บทที่ 4
การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการจำแนกสองทาง
(Analysis of Variance for Two- Way Classification)

หน้า

บทที่ 4

การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการจำแนกสองทาง

(Analysis of Variance for Two - Way Classifications)

ตอนที่ 1 : การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการจำแนกสองทาง เมื่อมีค่าสังเกต 1 ค่าในแต่ละเซล

4.1 บทนำ

จากการทดลองแบบ Randomized Complete Block (RCB) ที่มีค่าสังเกตเพียง 1 ค่าจากหนึ่งหน่วยตัวอย่างต่อหนึ่งเซล ในบทนี้เราจะขยายการวิเคราะห์สำหรับค่าสังเกต p ค่าจากหนึ่งหน่วยตัวอย่างต่อหนึ่งเซล

ทำนองเดียวกับในกรณีของตัวแปรเดี่ยว เราทดสอบการเท่ากันของ means ของทั้ง t treatments ส่วนในกรณีของตัวแปรพหุนั้นทดสอบ

Ho : $\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 = . . = \underline{\mu}_t$

โดยที่ $\underline{\mu}_i$ คือ vectors ของ means จาก treatment ที่ i

ในบทนี้จะทำการทดสอบโดยใช้ทั้ง Likelihood Ratio Test (U - test) และ Union Intersection Test (6) ตามลำดับ

4.2 ทบทวน ANOVA สำหรับ Two - Way Classification ในกรณีของการวิเคราะห์ของตัวแปรเดี่ยว

ในการทดสอบ Ho: $\mu_{1.} = \mu_{2} = . . . = \mu_{t.}$

หรือ Ho : $\delta_i = 0$, Vi $= 1, ... t$

โดยที่ $\mu_{i.}$ = mean ของ treatment ที่ i

δ_i = อิทธิพลของ treatment ที่ i

โครงสร้างของข้อมูลตามตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1

โครงสร้างของข้อมูลสำหรับการทดลองแบบ RCB

Block (Blk)

		B_1	B_2	...	B_j ...	B_b	Total	mean
Treatment	T_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j} ...	y_{1b}	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
(Tr)	T_2 ⋮	y_{21} ⋮	y_{22}	...	y_{2j} ...	y_{2b} ⋮	$y_{2.}$ ⋮	$\bar{y}_{2.}$ ⋮
	T_i	y_{i1}	y_{i2}	...	y_{ij} ...	y_{ib}	$y_{i.}$ ⋮	$\bar{y}_{i.}$ ⋮
	T_t	y_{t1}	y_{t2}	...	y_{tj} ...	y_{tb}	$y_{t.}$	$\bar{y}_{t.}$
	Total	$y_{.1}$	$y_{.2}$	...	$y_{.j}$ ...	$y_{.b}$	$y_{..}$	

y_{ij} = ค่าสังเกตจาก block ที่ j ที่ได้รับ treatment ที่ i

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{b} y_{ij}\ ,\ y_{.j} = \sum_{i=1}^{t} y_{ij}\ ,\ y_{..} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}$$

คำนวณค่าต่อไปนี้

C.F. (correction factor) $= \dfrac{y_{..}^2}{tb}$

$$SSBlk = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{b} y_{.j}^2 - C.F.$$

$$SStr = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{t} y_{i.}^2 - C.F.$$

$$SST = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - C.F.$$

SSE = SST − SSBlk − SStr

ตารางที่ 4.2

ANOVA สำหรับการทดลองแบบ RCB

S.V.	df	SS	MS	f_c
Blocks	b - 1	SSBlk	$MSBlk = s_B^2$	
Treatments	t - 1	SStr	$MStr = s_{Tr}^2$	$f_c = s_{Tr}^2 / s_E^2$
Error	(b − 1)(t − 1)	SSE	$MSE = s_E^2$	
Total	tb − 1	SST		

ในการทดสอบ Ho : $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \dots = \mu_{t.}$ เราจะปฏิเสธ Ho ที่ระดับนัยสำคัญ $= \alpha$ ถ้า fc $= s^2_{Tr} / s^2_E$ มีค่ามากกว่า $f_{(t-1),(b-1)(t-1),\alpha}$

4.3 ตัวอย่างการทดสอบ Ho: $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \dots = \mu_{t.}$

ตัวอย่างที่ 4.1 ข้อมูลในตารางข้างล่างนี้จะใช้ในการวิเคราะห์เพื่อดูอิทธิพลของปุ๋ย 5 ชนิดในการปลูกมันฝรั่ง 4 พันธุ์ ในที่นี้พันธุ์ของมันฝรั่งทำหน้าที่เป็น Block ของการทดลองแบบ RCB

y_{ij} คือจำนวนถุงของมันฝรั่งพันธุ์ที่ j (ซึ่งมีนน. ถุงละ 100 lbs) ซึ่งได้รับปุ๋ยที่ i ในแปลงขนาด 1 เอเคอร์ (2½ ไร่)

ตารางที่ 4.3
แสดงจำนวนถุงของมันฝรั่งในที่ขนาด 1 เอเคอร์

	B_1	B_2	B_3	B_4	Total
T_1	96	142	122	111	471
T_2	102	106	95	93	396
T_3	109	113	101	100	423
T_4	103	97	99	135	434
T_5	98	97	105	86	386
Total	508	555	522	525	2110

$b = 4, t = 5$

$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} y_{ij}^2 = 226228.00$

คำนวณค่า C.F. $= \frac{(2110)^2}{20} = 222605.00$

$$SSBlk = \frac{1}{5}(508^2 + 555^2 + 522^2 + 525^2) - C.F.$$

$$= 222839.60 - C.F. = 234.60$$

$$SStr = \frac{1}{4}(471^2 + 396^2 + \dots + 386^2) - C.F.$$

$$= 223734.50 - C.F. = 1129.50$$

SST $= 226228.00 - C.F. = 3623.00$

SSE $= SST - SSBlk - SStr = 2258.90$

ตารางที่ 4.4

ANOVA สำหรับข้อมูลในตารางที่ 4.3

S.V.	df	SS	MS	f_c
Blocks	3	234.60	78.20	
Treatments	4	1129.50	282.38	1.50
Error	12	2258.90	188.24	
Total	19	3623.00		

เราไม่ปฏิเสธ Ho : $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.} = \mu_{4.} = \mu_{5.}$ ที่ $\alpha = .05$ เพราะ $f_c = 1.50 < f_{(4,\ 12),\ .05} = 3.26$

4.4 MANOVA สำหรับการทดลองแบบ RCB

ถ้าเราทำการวัด p ลักษณะ (p ค่า) จากแต่ละ plot หรือหน่วยทดลองใน RCB โครงสร้างของข้อมูลแสดงในตารางที่ 4.5

ในการทดสอบสมมติฐาน เราจะคำนวณค่าต่าง ๆ เพื่อแสดงใน MANOVA table ดังต่อไปนี้

Sum of Squares : $c_{kk} = (y_{..}^{(k)})^2 / bt \quad , \quad k = 1, \ldots , p$

$$B_{kk} = SSBlk_{kk} = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{b} (y_{.j}^{(k)})^2 - c_{kk}$$

$$Tr_{kk} = SStr_{kk} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{t} (y_{i.}^{(k)})^2 - c_{kk}$$

$$T_{kk} = SST_{kk} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} (y_{ij}^{(k)})^2 - c_{kk}$$

$$E_{kk} = SSE_{kk} = SST_{kk} - SSBlk_{kk} - SStr_{kk}$$

Sum of products : $c_{km} = y^{(k)}_{..}\, y^{(m)}_{..} / bt \qquad , k \neq m = 1, \ldots, p$

Block : $B_{km} = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{b} y^{(k)}_{.j}\, y^{(m)}_{.j} - c_{km}$

$k \neq m = 1, 2, \ldots, p$

Treatment : $Tr_{km} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{t} y^{(k)}_{i.}\, y^{(m)}_{i.} - c_{km}$

Total : $T_{km} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} y^{(k)}_{ij}\, y^{(m)}_{ij} - c_{km}$

Error : $E_{km} = T_{km} - B_{km} - Tr_{km}$

ตารางที่ 4.6

MANOVA สำหรับการทดลองแบบ RCB

S.V.	df	SS และ SP							
Blocks	(b-1)	B_{11}	B_{12}	B_{1p}	B_{22}	...	B_{2p}	...	B_{pp}
Treatments	(t-1)	Tr_{11}	Tr_{12}	Tr_{1p}	Tr_{22}		Tr_{2p}		Tr_{pp}
Error	(b-1) (t-1)	E_{11}	E_{12}	E_{1p}	E_{22}		E_{2p}		E_{pp}
Total	bt-1	T_{11}	T_{12}	T_{1p}	T_{22}		T_{2p}		T_{pp}

