \cdot \frac{\nu_E - 1}{\nu_H}$	2ν_H, 2 (ν_E - 1)

สำหรับค่าของ p และ ν_H ที่นอกเหนือไปจากตารางที่ 3.10 นั้น สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่ และทดสอบที่ระดับนัยสำคัญ α เราจะปฏิบัติดังนี้

ให้ $m = \nu_E - (p - \nu_H + 1)/2$ แล้วจะปฏิเสธ Ho เมื่อ $-m\ln(u)$ มีค่ามากกว่า $\chi^2_{p\nu_H, \alpha}$ ทั้งนี้ค่าของ α นั้นถูกต้องเชื่อถือได้ถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง ถ้า $p^2 + \nu^2_H \leq \frac{m}{3}$

3.6 ตัวอย่างการใช้ตัวสถิติ U ในการทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \ldots = \underline{\mu}_t$

ก่อนที่จะทดสอบสมมติฐานโดยใช้ข้อมูลในตารางที่ 3.7 เราจะทดสอบสมมติฐานโดยใช้ตัวสถิติ U กับข้อมูลในตารางที่ 3.4 ซึ่งเราสามารถทำได้เพราะเมื่อ p=1 เราหาจุดวิกฤตได้ ความจริงก็คือเราสามารถทดสอบสมมติฐานใด ๆ ในกรณีของตัวแปรเดี่ยวโดยใช้ตัวสถิติทดสอบ U ได้แทนที่จะใช้ตัวสถิติทดสอบ F ในกรณีของตัวแปรเดี่ยวเรามีเลขจำนวนเทนเมตริกซ์ แต่วิธีการยังคงใช้ได้

ตัวอย่างที่ 3.3 จากตัวอย่างที่ 3.2

สำหรับ number of bacilli inhaled per tubercle formed = $y^{(1)}$

เราคำนวณ
$$u_c = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}|} = \frac{SSE}{SST} = \frac{1302.6795}{3152.2657} = 0.4132$$

จากตาราง $u_{(1,3,17),.01} = 0.522195$

เราปฏิเสธ Ho เพราะ $u_c < u_{(1,3,17),.01} = 0.522195$ ซึ่งถ้าเราใช้ตัวสถิติทดสอบ F เราก็ปฏิเสธ Ho เช่นกัน

จากตารางที่ 3.10 เมื่อ $\boxed{p = 1}$ U อาจถูกแปลงเป็น F โดยสูตร

$$\boxed{F_{\nu_H, \nu_E} = \frac{1 - U}{U} \cdot \frac{\nu_E}{\nu_H}} \qquad \ldots①$$

จากตัวอย่างข้างต้น $f_c = \frac{1 - 0.4132}{0.4132} \cdot \frac{17}{3}$

$= 8.05$ ซึ่งคือค่าของ f_c ที่เราคำนวณได้ในตัวอย่างที่ 3.1 นั่นเอง

ดังนั้นถ้าเราใช้จุดวิกฤตของ $dist^n$ U แทน U ในสูตร ① เราจะได้จุดวิกฤตของ F - $dist^n$ ด้วย

สำหรับข้อมูลจากตารางที่ 3.7 และค่าที่คำนวณได้จากตารางที่ 3.9 เราจะทดสอบ Ho $\mu_1 = \ldots \mu_4$ โดยใช้วิธี Likelihood ratio test

จากตารางที่ 3.9 เราหา

$$|\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1302.6795 & -17.6447 \\ -17.6447 & 6.7778 \end{vmatrix} = 8517.9657$$

$$|\mathbf{E} + \mathbf{H}| = \begin{vmatrix} 3152.2657 & -39.0257 \\ -39.0257 & 17.4124 \end{vmatrix} = 53365.5060$$

$$u_c = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}|} = \frac{8517.9657}{53365.5060} = 0.1596$$

ในที่นี้ $p = 2$, $\nu_H = 3$, และ $\nu_E = 17$ ดังนั้น $u_{(2,3,17),.01} = 0.370654$