โปรดสังเกตว่าการแบ่งที่มาของความแปรปรวนและ df. นั้นเหมือนกับในกรณีของ univariate analysis subscript ในตารางเป็นตัวระบุว่าตัวแปรตัวใดใน p ตัวเกี่ยวข้องกับการหาค่าของ SS และ SP

ตารางที่ 4.5

โครงสร้างของข้อมูลแบบ Multivariate ในการทดลองแบบ RCB

	B_1					...	B_j					...	B_b					Total				
		...	k	...	p		1	...	k	...	p		1	...	k	...	p	1	...	k	...	p
T_1	$y_{11}^{(1)}$		$y_{11}^{(k)}$		$y_{11}^{(p)}$		$y_{1j}^{(1)}$		$y_{1j}^{(k)}$		$y_{1j}^{(p)}$		$y_{1b}^{(1)}$		$y_{1b}^{(k)}$		$y_{1b}^{(p)}$	$y_{1.}^{(1)}$		$y_{1.}^{(k)}$		$y_{1r}^{(p)}$
⋮																						
T_i	$y_{i1}^{(1)}$		$y_{i1}^{(k)}$		$y_{i1}^{(p)}$		$y_{ij}^{(1)}$		$y_{ij}^{(k)}$		$y_{ij}^{(p)}$		$y_{ib}^{(1)}$		$y_{ib}^{(k)}$		$y_{ib}^{(p)}$	$y_{i.}^{(1)}$		$y_{i.}^{(k)}$		$y_{i.}^{(p)}$
⋮																						
T_t	$y_{t1}^{(1)}$		$y_{t1}^{(k)}$		$y_{t1}^{(p)}$		$y_{tj}^{(1)}$		$y_{tj}^{(k)}$		$y_{tj}^{(p)}$		$y_{tb}^{(1)}$		$y_{tb}^{(k)}$		$y_{tb}^{(p)}$	$y_{t.}^{(1)}$		$y_{t.}^{(k)}$		$y_{t.}^{(p)}$
Total	$y_{.1}^{(1)}$		$y_{.1}^{(k)}$		$y_{.1}^{(p)}$		$y_{.j}^{(1)}$		$y_{.j}^{(k)}$		$y_{.j}^{(p)}$		$y_{.b}^{(1)}$		$y_{.b}^{(k)}$		$y_{.b}^{(p)}$	$y_{..}^{(1)}$		$y_{..}^{(k)}$		$y_{..}^{(p)}$

4.5 ตัวอย่างของ MANOVA สำหรับการทดลองแบบ RCB

ตัวอย่างที่ 4.2* จากการทดลองเรื่องมันฝรั่งที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.3

ให้ $y^{(1)}$ เป็นจำนวนถุงขนาด 100 lbs ของมันฝรั่งเกรดที่ 1 ต่อ 1 เอเคอร์

ในตัวอย่างนี้ในแต่ละ plot เราจะสังเกตค่าอีก 2 ค่าคือ

$y^{(2)}$ = จำนวนถุงขนาด 100 lbs ของมันฝรั่งเกรดที่ 2 ต่อ 1 เอเคอร์

และ $y^{(3)}$ = specific gravity

ข้อมูลทั้งหมดแสดงในตารางที่ 4.7

ตารางที่ 4.7

Number of 100 lb bags of No. 1 potatoes per acre ($y^{(1)}$), number of 100 lb bags of No. 2 potatoes per acre ($y^{(2)}$), and specific gravity ($y^{(3)}$)

	I			II			III			IV			Total		
	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$
T_1	96	10	125	142	lb	700	122	13	655	111	13	680	471	52	2760
T_2	102	15	,695	106	10	710	95	14	705	93	12	680	396	51	2790
T_3	109	15	690	113	15	690	101	16	680	100	19	685	423	63	2745
T_4	103	17	680	97	lb	690	99	13	730	13:	12	670	434	58	2170
T_5	98	17	680	97	14	695	105 •	lb	680	86	22	710	386	69	2765
Total	508	74	3470	555	71	3485	522	70	3450	525	78	3425	2110	293	13.830

ในการทดสอบ Ho : $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_5$ เราจะคำนวณค่าต่าง ๆ เหล่านี้ก่อน คือ

c_{11}	$= (2110)^2 / 20 = 222605.00$	c_{22}	$= (293)^2 / 20 = 4292.45$
B_{11}	$= 222839.60 - c_{11} = 234.60$	B_{22}	$= 4300.20 - c_{22} = 7.75$
Tr_{11}	$= 223734.50 - c_{11} = 1129.50$	Tr_{22}	$= 4349.75 - c_{22} = 57.30$
T_{11}	$= 226228.00 - c_{11} = 3623.00$	T_{22}	$= 4449.00 - c_{22} = 156.55$
E_{11}	$= 2258.90$	E_{22}	$= 91.50$

$c_{33} = (13830)^2 / 20 = 9563445.00$ $\quad c_{12} = (2110)\ (293)\ /\ 20 = 30911.50$

$B_{33} = 9563850.00 - c_{33} = 405.00$ $\quad B_{12} = 30897.40 - c_{12} = -14.10$

$Tr_{33} = 9563712.50 - c_{33} = 267.50$ $\quad Tr_{12} = 30785.75 - c_{12} = -125.75$

$T_{33} = 9569650 - c_{33} = 6205.00$ $\quad T_{12} = 30747.00 - c_{12} = -164.50$

$E_{33} = 5532.50$ $\quad E_{12} = -24.65$

$c_{13} = (2110)\ (13830)\ /\ 20 = 1459065.00$ $\quad c_{23} = (293)\ (13830)\ /\ 20 = 202609.50$

$B_{13} = 1459192.00 - c_{13} = 127.00$ $\quad B_{23} = 202573.00 - c_{23} = 36.50$

$Tr_{13} = 1458851.25 - c_{13} = -213.75$ $\quad Tr_{23} = 202547.50 - c_{23} = -62.00$

$T_{13} = 1457320.00 - c_{13} = -1745.00$ $\quad T_{23} = 202515 - c_{23} = -94.50$

$E_{13} = -1658.25$ $\quad E_{23} = 4.00$

ดังนั้น MANOVA สำหรับข้อมูลจากตารางที่ 4.7 คือ

ตารางที่ 4.8

MANOVA สำหรับข้อมูลจากตารางที่ 4.7

Source of Variation	df	$SSy^{(1)}$	$SPy^{(1)}\ y^{(2)}$	$SPy^{(1)}\ y^{(3)}$	$SSy^{(2)}$	$SPy^{(2)}\ y^{(3)}$	$SSy^{(3)}$
Blocks	3	234.60	-14.10	127.00	7.75	-36.50	405.00
Treatments	4	1129.50	-125.75	-213.75	57.30	62.00	267.50
Error	12	2258.90	-24.65	-1658.25	91.50	4.00	5532.50
Total	19	3623.00	-164.50	1745.00	(156.55	-94.50	6205.00

4.6 Likelihood Ratio Test

นักวิจัยสนใจว่าจะมีความแตกต่างระหว่างปุ๋ย 5 ชนิด เมื่อใช้กับการปลูกมันฝรั่งหรือไม่ เพื่อตอบปัญหานี้ ก่อนอื่นเราจะทดสอบสมมติฐาน Ho : $\underline{\mu}_1 = \dots = \underline{\mu}_5$ โดยใช้ตัวสถิติทดสอบ

$$u = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}|}$$

ตัวอย่างที่ 4.3* จากตัวอย่างที่ 4.2 และจากตารางที่ 4.8

$$E = \begin{bmatrix} 2258.90 & -24.65 & -1658.25 \\ -24.65 & 91.50 & 4.00 \\ -1658.25 & 4.00 & 5532.50 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1129.50 & -125.75 & -213.75 \\ -125.75 & 57.30 & -62.00 \\ -213.75 & -62.00 & 267.50 \end{bmatrix}$$

$$E+H = \begin{bmatrix} 3388.40 & -150.40 & -1872.00 \\ -150.40 & 148.80 & -58.00 \\ -1872.00 & 58.00 & 5800.00 \end{bmatrix}$$