∵ 0.15% < .370654 เราจึงปฏิเสธ Ho และสรุปว่า vectors of means สำหรับ 4 กลุ่มนี้ต่างกันอย่างน้อย 1 คู่

3.7 Union Intersection Test และ Heck Chart

ให้ $ch_{max}(HE^{-1})$ เป็น largest characteristic root ของเมตริกซ์ HE^{-1} ตัวสถิติทดสอบคือ

$$\boxed{\theta = \frac{ch_{max}(\mathbf{HE}^{-1})}{1 + ch_{max}(\mathbf{HE}^{-1})}}$$

H และ **E** คือ matrices สำหรับ "hypothesis" และ "Error" ที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.5 ตัวพารามิเตอร์สำหรับ distⁿ ของ θ คือ $\boxed{\text{s, m และ n}}$ โดยที่

$$s = \min(\nu_H, p)$$

$$m = \frac{|\nu_H - p| - 1}{2}$$

$$n = \frac{\nu_E - p - 1}{2}$$

เราเขียนว่า $\theta \sim \theta_{(s,m,n)}$ ในที่นี้ $\boxed{\nu_E > p}$

เราปฏิเสธ Ho ถ้า θ_c มากกว่าจุดวิกฤต (upper α - level) $\theta_{(s,\, m,\, n),\, \alpha}$

ค่าของ $\theta_{(s,\, m,\, n),\, \alpha}$ เราอ่านได้จาก Heck's charts ในตาราง A3

3.8 ตัวอย่างแสดงการทดสอบ Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \ldots = \underline{\mu}_t$ ด้วยวิธี Union Intersection Test

ตัวอย่างที่ 3.4*

จากตารางที่ 3.9

$$E = \begin{bmatrix} 1302.6795 & -17.6447 \\ -17.6447 & 6.77781 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000796 & 0.002071 \\ 0.002071 & 0.152933 \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } HE^{-1} = \begin{bmatrix} 1849.5862 & -21.3810 \\ -21.3810 & 10.6346 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000796 & 0.002071 \\ 0.002071 & 0.152933 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.427990 & 0.560633 \\ 0.005006 & 1.582101 \end{bmatrix}$$

ในการหา characterestic root ของ HE^{-1} เราเขียน

$$|HE^{-1} - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 1.427990 & 0.560633 \\ 0.005006 & 1.582101 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1.427990 - \lambda & 0.560633 \\ 0.005006 & 1.582101 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1.427990 - \lambda)(1.582101 - \lambda) - (0.005006)(0.560633)$$

$$= \lambda^2 - 3.010091\lambda + 2.256418$$

$\text{tr}(HE^{-1}) = 1.427990 + 1.582101 = 3.010091$

$|HE^{-1}| = 2.256418$

จากสมการ $\lambda^2 - 3.010091\lambda + 2.256418 = 0$

รากของสมการคือ $\dfrac{3.010091 \pm \sqrt{(3.010091)^2 - 4(1)(2.256418)}}{2}$

$$= 3.010091 \pm \frac{\sqrt{9.060648 - 9.025672}}{2}$$

$\therefore \lambda_1 = 1.598555$ และ $\lambda_2 = 1.411536$

check $\lambda_1 \lambda_2 = |HE^{-1}| = 2.256418$, $\lambda_1 + \lambda_2 = tr\ (HE^{-1}) = 3.010091$

ดังนั้น $\theta_c = \frac{1.598555}{1 + 1.598555}$

$= 0.6152$

และพารามิเตอร์ คือ $s = \min(\nu_H, p) = \min(3, 2) = 2$

$$m = \frac{|\nu_H - p| - 1}{2} = \frac{|3 - 2| - 1}{2} = 0$$

$$n = \frac{\nu_E - p - 1}{2} = \frac{17-2-1}{2} = 7$$

จาก chart ในตาราง A3 : $\theta_{(2, 0, 7), .01} = 0.58$

$\because \theta_c > 0.58$ ดังนั้นเราปฏิเสธ Ho ที่ $\alpha = .01$ ซึ่งจะเห็นว่าผลสรุปเป็นเช่นเดียวกับการใช้ likelihood ratio test