$|\mathbf{E}| = 888831957, \quad |\mathbf{E} + \mathbf{H}| = 2227617232$

$\therefore \quad u_c = 0.3990$

เพราะว่า $u_{(3,\ 4,\ 12),\ .05} = 0.168939$ น้อยกว่า 0.3990 ดังนั้นเราไม่ปฏิเสธสมมติฐาน สรุปว่า ประสิทธิภาพของปุ๋ยทั้ง 5 ชนิดไม่ต่างกัน

4.7 Union Intersection Test

ตัวสถิติทดสอบคือ $\quad \theta = \dfrac{ch_{max}(\mathbf{HE}^{-1})}{1 + ch_{max}(\mathbf{HE}^{-1})}$

ตัวอย่างที่ 4.4*

จากตัวอย่างที่ 4.2 เราหา

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000570 & 0.000146 & 0.000171 \\ 0.000146 & 0.010966 & 0.000036 \\ 0.000171 & 0.000036 & 0.000232 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{HE}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.588904 & -1.221762 & 0.139028 \\ -0.073914 & 0.607760 & -0.033824 \\ -0.085147 & -0.701470 & 0.023277 \end{bmatrix}$$

ในการหา characteristic roots ของ HE^{-1} เราจะหา

$$\text{tr} \quad HE^{-1} = 1.219941$$

$$|HE^{-1}| = 0.003118$$

และผลบวกของ principal minors คือ

$$\begin{vmatrix} 0.607760 & -0.033824 \\ -0.701470 & 0.023277 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.588904 & 0.139028 \\ -0.085147 & 0.023277 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.588904 & -1.221762 \\ -0.073914 & 0.607760 \end{vmatrix}$$

$$= -0.009580 + 0.025546 + 0.26707 = 0.283573$$

ดังนั้นเราจะได้

$$-\lambda^3 + 1.219941 \ \lambda^2 - 0.283573 \ \lambda + 0.003118 = 0$$

จากการแก้สมการข้างต้นเราได้

$\lambda_1 = 0.91315$, $\lambda_2 = 0.29527$, และ $\lambda_3 = 0.01153$

เพื่อเป็นการตรวจสอบค่า λ_i's ที่หาได้เราจะเห็นว่า

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \text{tr } HE^{-1} \text{ และ}$$

$$\prod_{i=1}^{3} \lambda_i = |HE^{-1}|$$

$$Ch_{max} (HE^{-1}) = \lambda_1 = 0.91315$$

ดังนั้น $\theta = \dfrac{0.91315}{1 + 0.91315} = 0.4773$

พารามิเตอร์ของ dist^n ของ θ คือ

$$s = \min (4, 3) = 3$$

$$m = \frac{|4-3|-1}{2} = 0$$

$$n = \frac{12 - 3 - 1}{2} = 4$$

ดังนั้นจาก chart เราอ่านค่าของ $\theta_{(3, 0, 4), .05}$ ไม่ได้ แต่เนื่องจาก $\theta_{(3, 0, 4), .05} > \theta_{(3, 0, 5), .05}$ และ $\theta_{(3, 0, 5), .05} = 0.67$ ดังนั้นเราจึงไม่ปฏิเสธ Ho ได้ผลสรุปเช่นเดียวกับวิธี Likelihood Ratio Test

ถ้าเราปฏิเสธ Ho เราจะใช้วิธีในหัวข้อ 3.9 และหัวข้อ 3.11 เพื่อทำการอนุมานต่อไป

แบบฝึกหัดที่ 4 (ตอนที่ 1)

4.1* การทดลองประกอบด้วยถั่วลิสง 9 สายพันธุ์ และทำการทดลอง 3 ครั้ง ผลผลิต = $y^{(1)}$ และ เปอร์เซ็นต์ของผักที่สมบูรณ์ = $y^{(2)}$ ได้ถูกบันทึกไว้สำหรับแต่ละแปลง จงทดสอบเพื่อดูว่ามีความแตกต่างระหว่างสายพันธุ์หรือไม่

	i		II		III	
	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
V_1	85.9	59.0	94.7	39.5	253.3	56.5
V_2	207.0	51.1	200.4	64.8	307.0	54.8
V_3	473.6	64.5	356.8	64.2	339.2	54.6
V_4	301.8	65.0	229.1	59.6	422.9	44.3
V_5	348.0	65.8	422.9	68.2	696.0	61.1
V_6	469.2	72.3	334.8	60.5	257.7	59.0
V_7	308.4	53.6	326.0	66.8	299.6	66.2
V_8	123.4	57.1	110.1	56.0	105.7	60.4
V_9	33J.8	68.4	229.6	64.7	605.7	61.4

4.2 จากการทดลองกับแตงกวา 8 สายพันธุ์ และทำการทดลองซ้ำ 4 ครั้ง

โดยจดบันทึก $y^{(1)}$ = No. of 1's (บุชเชล/เอคอร์)

$y^{(2)}$ = No. of 2's (บุชเชล/เอเคอร์)

$y^{(3)}$ = No. of 3's (บุชเชล/เอเคอร์)

จงทดสอบเพื่อดูว่าสายพันธุ์มีความแตกต่างกันหรือไม่

	I			II			111			N		
	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$
V_1	62	144	73	66	114	88	82	123	79	76	227	66
V_2	72	131	114	72	191	102	86	115	63	78	225	42
V_3	78	161	34	63	160	90	51	161	65	65	148	43
V_4	78	162	76	96	134	71	68	135	44	63	154	115
V_5	99	164	64	62	144	41	72	155	68	74	162	58
V_6	69	155	51	77	139	65	63	190	62	68	144	76
V_7	67	136	81	95	144	96	59	189	53	68	160	77
V_8	a9	135	146	63	182	92	78	191	48	78	165	50

ตอนที่ 2 : การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับการจำแนกแบบสองทาง เมื่อมีค่าสังเกต n ค่าในแต่ละเซล

4.8 บทนำ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์ความแปรปรวนของตัวแปรพหุในการจำแนกแบบสองทาง เมื่อมีค่าสังเกต n ค่าในแต่ละเซล จะแสดงการทดสอบสมมติฐานโดยใช้ทั้งวิธี Likelihood Ratio Test และ Union Intersection Test

ในการวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับตัวแปรเดี่ยวนั้น variance ของแต่ละเซลต้องเท่ากัน (ใน fixed effect model) ทั้งนี้เพราะ pooled estimate ของ common σ^2 จะถูกใช้เป็น error term ในการวิเคราะห์ของตัวแปรพหุเราต้องการ variance - covariance matrices ที่เท่ากันด้วยทั้งนี้ด้วยเหตุผลเดียวกัน ในหัวข้อ 4.14 จะแสดงการทดสอบการเท่ากันของ variance - covariance matrices ด้วย

4.9 ทบทวน ANOVA สำหรับ Two - Way Classification ในกรณีของตัวแปรเดี่ยว เมื่อมีค่าสังเกต n ค่าในแต่ละเซล

ในกรณีของตัวแปรเดี่ยว เราสนใจการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลหลัก (main effects) และอิทธิพลร่วม (interaction effect) ระหว่างสองปัจจัย (factor) โครงสร้างของข้อมูลแสดงในตารางที่ 4.9 คือข้อมูลสำหรับ a × b Factorial design เมื่อมีค่าสังเกต n ค่าในแต่ละเซล

ในตารางที่ 4.9

y_{ijf} : i หมายถึง level ของ factor A , $i = 1, \ldots, a$

j หมายถึง level ของ factor B , $j = 1, \ldots, b$

f หมายถึงหน่วยทดลองที่ f ภายใน A_iB_j cell , $f = 1, \ldots, n$

ในการสร้างตาราง ANOVA เราคำนวณสิ่งต่าง ๆ ต่อไปนี้คือ

$$SSA_iB_j = \sum_{f=1}^{n} y_{ijf}^2 - \frac{y_{ij.}^2}{n} \qquad \ldots\ldots ①$$

pooled error S.S. (equal variances)& $SSE = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} SSA_iB_j$ ....②

$$C.F. = y_{...}^2 / abn \qquad \ldots ③$$

$$SSA = \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - C.F. \qquad \ldots ④$$

$$SSB = \frac{1}{an} \sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^2 - C.F. \qquad \ldots ⑤$$

ตารางที่ 4.9
โครงสร้างของข้อมูลสำหรับ a × b Factorial design
เมื่อมี n ค่าสังเกตในแต่ละเซล