3.9 Linear Contrasts Among Vectors of Treatment Means

กำหนดให้ $\bar{y}_1', \bar{y}_2', \ldots, \bar{y}_t'$ แทน row vectors of sample means ของ t กลุ่ม

$y_{1.}', y_{2.}', \ldots, y_{t.}'$ แทน row vectors of treatment totals

ตัวอย่างเช่นสมาชิกตัวที่ k ของ $y_{1.}$ และ $\bar{y}_1$ คือ

$$y_{1.}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}^{(k)} \text{ และ } \bar{y}_1^{(k)} = \frac{y_{1.}^{(k)}}{n_1}, \quad k = 1, \ldots, p$$

ถ้า $c_1, \ldots, c_t$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ

สมมติฐาน $\boxed{Ho : c_1 \underline{\mu}_1 + c_2 \underline{\mu}_2 + \ldots + c_t \underline{\mu}_t = \underline{O}}$ คือรูปที่ขยายจากเรื่อง contrast ในกรณีของตัวแปรเดียวนั่นเอง

ในกรณีของตัวแปรเดี่ยว

สำหรับแต่ละ contrast หรือ comparison เราคำนวณค่า MS ซึ่งมี 1df และใช้เป็นตัวเศษของตัวสถิติ t^2 หรือตัวสถิติ F นั่นเอง ตัวส่วนคือ MSE ซึ่งมี ν_E df นอกจากนั้นถ้าใช้ orthogonal contrast SStr ซึ่งมี df = t – 1 สามารถแยกออกเป็น linear contrast (t – 1) ตัว ซึ่งแต่ละตัวมี 1df

ในกรณีของตัวแปรพหุ เราจะแยก SS และ SP เมตริกซ์ สำหรับ "treatments" ออกเป็นส่วนๆ และสามารถหา orthogonal contrast ได้ แต่ละ linear contrast อาจถูกทดสอบโดยใช้ตัวสถิติ U หรือโดยใช้ตัวสถิติ Hotelling's T^2

การคำนวณในขั้นต้น สำหรับแต่ละ contrast คือหา vector sum $\sum_{i=1}^{t} c_i y_{i.}'$ และค่าของ $\sum_{i=1}^{t} c_i^2 n_i$ เช่นเดียวกับในกรณีของตัวแปรเดี่ยว

ตัวอย่างที่ 3.5 จากข้อมูลในตารางที่ 3.7 (ตัวอย่างที่ 3.2)
เราจะเปรียบเทียบกลุ่มที่ 1 กับกลุ่มที่เหลืออยู่ใช้ H_1,
จะเปรียบเทียบกลุ่มที่ 4 กับกลุ่มที่ 2 และ 3 ใช้ H_2,
และจะเปรียบเทียบกลุ่มที่ 2 กับกลุ่มที่ 3 ใช้ H_3

ตารางที่ 3.11

Group totals, Sample sizes, และ Contrast Values สำหรับการทดสอบสมมติฐาน H_1, H_2 และ H_3

qunntity	Group			
	Cl	**G2**	G3	G4
Totals:				
$y_{i.}^{(1)}$	$y_{1.}^{(1)} = 129.7$	$y_{2.}^{(1)} = 61.3$	$y_{3.}^{(1)} = 168.9$	$y_{4.}^{(1)} = 31.0$
$y_{i.}^{(2)}$	$y_{1.}^{(2)} = 28.1$	$y_{2.}^{(2)} = 18.5$	$y_{3}^{(2)} = 11.8$	$y_{4.}^{(2)} = 5.0$
n_i	$n_1 = 7$	$n_2 = 7$	$n_3 = 5$	$n_4 = 2$
contrast values				
H_1	$c_{11} = +2$	$c_{12} = -1$	$c_{13} = -1$	$c_{14} = -1$
H_2	$c_{21} = 0$	$c_{22} = -1$	$c_{23} = -1$	$c_{24} = 6$
H_3	$c_{31} = 0$	$c_{32} = 5$	$c_{33} = -7$	$c_{34} = 0$