	B_1	...	B_j	...	B_b	
	y_{111}	...	y_{1j1}	...	y_{1b1}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
A_1	y_{11f}	...	y_{1jf}	...	y_{1bf}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	y_{11n}	...	y_{1jn}	...	y_{1bn}	
Total	$y_{11.}$	...	$y_{1j.}$	...	$y_{1b.}$	$y_{1..}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	y_{i11}	...	y_{ij1}	...	y_{ib1}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
A_i	y_{i1f}	...	y_{ijf}	...	y_{ibf}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	y_{i1n}	...	y_{ijn}	...	y_{ibn}	
Total	$y_{i1.}$	...	$y_{ij.}$	...	$y_{ib.}$	$y_{i..}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	y_{a11}	...	y_{aj1}	...	y_{ab1}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
A_a	y_{a1f}	...	y_{ajf}	...	y_{abf}	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	y_{a1n}	...	y_{ajn}	...	y_{abn}	
Total	$y_{a1.}$	...	$y_{aj.}$	...	$y_{ab.}$	$y_{a..}$
Total	$y_{.1.}$	...	$y_{.j.}$	...	$y_{.b.}$	$y_{...}$

$$SST\,(AB) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - C.F. \qquad ....⑥$$

$$SSAB = SST\,(AB) - SSA - SSB \qquad ....⑦$$

$$SST = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{f=1}^{n} y_{ijf}^2 - C.F. \qquad ....⑧$$

อาจหา SSE จากสูตร SSE $= SST - SSA - SSB - SSAB$

$= SST - SSA - SSB - (SST(AB) - SSA - SSB)$

$$SSE = SST - SST(AB) \quad \ldots⑨$$

ตารางที่ 4.10

ANOVA สำหรับข้อมูลในตารางที่ 4.9

S.V.	df	ss	MS
A	a-l	SSA	MSA = s^2
B	b-l	SSB	MSB = s_B^2
AB	(a-l) (b-l)	SSAB	MSAB = s_{AB}^2
Error	ab (n-l)	SSE	MSE = s_E^2
Total	abn-1	SST	

ในกรณีของ univariate เรามักจะทดสอบสมมติฐานว่าไม่มีอิทธิพลร่วมก่อนอื่น ถ้าเราไม่ยอมรับสมมติฐานเราจึงจะทดสอบอิทธิพลหลักต่อไป ในกรณีที่เรายอมรับสมมติฐานว่าไม่มีอิทธิพลร่วมนั้น เราจะใช้วิธีการรวม SSAB เข้ากับ SSE และรวม df ของ SS ทั้ง 2 ค่าด้วย แล้วจึงทดสอบอิทธิพลหลักต่อไป เราเรียกกรณีหลังนี้ว่า "pooling situation"

4.10 ตัวอย่างการวิเคราะห์ความแปรปรวนตามวิธีในหัวข้อ 4.9

ตัวอย่างที่ 4.5*การทดลองได้ทำการจำแนกนักเรียนตามระดับสติปัญญา (IQ) และชนิดของโรงเรียนที่นักเรียนเรียน นักเรียน 4 คนถูกเลือกมาอย่างสุ่มจากกลุ่มที่จำแนกโดย IQ-school นักเรียนทั้งหมดสอบวิชาภาษาอังกฤษ ข้อมูลดังแสดงในตารางที่ 4.11

ตารางที่ 4.11

คะแนนภาษาอังกฤษ

	School		
IQ	B_1 : Special	B, : Public	
A, : IQ < 60	40.1 41.1 40.9 39.4	63.0 61.9 61.6 64.0	
Total	161.5	250.5	**412.0**
A_2 : 60 < IQ < 70	52.8 53.6 53.9 53.8	68.6 10.7 69. 73.3	
Total	214.1	281.7	495.8
A_3 : IQ > 70	41.6 31.1 43.2 42.0	62.8 56.6 63.3 60.9	
Total	164.5	243.6	408.1
Total	540.1	775.8	1315.9

คำนวณค่าต่าง ๆ ดังนี้

คำนวณ SSAi Bj :

$SSA_1B_1 = (40.1^2 + 41.1^2 + 40.9^2 + 39.4^2) - (161.5)^2 / 4 = 6522.39 - 6520.56 = 1.83$

$SSA_1B_2 = (60.3^2 + 61.9^2 + 61.6^2 + 64.0^2) - (250.5^2) / 4 = 3.61$

$SSA_2B_1 = (52.8^2 + 53.6^2 + 53.9^2 + 53.8^2) - (214.1)^2 / 4 = 0.75$ ... ①

$SSA_2B_2 = (68.6^2 + 70.7' + 69.1^2 + 73.3^2) - (281.7^2) / 4 = 13.43$

$SSA_3B_1 = (41.6' + 37.7^2 + 43.2^2 + 42.0^2) - (164.5^2) / 4 = 17.03$

$SSA_3B_2 = (62.8^2 + 56.6^2 + 63.3^2 + 60.9^2) - (243.6^2) / 4 = 27.86$

SSE = 1.83 + 3.61 + 0.75 + 13.43 + 17.03 + 27.86 = 64.51 .. ②

a = 3, b = 2, n = 4, abn = 24

C.F. = $(1315.9)^2$ / 24 = 72149.70 ... ③

SSA = $(412^2 + 495.8^2 + 408.1^2)$ / 8 - C.F. = 72763.41 - C.F. = 613.71 ... ④

SSB = $(540.1^2 + 775.8^2)$ / 12 - C.F. = 74464.47 - C.F. = 2314.77 ... ⑤

SST (AB) = $(161.5^2 + 250.5^2 + \ldots + 164.5^2 + 243.6^2)$ / 4 - C.F. ....⑥

= 75106.84 - C.F. = 2957.14

SSAB = SST(AB) - SSA - SSB . . ..a

= 2957.15 - 613.71 - 2314.77 = 28.67

SST = $(40.1^2 + 41.1^2 + \ldots + 63.3^2 + 60.9^2)$ - C.F. = 75171.35 - C.F. ....⑧

= 3021.65

อาจหา SSE = SST - SSAB - SSA - SSB = 3021.65 - 28.67 613.71 - 2314.77 = 64.51

ตารางที่ 4.12

S.V.	df	SS	MS
A : IQ	2	613.71	306.86
B : School	1	2314.77	2314.77
$A \times B$: $IQ \times School$	2	28.67	14.34
Error	18	64.51	3.58
Total	23	3021.65	

4.11 MANOVA สำหรับ a × b Factorial Design เมื่อมีค่าสังเกต n ค่าในแต่ละเซล

ในกรณีของ multivariate แทนที่เราจะวัดค่าเพียง 1 ค่าจากแต่ละหน่วยทดลองใน A_iB_j เราจะวัด p ค่า โครงสร้างของข้อมูลแสดงในตารางที่ **4.13**

ในการคำนวณค่าต่าง ๆ เพื่อสร้างตาราง MANOVA นั้น เราจะต้องหา SS สำหรับแต่ละลักษณะที่วัดโดยใช้สูตรจากหัวข้อ 4.9 และต้องคำนวณ SP ของแต่ละอิทธิพลดังนี้

$$C.F.\ (km) = y_{\cdot}^{(k)}\, y_{\cdot}^{(m)} / abn \qquad \ldots (9)$$

$$SP_{km}\, A = \frac{1}{bn} \sum_{i=1}^{a} y_{i..}^{(k)}\, y_{i..}^{(m)} - C.F. \qquad \ldots (10)$$

$$SP_{km}\, B = \frac{1}{an} \sum_{j=1}^{b} y_{.j.}^{(k)}\, y_{.j.}^{(m)} - C.F. \qquad \ldots (11)$$

$$SP_{km}\, T(AB) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^{(k)}\, y_{ij.}^{(m)} - C.F. \qquad \ldots (12)$$

$$SP_{km}\, (AB) = SP_{km}\, T(AB) - Sp_{,,}\, A - Sp,\, B \qquad \ldots (13)$$

$$SP_{km}\, T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{f=1}^{n} y_{ijf}^{(k)}\, y_{ijf}^{(m)} - C.F. \qquad \ldots (14)$$

$$SP_{km}\, E = SP_{km}\, T - SP_{,,}\, T(AB) \qquad \ldots (15)$$

ตารางที่ 4.13

โครงสร้างของข้อมูลสำหรับการวิเคราะห์เชิงพหุ ใน a x b Factorial Design เมื่อมีค่าสังเกต n ค่าในแต่ละเซล

	B_1					...	B_j					...	B_b									
	1	...	k	...	p	...	1	...	k	...	p	...	1	...	k	...	p					
A_1	$y_{111}^{(1)}$	...	$y_{111}^{(k)}$	...	$y_{111}^{(p)}$	...	$y_{1j1}^{(1)}$	...	$y_{1j1}^{(k)}$	...	$y_{1j1}^{(p)}$	...	$y_{1b1}^{(1)}$	...	$y_{1b1}^{(k)}$	...	$y_{1b1}^{(p)}$					
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
	$y_{11m}^{(1)}$	...	$y_{11m}^{(k)}$	...	$y_{11m}^{(p)}$	...	$y_{1jm}^{(1)}$	...	$y_{1jm}^{(k)}$	...	$y_{1jm}^{(p)}$	...	$y_{1bm}^{(1)}$	...	$y_{1bm}^{(k)}$	...	$y_{1bm}^{(p)}$					
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
	$y_{11n}^{(1)}$	...	$y_{11n}^{(k)}$	...	$y_{11n}^{(p)}$	...	$y_{1jn}^{(1)}$	...	$y_{1jn}^{(k)}$	...	$y_{1jn}^{(p)}$	...	$y_{1bn}^{(1)}$	...	$y_{1bn}^{(k)}$	...	$y_{1bn}^{(p)}$					
Total	$y_{11.}^{(1)}$	...	$y_{11.}^{(k)}$	...	$y_{11.}^{(p)}$	...	$y_{1j.}^{(1)}$	...	$y_{1j.}^{(k)}$	...	$y_{1j.}^{(p)}$	...	$y_{1b.}^{(1)}$	...	$y_{1b.}^{(k)}$	...	$y_{1b.}^{(p)}$	$y_{1..}^{(1)}$	...	$y_{1..}^{(k)}$	...	$y_{1..}^{(p)}$
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				
A_i	$y_{i11}^{(1)}$	...	$y_{i11}^{(k)}$	...	$y_{i11}^{(p)}$	...	$y_{ij1}^{(1)}$	...	$y_{ij1}^{(k)}$	...	$y_{ij1}^{(p)}$	...	$y_{ib1}^{(1)}$	...	$y_{ib1}^{(k)}$	...	$y_{ib1}^{(p)}$					
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
	$y_{i1m}^{(1)}$	...	$y_{i1m}^{(k)}$	...	$y_{i1m}^{(p)}$	...	$y_{ijm}^{(1)}$	...	$y_{ijm}^{(k)}$	...	$y_{ijm}^{(p)}$	...	$y_{ibm}^{(1)}$	...	$y_{ibm}^{(k)}$	...	$y_{ibm}^{(p)}$					
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
	$y_{i1n}^{(1)}$	...	$y_{i1n}^{(k)}$	...	$y_{i1n}^{(p)}$	...	$y_{ijn}^{(1)}$	...	$y_{ijn}^{(k)}$	...	$y_{ijn}^{(p)}$	...	$y_{ibn}^{(1)}$	...	$y_{ibn}^{(k)}$	...	$y_{ibn}^{(p)}$					
Total	$y_{i1.}^{(1)}$	...	$y_{i1.}^{(k)}$	...	$y_{i1.}^{(p)}$	...	$y_{ij.}^{(1)}$	...	$y_{ij.}^{(k)}$	...	$y_{ij.}^{(p)}$	...	$y_{ib.}^{(1)}$	...	$y_{ib.}^{(k)}$	...	$y_{ib.}^{(p)}$	$y_{i..}^{(1)}$	...	$y_{i..}^{(k)}$	...	$y_{i..}^{(p)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				
A_a	$y_{a11}^{(1)}$	...	$y_{a11}^{(k)}$	...	$y_{a11}^{(p)}$	...	$y_{aj1}^{(1)}$	...	$y_{aj1}^{(k)}$	...	$y_{aj1}^{(p)}$	...	$y_{ab1}^{(1)}$	...	$y_{ab1}^{(k)}$	...	$y_{ab1}^{(p)}$					
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
	$y_{a1m}^{(1)}$	...	$y_{a1m}^{(k)}$	...	$y_{a1m}^{(p)}$	...	$y_{ajm}^{(1)}$	...	$y_{ajm}^{(k)}$	...	$y_{ajm}^{(p)}$	...	$y_{abm}^{(1)}$	...	$y_{abm}^{(k)}$	...	$y_{abm}^{(p)}$					
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
	$y_{a1n}^{(1)}$	...	$y_{a1n}^{(k)}$	...	$y_{a1n}^{(p)}$	...	$y_{ajn}^{(1)}$	...	$y_{ajn}^{(k)}$	...	$y_{ajn}^{(p)}$	...	$y_{abn}^{(1)}$	...	$y_{abn}^{(k)}$	...	$y_{abn}^{(p)}$					
Total	$y_{a1.}^{(1)}$	...	$y_{a1.}^{(k)}$	...	$y_{a1.}^{(p)}$	...	$y_{aj.}^{(1)}$	...	$y_{aj.}^{(k)}$	...	$y_{aj.}^{(p)}$	...	$y_{ab.}^{(1)}$	...	$y_{ab.}^{(k)}$	...	$y_{ab.}^{(p)}$	$y_{a..}^{(1)}$	...	$y_{a..}^{(k)}$	...	$y_{a..}^{(p)}$
Total	$y_{.1.}^{(1)}$	...	$y_{.1.}^{(k)}$	...	$y_{.1.}^{(p)}$	...	$y_{.j.}^{(1)}$	...	$y_{.j.}^{(k)}$	...	$y_{.j.}^{(p)}$	...	$y_{.b.}^{(1)}$	...	$y_{.b.}^{(k)}$	...	$y_{.b.}^{(p)}$	$y_{...}^{(1)}$	...	$y_{...}^{(k)}$	...	$y_{...}^{(p)}$

ตารางที่ 4.14

MANOVA สำหรับข้อมูลในตารางที่ 4.13

S.V.	df	SS and SP										
A	a - 1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1p}	A_{22}	...	A_{2p}	...	A_{pp}
B	b - 1	B_{11}	B_{12}	...	B_{1p}	B_{22}	...	B_{2p}	...	B_{pp}
A×B	(a - 1) (b - 1)	AB_{11}	AB_{12}	...	AB_{1p}	AB_{22}	...	AB_{2p}	...	AB_{pp}
Error	ab (n - 1) = ν_E	E_{11}	E_{12}	...	E_{1p}	E_{22}	...	E_{2p}	...	E_{pp}
Total	abn - 1	T_{11}	T_{12}	...	T_{1p}	T_{22}	...	T_{2p}	...	T_{pp}

4.12 ตัวอย่างของวิธีการในหัวข้อ 4.11

ตัวอย่างที่ 4.6*

จากการทดลองในตัวอย่างที่ 4.5 สำหรับนักเรียนแต่ละคน นอกจากคะแนนภาษาอังกฤษ ($y^{(1)}$) แล้ว เราสอบนักเรียนเพื่อเก็บคะแนนคณิตศาสตร์ ($y^{(2)}$) และคะแนนวิทยาศาสตร์ด้วย ($y^{(3)}$) ข้อมูลแสดงในตารางที่ 4.15

ตารางที่ 4.15

	School								
	B_1 : Special			B_2 : Public			Total		
	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$
IQ	Eng.	Arith.	Sci.	Eng.	Arith.	Sci.	Eng.	Arith.	Sci.
A_1 <60	40.1	85.6	46.8	63.0	102.4	44.8			
	41.1	83.2	41.7	61.9	100.3	39.4			
	40.9	79.5	38.1	61.6	101.3	39.9			
	39.4	78.0	39.6	64.0	106.2	50.0			
Total	161.5	326.3	166.2	250.5	410.2	174.1	412.0	736.5	340.3
A_2 60-70	52.8	114.4	47.1	68.6	129.8	42.7			
	53.6	115.6	42.1	70.7	131.0	47.1			
	53.9	114.2	42.3	69.1	135.8	45.2			
	53.8	113.2	35.7	73.3	147.6	49.2			
Total	214.1	457.4	167.2	281.7	544.2	184.2	495.8	1001.6	351.4
A_3 >70	41.6	142.3	45.8	62.8	164.4	44.4			
	37.7	137.0	37.0	56.6	156.0	45.3			
	43.2	143.8	44.0	63.3	161.3	46.3			
	42.0	143.6	40.8	60.9	161.4	42.2			
Total	164.5	566.7	167.6	243.6	643.1	178.2	408.1	1209.8	345.8
Total	540.1	1350.4	501.0	775.8	1597.5	536.5	1315.9	2947.9	1037.5