ทั้ง 3 contrasts เป็น orthogonal contrasts ดังที่ทำการตรวจสอบดังนี้

$(H_1 : H_3)\ c_{11}c_{31}n_1 + c_{12}c_{32}n_2 + c_{13}c_{33}n_3 + c_{14}c_{34}n_4 = 0 + (-35) + 35 + 0 = 0$

$(H_1 : H_2)\ c_{11}c_{21}n_1 + c_{12}c_{22}n_2 + c_{13}c_{23}n_3 + c_{14}c_{24}n_4 = 0 + 7 + 5 - 12 = 0$

$(H_2 : H_3)\ c_{21}c_{31}n_1 + c_{22}c_{32}n_2 + c_{23}c_{23}n_3 + c_{24}c_{34}n_4 = 0 + (-35) + 35 + 0 = 0$

หมายเหตุ subscript ตัวที่ 2 ของ c_{ij} คือ j ใช้ในส่วนนี้เท่านั้น เพื่อแสดงการตรวจสอบ orthogonal

จากตารางที่ 3.11 เราคำนวณ $\sum_{i=1}^{4} c_i y_{i.}'$ และ $\sum_{i=1}^{4} n_i c_i^2$ สำหรับแต่ละสมมติฐานได้ดังนี้

$H_1 :\quad [\,-1.8 \quad 20.9\,] \qquad \sum_{i=1}^{4} n_i c_i^2 = 42$

$H_2 :\quad [\,-44.2 \quad -0.3\,] \qquad \sum_{i=1}^{4} n_i c_i^2 = 84$

$H_3 :\quad [\,-875.8 \quad 9.9\,] \qquad \sum_{i=1}^{4} n_i c_i^2 = 420$

จากค่าข้างต้นเราสามารถสร้าง SS และ SP เมตริกซ์ สำหรับแต่ละสมมติฐาน (คือ $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ และ $\mathbf{H_3}$) ได้

เมตริกซ์ดังกล่าวอยู่ในรูป $(\sum_{i=1}^{4} n_i c_i^2)^{-1} \ (\sum_{i=1}^{4} c_i \mathbf{y}_i)\ (\sum_{i=1}^{4} c_i \mathbf{y}_i)'$

สมาชิกของเมตริกซ์เหล่านี้แสดงไว้ในตารางที่ 3.12 ตารางที่ 3.12 นั่นคือส่วนขยายของตารางที่ 3.9 ซึ่งได้เพิ่มที่มาของความแปรปรวนเนื่องจาก linear contrast ทั้ง 3 ไว้ด้วย

ตัวอย่างการหาค่าในตารางที่ 3.12

สำหรับ $H, : H, = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} -1.8 \\ 20.9 \end{bmatrix}[-1.8 \quad 20.91 = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} (-1.8)^2 & (-1.8)(20.9) \\ (-1.8)(20.9) & (20.9)^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (-1.8)^2/42 & (-1.8)(20.9)/42 \\ (-1.8)(20.9)/42 & (20.9)^2/42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0771 & -0.8957 \\ -0.8957 & 10.4002 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ การหา $\sum_{i=1}^{4} c_i\mathbf{y}_{i.}$ สำหรับ $H_1(c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ c_3 = -1,\ c_4 = -1)$

$$\mathbf{y}_{1.} = \begin{bmatrix} 129.7 \\ 28.1 \end{bmatrix},\ \mathbf{y}_{2.} = \begin{bmatrix} 61.3 \\ 18.5 \end{bmatrix},\ \mathbf{y}_{3.} = \begin{bmatrix} 168.9 \\ 11.8 \end{bmatrix},\ \mathbf{y}_{4.} = \begin{bmatrix} 31.0 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{4} c_i\mathbf{y}_{i.} = c_1\mathbf{y}_{1.} + c_2\mathbf{y}_{2.} + c_3\mathbf{y}_{3.} + c_4\mathbf{y}_{4.}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 129.7 \\ 28.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 61.3 \\ 18.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 168.9 \\ 11.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 31.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.8 \\ 20.9 \end{bmatrix}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{4} c_i\mathbf{y}_i\right)' = [\ -1.8\ \ 20.9\ ]$$