เนื่องจากในตัวอย่างที่ 4.5 เราคำนวณค่าต่าง ๆ สำหรับวิชาภาษาอังกฤษแล้ว เราจะคำนวณค่า SS สำหรับวิชาคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ และ SP ของวิชาทั้ง 3 ด้วย

สำหรับคณิตศาสตร์ $(y^{(2)})$ $C.F. = (2947.9)^2 / 24 = 362{,}088.10$

SSA $= (736.5' + 1001.6^2 + 1209.8^2) / 8 - C.F. = 376156.36 - C.F. = 14068.26$

SSB $= (556.7^2 + 643.1') / 12 - C.F. = 364632.20 - C.F. = 2544.10$

SST (AB) $= (326.3^2 + 410.2^2 + 457.4^2 + 544.2^2 + 566.7^2 + 643.1^2) / 4 - C.F.$

$= 378707.66 - C.F. = 16619.56$

SSAB $= 16619.56 - 14068.26 - 2544.10 = 7.20$

SST $= (85.6^2 + 83.2^2 + \ldots + 161.3^2 + 161.4^2) - C.F.$

$= 379031.57 - C.F. = 16943.47$

SSE $= SST - SST\ (AB) = 16943.47 - 16619.56 = 323.92$

สำหรับวิทยาศาสตร์ $(y^{(3)})$

C.F. $= (1037.5)^2 / 24 = 44850.26$

SSA $= (340.3^2 + 351.4^2 + 345.8^2) / 8 - C.F. = 44857.96 - C.F. = 7.70$

SSB $= (167.6^2 + 178.2^2) / 12 - C.F. = 44902.77 - C.F. = 52.51$

SST (AB) $= (166.2^2 + 174.1^2 + 167.2^2 + 184.2^2 + 167.6^2 + 178.2') / 4 - C.F.$

$= 44915.93 - C.F. = 65.67$

SST $= (46.8^2 + 41.7^2 + \ldots + 46.3^2 + 42.2^2) - C.F. = 45175.55 - C.F.$

$= 325.29$

SSAB $= 65.67 - 7.70 - 52.51 = 5.46$

SSE $= 325.29 - 65.67 = 259.62$

สำหรับภาษาอังกฤษ - คณิตศาสตร์ $(y^{(1)}\ y^{(2)})$

C.F. = C.F. (12) $= (1315.9)(2947.9) / 24 = 161630.90$

$SP_{12}A$ $= \frac{1}{8}(412.0 \times 736.5 + 495.8 \times 1001.6 + 408.1 \times 1209.8) - C.F.$

$= 87.93$

$SP_{12}B = \frac{1}{12}(540.1 \times 1350.4 + 775.8 \times 1597.5) - C.F. = 164057.63 - C.F.$

$= 2426.13$

$SP_{12}\ T(AB) = \frac{1}{4}(161.5 \times 326.3 + \ldots + 243.6 \times 643.1) - C.F. = 164141.10 - C.F.$

$= 2510.20$

$SP_{12}\ AB = 2510.20 - 2426.73 - 87.93 = -4.46$

$SP_{12}\ T = (40.1 \times 85.6 + \ldots + 60.9 \times 161.4) - C.F. = 164245.75 - C.F.$

$= 2614.85$

$SP_{12}\ E = 2614.85 - 2510.20 = 104.65$

สำหรับภาษาอังกฤษ - วิทยาศาสตร์ ($y^{(1)}\ y^{(3)}$)

C.F. = C.F. (13) $= (1315.9)\ (1037.5)\ /\ 24 = 56885.26$

$SP_{13}\ A = \frac{1}{8}(412.0 \times 340.3 + 495.8 \times 351.4 + 408.1 \times 345.8) - C.F.$

$= 56943.59 - C.F. = 58.33$

$SP_{13}\ B = \frac{1}{12}(540.1 \times 5Ql.0 + 775.8 \times 536.5) - C.F.$

$= 57233.90 - C.F. = 348.64$

$SP_{13}\ T(AB) = \frac{1}{4}(161.5 \times 326.3 + \ldots + 243.6 \times 643.1) - C.F. = 164141.10 - C.F.$

$= 57279.93 - C.F. = 394.67$

$SP_{13}\ AB = 394.67 - 58.33 - 348.64 = -12.30$

$SP_{13}\ T = (40.1 \times 46.8 + \ldots + 60.9 \times 42.2) - C.F.$

$= 57328.77 - C.F. = 443.51$

$SP_{13}\ E = 443.51 - 394.67 = 48.84$

สำหรับคณิตศาสตร์ - วิทยาศาสตร์ ($y^{(2)}, y^{(3)}$)

C.F. = C.F. (23) $= (2947.9)\ (1037.5)\ /\ 24 = 127435.26$

$SP_{23}\ A = \frac{1}{8}(736.5 \times 340.3 + 1001.6 \times 351.4 + 1209.8 \times 345.8) - C.F.$

$= 127617.75 - C.F. = 182.49$

$SP_{23}\,B \quad = \frac{1}{12}(1350.4 \times 501.0 + 1597.5 \times 536.5) - C.F.$

$\quad = 127800.76 - C.F. = 365.50$

$SP_{23}\,T(AB) \quad = \frac{1}{4}(326.3 \times 166.2 + \ldots + 643.1 \times 1.78.2) - C.F.$

$\quad = 127986.30 - C.F. = 551.04$

$SP_{23}\,AB \quad = 551.04 - 182.49 - 365.50 = 3.05$

$SP_{23}\,T \quad = (85.6 \times 46.8 + \ldots + 161.4 \times 42.2) - C.F.$

$\quad = 128141.87 - C.F. = 706.61$

$SP_{23}\,E \quad = 706.61 - 551.04 = 155.57$

ตารางที่ 4.18

MANOVA สำหรับข้อมูลในตารางที่ 4.15

SV.	df	$SS_{y^{(1)}}$	$SP_{y^{(1)}y^{(2)}}$	$SP_{y^{(1)}y^{(3)}}$	$SS_{y^{(2)}}$	$SP_{y^{(2)}y^{(3)}}$	$SS_{y^{(3)}}$
A : IQ	2	613.71	87.93	58.33	14068.26	182.49	7.70
B : School	1	2314.77	2426.73	348.64	2544.10	365.50	52.51
AXB	2	28.67	-4.46	-12.30	7.20	3.05	5.46
Error	18	64.51	104.65	48.83	323.92	155.57	259.62
Total	**23**	3021.65	2614.85	443.51	16943.41	706.61	325.29

4.13 การทดสอบอิทธิพลต่าง ๆ โดยใช้ Likelihood Ratio Test

ตัวอย่างที่ 4.7

จากตัวอย่างที่ 4.6 เราจะทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับอิทธิพลร่วม (interaction effect) ก่อน ในการทดสอบเราเขียนเมตริกซ์ E, H และ E + H ดังนี้

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 64.51 & 104.65 & 48.83 \\ 104.65 & 323.92 & 155.57 \\ 48.83 & 155.57 & 259.62 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 28.67 & -4.46 & -12.30 \\ -4.46 & 7.20 & 3.05 \\ -12.30 & 3.05 & 5.46 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 93.18 & 100.19 & 36.53 \\ 100.19 & 331.12 & 158.62 \\ 36.53 & 158.62 & 265.08 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $u_c = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}|} = \frac{1836992}{3891831} = 0.4720$

$u_{(3,\ 2,\ 18),\ .01}$ = 0.370654 เราไม่ปฏิเสธสมมติฐานว่าไม่มีอิทธิพลร่วมระหว่าง IQ และ school

ต่อไปทดสอบ **Ho: ไม่มี IQ effect**

$$H = \begin{bmatrix} 613.71 & 87.93 & 58.33 \\ 87.93 & 14068.26 & 182.49 \\ 58.33 & 182.49 & 7.70 \end{bmatrix},\ H + E = \begin{bmatrix} 678.22 & 192.58 & 107.16 \\ 192.58 & 14392.18 & 338.06 \\ 107.16 & 338.06 & 261.32 \end{bmatrix}$$

$$u_c = \frac{1836992}{2370549053} = 0.000775$$

$u_{(3,\ 2,\ 18),\ .01}$ = 0.370654 เราปฏิเสธ Ho *แสดงว่ามี* IQ effect

ต่อไปเราใช้วิธีที่กล่าวในหัวข้อ 2.6 เพื่อหา simultaneous C.I.'s เพื่อหาว่าระดับหรือลักษณะใด ของ IQ ที่ทำให้เราปฏิเสธ Ho

ทดสอบ H_0: ไม่มี school effect

$$H = \begin{bmatrix} 2314.77 & 2426.73 & 348.64 \\ 2426.73 & 2544.10 & 365.50 \\ 348.64 & 365.50 & 52.51 \end{bmatrix},\ H + E = \begin{bmatrix} 2379.28 & 2531.38 & 397.47 \\ 2531.38 & 2868.02 & 521.07 \\ 397.47 & 521.07 & 312.13 \end{bmatrix}$$

$$u_c = \frac{1836992}{79234058} = 0.023184$$

$u_{(3,\ 1,\ 18),\ .01}$ 0.501932 เราปฏิเสธ H_0 แสดงว่ามี school effect

4.14 การทดสอบ H_o: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_m$ และตัวอย่างการทดสอบ

การทดสอบในหัวข้อ 4.12 นั้น เราใช้ข้อสมมุติว่า variance-covariance matrices เท่ากัน ในที่นี้เราจะทดสอบข้อสมมุติที่ใช้ เราจะใช้ข้อมูลจากตารางที่ 4.17 เพื่อแสดงวิธีการทดสอบ

ตัวอย่างที่ 4.8*

ข้อมูลจากตารางที่ 4.17 เป็นผลจากการทดสอบอาการบิดเป็นเกลียว (torsion) ได้เอาเหล็กแท่งที่ไม่แตกต่างกันมา 32 แท่ง ปลายข้างหนึ่งใส่เข้าไปในที่ยึดตรึงไว้ การบิดทำที่ปลายอีกข้างหนึ่ง ที่ยึดถูกกลับตัวด้วยความเร็วระดับหนึ่งใน 2 ระดับ คือ เร็วหรือช้า (fast or low speed) และใส่น้ำมันหล่อลื่นชนิดหนึ่งใน 4 ชนิดให้แก่เหล็กแท่งแต่ละแท่ง

ค่าสังเกต 2 ค่าคือ $y^{(1)}$ = Ultimate torque (ft-lbs)

และ $y^{(2)}$ = Ultimate strain

ในการทดสอบ สมมติฐาน $H_0: \Sigma_1 = \ldots = \Sigma_m$ เราใช้

$$\chi_c^2 = 2.3026 \{1 - [\frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(m-1)}] [\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1)}]\}$$

$$\cdot\{[\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \log |S| - \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \log |S_i|]\}$$

โดยที่ $S = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - 1) S_i}{\Sigma(n_i - 1)}$, ถ้า H_0 จริง χ_c^2 เป็นค่าของ $X^2 \sim \chi^2_{\frac{(m-1)p(p+1)}{2}}$

ในการหา S_i และ S นั้น เราเริ่มด้วยการใช้สูตรต่าง ๆ ในหัวข้อก่อน ๆ เพื่อหาเมตริกซ์ของ SS และ SP ในแต่ละเซล

ตารางที่ 4.17

		F; Fast Speed		3: Slow Speed		Total	
		Torque	strain	Torque	Strain	Torque	strain
		$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
LUBRICANT	A	7.80	90.4	7.12	85.1		
		7.10	88.9	7.06	89.0		
		7.89	85.9	7.45	75.9		
		7.82	88.8	7.45	77.9		
	Total	30.61	354.0	29.08	327.9	59.69	681.9
	B	9.00	82.5	8.19	66.0		
		8.43	92.4	8.25	74.5		
		7.65	82.4	7.45	83.1		
		7.70	87.4	7.45	86.4		
	Total	32.78	344.7	31.34	310.0	64.12	654.7
	C	7.28	79.6	7.15	81.2		
		8.96	95.1	7.15	72.0		
		7.75	90.2	7.70	79.9		
		7.80	88.0	7.45	71.9		
	Total	31.79	352.9	29.45	305.0	61.24	657.9
	D	7.60	94.1	7.06	81.2		
		7.00	86.6	7.04	79.9		
		7.82	85.9	7.52	86.4		
		7.80	8a.a	7.70	76.L		
	Total	30.22	355.6	29.32	323.9	59.54	679.3
	Total	125.10	1107.0	119.19	1266.8	240.59	2673.8

จากการคำนวณเราได้ sample variance - covariance matrices ดังนี้

$$S_{FA} = \begin{bmatrix} 0.1373 & -0.1693 \\ -0.1693 & 3.5400 \end{bmatrix}, S_{FB} = \begin{bmatrix} 0.4151 & -0.0148 \\ -0.0148 & 22.6692 \end{bmatrix}, S_{FC} = \begin{bmatrix} 0.5105 & 4.1204 \\ 4.1204 & 41.8692 \end{bmatrix}, S_{FD} = \begin{bmatrix} 0.1468 & 0.2303 \\ 0.2303 & 13.7767 \end{bmatrix}$$

$$S_{SA} = \begin{bmatrix} 0.0438 & -1.257 \\ -1.257 & 37.5425 \end{bmatrix}, S_{SB} = \begin{bmatrix} 0.1982 & -3.6367 \\ -3.6367 & 83.94 \end{bmatrix}, S_{SC} = \begin{bmatrix} 0.0706 & 0.2342 \\ 0.2342 & 24.9367 \end{bmatrix}, S_{SD} = \begin{bmatrix} 0.1100 & -0.1370 \\ -0.1370 & 17.1892 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} 0.2040 & -0.0787 \\ -0.0787 & 30.6829 \end{bmatrix}$, $m = 8,\ p = 2$, $df = \dfrac{(m-1)\,p\,(p+1)}{2} = \dfrac{7(2)(3)}{2} = 21$

และ $\chi_c^2 = 2.3026\left[1-\left(\frac{13}{126}\right)\left(\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{24}\right)\right]$ [24 log 6.2531 - 3 log 0.4574

- 3 log 9.4098 - 3 log 4.3965 - 3 log 1.9694 - 3 log. 0.0643

- 3 log 3.4113 - 3 log 1.7057 - 3 log 1.87201

= 2.3026 (0.7292) [24 (0.79610) - 3 (-0.33970 -0.97358 + 0.64311

+ 0.29434 - 1.19179 + 0.53292

+ 0.23193 - 0.27231)]

= (2.3023) (0.7292) (14.85630)

= 24.944

จากตาราง χ^2; $\chi^2_{21,\ .05}$ 32.7 , $\chi_c^2 < 32.7$ เราไม่ปฏิเสธ H_0 นั่นคือ $\Sigma_2 = \Sigma_2 = \ldots = \Sigma_8$ ดังนั้นเราใช้ pooled estimate สำหรับ error variance ได้ เมื่อคำนวณค่าต่าง ๆ แล้วสร้างตาราง MANOVA ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.18

MANOVA สำหรับข้อมูลจากตารางที่ 4.17

S.V.	df	SS and SP		
		$SSy^{(1)}$	$SPy^{(1)}y^{(2)}$	$SSy^{(2)}$
Speeds	1	1.2051	27.2076	614.25
Lubrication	3	1.6941	-9.8616	74.88
Speeds x Lubrication	3	0.1323	1.5846	32.23
Error	24	4.8966	-1.8898	736.40
Total	31	1.9281	17.0408	1457.76

4.15 การทดสอบอิทธิพลต่าง ๆ โดยใช้ Union Intersection Test

ในการทดสอบด้วยวิธี Union intersection test เราต้องหา E^{-1}

ตัวอย่างที่ 4.9 จากตารางที่ 4.18

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 0.204425 & 0.000524 \\ 0.000524 & 0.001359 \end{bmatrix}$$

$$\text{โดยที่ } E = \begin{bmatrix} 4.8966 & -1.8898 \\ -1.8898 & 736.40 \end{bmatrix}$$

การทดสอบ H_0 : ไม่มี interaction effect

สำหรับการทดสอบนี้เราต้องหา **Characteristic roots** ของ HE^{-1} โดยที่

$$HE^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1323 & 1.5846 \\ 1.5846 & 32.2300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.204425 & 0.000524 \\ 0.000524 & 0.001359 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.027876 & 0.340820 \\ 0.340820 & 0.044631 \end{bmatrix}$$