ในการตรวจสอบค่าในตารางที่ 3.12 นั้น เมื่อเอา SS และ SP สำหรับทั้ง 3 contrasts มาบวกกัน จะพบว่ามีค่าเท่ากับ SS และ SP ของ treatments นั้นแสดงว่า contrast ทั้ง 3 orthogonal กันจริง

ตารางที่ 3.12

MANOVA สำหรับข้อมูลในตารางที่ 3.7 แสดง SS และ SP สำหรับ H_1, H_2 และ H_3

	S.V.	df	$SSy^{(1)}$	$SPy^{(1)}y^{(2)}$	$SSy^{(2)}$
	Treatments	3	1849.5862	-21.3810	10.6346
จาก H_1	H_1	1	0.0771	-0.8957	10.4002
จาก H_2	H_2	1	23.2576 +	0.157 +	0.0011 +
จาก H_3	H_3	1	1826.2515	-20.6438	0.2334
	Error	17	1302.6795	-17.6447	6.7778
	Total	20	3152.2657	-39.0257	17.4124

ในการทดสอบ H_1, H_2 และ H_3 โดยใช้ตัวสถิติทดสอบ U ดังนี้

$$\boxed{U_1 = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}_1|},\ U_2 = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}_2|},\ U_3 = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}_3|}}$$

โดยที่ $H_1 = \begin{bmatrix} 0.0771 & -0.8957 \\ -0.8957 & 10.4002 \end{bmatrix}$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 23.2576 & 0.1578 \\ 0.1578 & 0.0011 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1826.2515 & -20.6438 \\ -20.6438 & 0.2334 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1302.6795 & -17.6447 \\ -17.6447 & 6.7778 \end{bmatrix}, \quad |E| = 8829.3011 - 311.3354 = 8517.9657$$

$$|E + H_1| = \begin{vmatrix} 1302.7566 & -28.5404 \\ -18.5404 & 17.1780 \end{vmatrix} = 22035.0064$$

$$|E + H_2| = \begin{vmatrix} 1325.9371 & -17.4869 \\ -17.4869 & 6.7789 \end{vmatrix} = 8682.6033$$

$$|E + H_3| = \begin{vmatrix} 3128.9310 & -38.2885 \\ -38.2885 & 7.0012 \end{vmatrix} = 20471.5518$$

และดังนั้น $u_1 = \dfrac{8517.9657}{22035.0064} = 0.386565$

$$u_2 = \frac{8517.9657}{8682.6033} = 0.981038$$

$$u_3 = \frac{8517.9657}{20471.5518} = 0.416088$$

ค่าจากตาราง $u_{(2,\ 1,\ 17),.01} = .562341 \ (\nu_H = 1)$

เราปฏิเสธ H_1 และ H_3 ที่ $\alpha = .01$ แต่ไม่ปฏิเสธ H_2

เราอาจใช้ **ตัวสถิติ Hotelling's T^2 ในการทดสอบ Multivariate Linear Contrast** ซึ่งมีสูตร

$$\boxed{T^2 = \frac{(\sum_{i=1}^{t} c_i \mathbf{y}_{i.})' \ \mathbf{S}^{-1} (\sum_{i=1}^{t} c_i \mathbf{y}_{i.})}{\sum_{i=1}^{t} c_i^2 n_i}} \qquad \ldots ②$$

โดยที่ $\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E}/\nu_E}$ และเราปฏิเสธสมมติฐานถ้าค่า T^2 ที่คำนวณได้เกินจุดวิกฤต

$T^2_{(p,\ \nu_E),\ \alpha}$

เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง U – test และ Hotelling's T^2 – test สำหรับ linear contrast เราจะคำนวณค่าของตัวสถิติ T^2 สำหรับทดสอบ H_1, H_2 และ H_3