$\because p = 2 < \nu_H = 3$ เราหา $tr(HE^{-1}) = 0.072507$

และ $|HE^{-1}| = 0.000486$

ดังนั้นรากของสมการต่อไปนี้ จะเป็น Characteristic roots ของ HE^{-1}

$$\lambda^2 - 0.072507x + 0.000486 = 0$$

$$\text{รากทั้ง 2 คือ} \quad \frac{0.072507 \pm \sqrt{0.005257 - 0.001944}}{2}$$

$$= \frac{0.072507 \pm \sqrt{0.003313}}{2}$$

$$\lambda_1 = 0.065033, \quad \lambda_2 = 0.007474$$

$$Char._{max}(HE^{-1}) = 0.065033$$

$$\theta_c = \frac{0.065033}{1.065033} = 0.0610$$

$$s = \min(\nu_H, p) = \min(3,2) = 2$$

$$m = \frac{|\nu_H - p| - 1}{2} = \frac{|3-2| - 1}{2} = 0$$

$$n = \frac{\nu_E - p - 1}{2} = \frac{24 - 2 - 1}{2} = 10.5$$

จาก Chart ใน A2 $\theta_{(2,0,10.5),\ .05} = .363 > 0.0610$ เราไม่ปฏิเสธ H_0 นั่นคือไม่มีอิทธิพลร่วมระหว่างความเร็วของการหมุน **(Speed)** และการหล่อลื่น **(Lubrication)**

การทดสอบ H_0: **ไม่มีอิทธิพลหลัก** (lubrication)

$$HE^{-1} = \begin{bmatrix} 1.6941 & -9.8616 \\ -9.8616 & 74.8800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.204425 & 0.000524 \\ 0.000524 & 0.001359 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.341149 & -0.012514 \\ -1.976720 & 0.096594 \end{bmatrix}$$

$$tr(\mathbf{HE}^{-1}) = 0.437743 \quad , \quad |HE^{-1}| = 0.008216$$

$$\lambda^2 - 0.431743\lambda + 0.008216 = 0$$

รากของสมการคือ $\dfrac{0.437743 \pm \sqrt{0.191619 - 0.032864}}{2}$

$$= \frac{0.437743 \pm 0.398441}{2}$$

$$\lambda_1 = 0.418092 \quad , \quad \lambda_2 = 0.019651$$

$$\theta_c = \frac{0.418092}{1.418092} = .2948$$

$$s = 2,\ m = 0,\ n = 10.5,\ \alpha = .05, \quad \theta_{(2,0,10.5),\ .05} = .363$$

เราไม่ปฏิเสธ H_0 นั่นคือ การหล่อลื่น ไม่มีอิทธิพลต่ออาการบิดของแท่งเหล็ก

การทดสอบ H_0: ไม่มีอิทธิพลหลัก (speed)

$$\mathbf{HE^{-1}} = \begin{bmatrix} 1.2051 & 27.2076 \\ 27.2076 & 614.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.204425 & 0.000524 \\ 0.000524 & 0.001359 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.260609 & 0.037607 \\ 5.883781 & 0.849022 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1.109631 = \lambda$$

$$\lambda_2 = 0$$

$\therefore \nu_H = 1 \quad s = 1$ เราไม่มี chart เพื่อเปิดค่า critical value แต่เราใช้ F-test ในการทดสอบได้ โดยคำนวณ

$$\boxed{f_c = \frac{2(n+1)}{2(m+1)}\lambda \text{ เป็นค่าของ } F_{(2m+2),\,(2n+2)}}$$

$$f_c = [\frac{23}{2}]\ (1.109631) = 12.76075$$

$f_{(2,\,23),\,.05} = 3.42$ ดังนั้นเราปฏิเสธ H_0 นั่นคือ ความเร็วของการหมุนมีอิทธิพลต่ออาการบิดของแท่งเหล็ก

แบบฝึกหัดที่ 4 (ตอนที่ 2)

4.3 ในการทดลองทางโภชนาการ หน่วยการทดลองคือเด็กหญิงวัยรุ่นได้เตรียมอาหาร 4 กลุ่ม ซึ่งมีสารอาหารดังนี้

กลุ่มที่ 1 Basal plus ammonium citrate (A_1C_0)
กลุ่มที่ 2 Basal plus amino acids (A_2 C_1)
กลุ่มที่ 3 Basal plus ammonium citrate plus calcium (A_1C_1)
กลุ่มที่ 4 Basal plus ammonium acids plus calcium (A_2C_1)

ได้ให้อาหารแต่ละกลุ่มแก่เด็กหญิง 4 คน หลังจากนั้น 6 สัปดาห์ก็ได้ทำการตรวจปัสสาวะเพื่อวัดระดับของสิ่งต่าง ๆ ดังนี้

$y^{(1)}$ = ปริมาณ Zinc
$y^{(2)}$ = ปริมาณ Manganese
$y^{(3)}$ = ปริมาณ Copper

จงทดสอบสมมติฐานเพื่อดูว่าอาหารทั้ง 4 กลุ่มมีความแตกต่างกันหรือไม่ โดยใช้ข้อมูลจากตารางต่อไปนี้

	A_1			A_2		
	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$
C_0	.274	.013	.028	.465	.011	.029
	.213	.011	.028	,310	.014	,024
	.178	.011	,024	,213	.013	.025
	.238	.008	.025	,233	.009	,024
C_1	,349	.012	,026	,291	.012	.037
	.116	.011	.028	.166	,006	.025
	.191	,009	.023	,230	.008	.021
	.144	.010	,026	.363	.014	,027

4.4 ในการทดลองเพื่อดูลักษณะของเปลือกแอปเปิลภายใต้การบรรจุในที่บรรจุขนาดต่าง ๆ ชนิดต่าง ๆ ของแอปเปิลคือ v , = Golden Delicious
V_2 = Red Delicious
V_3 = Winesap

ขนาดของภาชนะที่บรรจุคือ $A_1 = 1764 \text{ in}^2 \times 10^{-6}$

$A_2 = 1666 \text{ in}^2 \times 10^{-6}$

$A_3 = 1862 \text{ in}^2 \times 10^{-6}$

$A_4 = 1966 \text{ in}^2 \times 10^{-6}$

ค่าสังเกตคือ $y^{(1)}$ = force at faiiure

$y^{(2)}$ = tensile strength

จงทดสอบว่ามีความแตกต่างระหว่างสายพันธุ์ หรือระหว่างขนาดที่บรรจุหรือไม่

	V_1		V_2		V_3	
	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
A_1	.230	130	.460	263	.500	233
	.180	102	.300	172	.440	204
	.280	159	.420	238	.420	195
	.250	142	.345	196	.380	176
A_2	.255	153	.410	232	.645	206
	.215	129	.365	207	.305	97
	.240	144	.450	255	.460	147
	.265	159	.380	215	.325	104
A_3	.200	107	.360	184	.380	138
	.185	99	.360	184	.400	146
	.220	118	.480	245	.485	177
	.225	121	.325	166	.420	153
A_4	.225	135	.360	204	.330	112
	.200	120	.455	258	.380	129
	.220	132	.440	249	.355	121
	.200	120	.435	246	.360	122

4.5* จงสร้าง MANOVA table สำหรับข้อมูลชุดนี้

ใน 2×3 factorial design 4 units / Cell

หน่วยทดลองคือ นักเรียน 1 คน

factor A = sex A_1 = Male

A_2 = Female

factor B = Grade B_1 = ประถมปีที่ 3

B_2 = ประถมปีที่ 4

B_3 = ประถมปีที่ 5

สำหรับนักเรียนแต่ละคนวัด $y^{(1)}$ = Reading score

$y^{(2)}$ = Spelling score

$y^{(3)}$ = Mathematic score

	B_1			B_2			B_3		
	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$	$y^{(3)}$
A_1	39	43	54	35	41	63	52	49	70
	43	42	39	53	49	57	55	58	58
	48	45	46	40	37	67	59	43	70
	47	44	54	51	49	65	61	86	60
A_2	49	49	40	51	49	68	42	46	64
	43	41	58	46	41	68	66	49	62
	38	43	62	48	40	61	49	49	78
	43	66	47	42	37	63	63	54	60

$y_{\ldots}^{(2)} = 1169$, $y_{\ldots}^{(2)} = 1150$, $y_{\ldots}^{(3)} = 1434$