ก่อนอื่นเราคำนวณ $\mathbf{S} = \mathbf{E}/\nu_E$ ในที่นี้ $\nu_E = 17$

$$E = \begin{bmatrix} 1302.6795 & -17.6447 \\ -17.6447 & 6.7778 \end{bmatrix}$$

เราได้ $$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E}}{17} = \begin{bmatrix} 74.6828 & -1.0379 \\ -1.0379 & 0.3987 \end{bmatrix}$$

และ $$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.013527 & 0.035215 \\ 0.035215 & 2.599820 \end{bmatrix}$$

ใช้สูตรที่② คำนวณค่า T_1^2, $T^2{}_2$ และ $T^2{}_3$ ดังนี้

สำหรับ H_1 : $$T_1^2 = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} -1.8 & 20.9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.013527 & 0.035215 \\ 0.035215 & 2.599820 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.8 \\ 20.9 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 0.711645 & 54.27285 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.8 \\ 20.9 \end{bmatrix}$$

$$= 26.9167$$

สำหรับ H_2 : $T_2^2 = \frac{1}{84}\begin{bmatrix}-44.2 & -0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.013527 & 0.035215\\ 0.035215 & 2.599820\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-44.2\\ -0.3\end{bmatrix}$

$= 0.3285$

สำหรับ H_3 : $T_3^2 = \frac{1}{420}\begin{bmatrix}-875.8 & 9.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.013527 & 0.035215\\ 0.035215 & 2.5998201\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-875.8\\ 9.9\end{bmatrix}$

$= 23.8564$

จุดวิกฤตคือ $T^2_{(2,\ 17),\ .01} = 13.231$ ซึ่งทำให้เราสรุปได้ว่าเราปฏิเสธ H_1 และ H_3 แต่ไม่ปฏิเสธ H_2 ที่ $\alpha = .01$

3.10 Simultaneous Confidence Intervals for Differences Between Treatments

สำหรับ treatment means คู่ใด ๆ รูปทั่วไปของ interval เหล่านี้คือ

$$\boxed{\left(\bar{y}_i^{(k)} - \bar{y}_{i'}^{(k)}\right) - \sqrt{\frac{\theta_\alpha}{1-\theta_\alpha}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right)e_{kk}} \le \left(\mu_i^{(k)} - \mu_{i'}^{(k)}\right) \le \left(\bar{y}_i^{(k)} - \bar{y}_{i'}^{(k)}\right) + \sqrt{\frac{\theta_\alpha}{1-\theta_\alpha}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right)e_{kk}}} \quad \ldots③$$

โดยที่ i และ i' ($i \neq i'$) มีค่าจาก 1 ถึง t

$\bar{y}_i^{(k)}$ เป็นสมาชิกตัวที่ k ของ $\bar{\mathbf{y}}_i$

$\mu_i^{(k)}$ เป็นสมาชิกตัวที่ k ของ $\underline{\mu}_i$

e_{kk} เป็นสมาชิกบน diagonal ของ matrix $\mathbf{E}$, k = 1,..., p

$\theta_\alpha = \theta_{(s,\ m,\ n),\ \alpha}$

จากตัวอย่างที่ 3.4 $\theta_{(2,\ 0,\ 7),\ .01} = 0.58$

ดังนั้น $\sqrt{\frac{\theta_\alpha}{1-\theta_\alpha}} = \sqrt{\frac{0.58}{1-0.58}} = \sqrt{1.3810} = 1.1752$.

สรุปค่าต่าง ๆ ที่จะใช้หา simultaneous Confidence intervals ในตารางที่ 3.13

ตารางที่ 3.13

แสดงค่าที่ต้องใช้เพื่อคำนวณหา simultaneous C.I.'s ระหว่าง treatments

Quantity	Group					
	G1	G2	G3	G4	$\sqrt{e_{kk}}$	$1.1752\sqrt{e_{kk}}$
$\bar{y}_i^{(1)}$	18.5286	8.7571	33.7800	15.500	36.0928	42.4162
$\bar{y}_i^{(2)}$	4.0143	2.6428	2.3600	2.5000	2.6034	3.0595
n_i	7	7	5	2		

ถ้าต้องการหา C.I. ของความแตกต่างของ mean ของกลุ่มที่ 2 และกลุ่มที่ 3 สำหรับ number of bacilli inhaled per tubercle formed $(y^{(1)})$ เราคำนวณ

$$(8.7571 - 33.7800) \pm 42.4162\sqrt{\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}} = (-49.8576, -0.1882)$$

ช่วงที่คำนวณได้ไม่รวมศูนย์ ดังนั้นจึงสรุปว่า การฉีดวัคซีนในขณะที่ metabolic depression (G2) นั้นจะมีภูมิต้านทานวัณโรคน้อยกว่าการฉีดในขณะที่ heightened metabolic activity (G3) เมื่อเปรียบเทียบจาก $y^{(1)}$

อาจกล่าวด้วยความเชื่อมั่นอย่างน้อย 99% ว่า C.I.'s ที่คำนวณได้ด้วยสูตรที่ ③ (สำหรับทุกคู่ที่เป็นไปได้ของ treatment means และสำหรับทุกลักษณะของข้อมูลที่วัดมา) นั้นจะเชื่อถือได้

แบบฝึกหัดที่ 3

3.1* ผ้า 5 ชนิดใช้ในการทดลองแบบ CRD ผ้าแต่ละชนิดวัดค่า 2 ค่าคือ

$y^{(1)}$ = เปอร์เซนต์ของ defective yard

$y^{(2)}$ = number of demerits per 5 yards

จากข้อมูลในตารางที่กำหนดให้

1) * จงทดสอบ $H_0 : \underline{\Sigma}_1 = \ldots = \underline{\Sigma}_5$ ที่ $\alpha = .05$

2)* จงทดสอบสมมติฐาน $Ho : \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = \ldots = \underline{\mu}_5$ โดยใช้ U - test และ Union Intersection Test ที่ $\alpha = .01$

3) ทดสอบการเปรียบเทียบต่อไปนี้ c_1 vs. c_2, c_3 และ c_4 vs. c_5

C_1		C_2		C_3		C_4		C_5	
$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
2.5	0.26	4.1	0.58	3.5	0.43	0.5	0.16	7.6	1.20
1.9	0.32	7.2	0.60	2.5	0.39	0.7	0.21	3.0	0.80
3.0	0.29	2.8	0.47	4.5	0.40	1.2	0.31	4.8	1.10
						0.8	0.23	5.0	0.91
						1.2	0.31	5.4	1.00
						5.6	0.32		

3.2 ในการทดลองเก็บลูก blackberries ด้วยเครื่องจักร ได้วัดค่าต่าง ๆ 3 ค่าจากลูก blackberries พันธุ์ Thornless Evergreen นับจากวันที่กำหนดไว้ 0, 6, 15 และ 18 วัน ค่าต่าง ๆ ที่วัดคือ

$y^{(1)}$ = detachment force in grams

$y^{(2)}$ = berry weight in grams

และ $y^{(3)}$ = soluble solids in Brix units

ลูก berries 44 ลูกได้ถูกวัดค่าในแต่ละวัน จากข้อมูลที่รวบรวมได้ต่อไปนี้ ท่านจะมีความแนะนำอย่างไรแก่นักวิจัยบ้าง

	Means				
	0 day	**6 days**	15 days	**18 days**	**Grand mean**
$\bar{y}^{(1)}$	122.148	91.981	91.592	105.259	102.745
$\bar{y}^{(2)}$	3.961	4.100	3.707	3.455	3.806
$\bar{y}^{(3)}$	10.500	10.696	12.888	12.670	11.688

$$H = \begin{bmatrix} 33644.684 & 3.488 & -1257.537 \\ 3.488 & 13.147 & -50.721 \\ -1257.537 & -50.721 & 259.185 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 414213.179 & -2386.930 & -8132.426 \\ -2386.930 & 144.319 & 135.892 \\ -8132.426 & 135.892 & 659.002 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 447857.863 & -2583.442 & -9389.963 \\ -2583.442 & 157.466 & 85.171 \\ -9389.963 & 85.171 & 918.187 \end{bmatrix}$$