บทที่ 1

ขีดจำกัดของการแจกแจง

Limiting Distribution

1.1 บทนำ

ตัวแปรเชิงสุ่ม (Random Variable)[1] ที่เราศึกษากันอยู่นั้น เราจะสามารถจัดแบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม คือ

กลุ่มที่ 1 เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดที่ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น (probability density function = pdf.) นั้น ขึ้นอยู่กับค่า n ซึ่งเป็นขนาดตัวอย่าง (sample size) ตัวอย่างของตัวแปรเชิงสุ่มชนิดนี้คือ

1. สุ่มตัวอย่างขนาด n คือ $X_1, X_2, ..., X_n$ มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเบอร์ไนลี่ ซึ่งมีพารามิเตอร์ p ดังนั้น ตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบทวินาม (binomial distribution) ซึ่งมีพารามิเตอร์ p

ดังนั้น $Y \sim \text{Binomial}\ (p)$

$$f(y; p) = \binom{n}{p} p^y(1-p)^{n-y}\ ;\ 0 < p < 1$$

$$y = 0, 1, \ldots, n$$

2. สุ่มตัวอย่างขนาด n คือ $X_1, X_2, ..., X_n$ มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยของประชากร คือ μ และความแปรปรวนของประชากรคือ σ^2 ดังนั้น ตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = \frac{\Sigma X_i}{n} = \overline{X}$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยของประชากร คือ μ และความแปรปรวนของประชากร คือ $\frac{\sigma^2}{n}$ หรือจะได้ผลว่า

$$Y \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

ดังนั้น $f(y; \mu, \frac{\sigma^2}{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} n.\exp \frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\ ; \infty < \bar{x} < \infty\ ;\ -\infty < \mu < \infty ; \sigma^2 > 0$

---

[1] ตัวแปรเชิงสุ่ม คือ เซ็ทที่ครอบคลุมถึงตัวสถิติ (Statistics) ด้วย

3. สุ่มตัวอย่างขนาด n คือ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรเป็น μ และ σ^2 ตาม ลำดับ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ จะมีการแจกแจงแบบไคสแคว์ ซึ่งมีพารามิเตอร์เป็น $(n-1)$

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \underline{\chi}^2(n-1)$$

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{(n-1)/2}} (y)^{\frac{(n-1)^{-1}}{2}} e^{-y/2}$$

โดย $y = \frac{nS^2}{\sigma^2}; y > 0$

เราจะสามารถพิสูจน์ว่า เมื่อสุ่มตัวอย่างขนาด n มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของประชากรเป็น μ และ σ^2 แล้ว ตัวสถิติ $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2(n-1)$ ดังนี้คือ

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X}+\overline{X}-\mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2 \\
&\quad + 2\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu)
\end{aligned}$$

แต่เนื่องจากว่า

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu) &= 2(\overline{X}-\mu) \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2$

เพราะว่า

1. $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2(n)$

2. $\overline{X}$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ $N(\mu, \sigma^2)$ ดังนั้น ตัวสถิติ $\sqrt{n}\, \frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$ จึงมีการแจกแจงแบบ $N(0, 1)$ และตัวสถิติ $n\, \frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$ จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2(1)$

3. เนื่องจาก $\overline{X}$ และ S^2 จะเป็นอิสระกัน ดังนั้นจะส่งผลให้ $n\, \frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$ และ $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ เป็นอิสระต่อกันด้วย

$$M_Z(t) = E\left[e^{tz}\right]$$

โดยที่ $Z = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$

$$M_Z(t) = E\left[\exp t \sum_{i}^{n} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right.$$

$$= E\left[\exp\left\{t\left(n\, \frac{(\bar{x}-x)^2}{\sigma^2} + \frac{nS^2}{\sigma^2}\right)\right\}\right]$$

$$= E\left[\exp\left(t.n\, \frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\right) . \exp\left(t\, \frac{nS^2}{\sigma^2}\right)\right]$$

เพราะว่า $M_Z(t) = (1-2t)^{-n/2}$ ดังนั้น $Z \sim \chi^2_{(n)}$

ดังนั้น $(1-2t)^{-n/2} = (1-2t)^{-1/2}\, E\left[e^{t(nS^2/\sigma^2)}\right];\ t < \frac{1}{2}$

จึงสรุปได้ว่า $E\left[e^{t(nS^2/j^2)}\right] = (1-2t)^{-(n-1)/2};\ t < \frac{1}{2}$

ซึ่ง $(1-2t)^{(n-1)/2}$ ก็คือ Moment - generating function ของการแจกแจงแบบไคสแคว์ซึ่งมีองศาแห่งความเป็นอิสระ (degree of freedom) เป็น (n − 1) ดังนั้น ตัวสถิติ $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ จึงมีการแจกแจงแบบ $\chi^2(n-1)$

4. สุ่มตัวอย่าง $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ uniform (0,1)

นั่นคือ

$$f(x) = 1 \quad ; 0 < x < 1$$
$$= 0 \quad \text{นอกเหนือจากนี้}$$

ถ้าเราแปลงค่าจาก $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ไปสู่ตัวแปรเชิงสุ่ม $Y = \overline{X}$

จะได้ว่า

$$M_{\overline{X}}(t) = M_{\sum\limits_{i}^{n} X_{i/n}}(t)$$

$\because$ X_i และ X_j $(i=1,2,\ldots,n \ ; j=1,2,\ldots,n$ และ $i \neq j)$ มีคุณสมบัติ IID [1]

$$M_{\overline{X}}(t) = [\, M_{X_{i/n}}(t) \,]^n$$

$$M_{\overline{X}}(t) = [\, M_{X_i}(t/n) \,]^n$$

$\because$ X มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (0, 1)

ดังนั้น

$$M_X(t) = E\,[\, e^{tx} \,]$$

$$= \int_0^1 e^{tx} \, . \; dx$$

$$= \frac{e^{tx}}{t} \Big|_0^1$$

---

[1] IID = Identically Independent Distributed ถ้า X_i และ X_j มีคุณสมบัติเป็น IID หมายความว่า

1. X_i และ X_j เป็นอิสระต่อกัน

2. X_i และ X_j มาจากประชากรเดียวกัน นั่นย่อมหมายความว่า ทั้ง X_i และ X_j มี pdf. และ mgf. แบบเดียวกัน

$$= \left(\frac{e^{t}-1}{t} \right)$$

$$M_{X}(t/n) = \left(\frac{e^{t/n}-1}{t/n} \right)$$

$$\therefore \quad M_{\bar{X}}(t) = \left(\frac{e^{t/n}-1}{t/n} \right)^{n}$$

เมื่อ $\overline{X}$ มี Moment generating function ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า n ดังนั้น pdf. ของ $\overline{X}$ จะขึ้นอยู่กับค่า n ด้วย

กลุ่มที่ 2. เป็นตัวแปรสุ่มชนิดที่ไม่เกี่ยวข้องกับค่า n คำว่า ไม่เกี่ยวข้องกับค่า n หมายความว่า pdf. ของตัวแปรเชิงสุ่มนั้นไม่มีค่า n ไปปะปนอยู่ หรืออาจจะกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่า distribution function ของตัวแปรสุ่มนั้นไม่เกี่ยวข้องกับค่า n ด้วย ทั้งนี้เพราะ distribution function ก็คือ ค่าสะสมของ pdf. นั่นเอง

ความหมายของ distribution function ก็คือ

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_{-x}^{x} f(x)\,dx & /1 \\ \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) & /2 \end{cases}$$

ตัวอย่างของตัวแปรเชิงสุ่มชนิดนี้ ก็คือ

1. $X \sim$ Normal (μ, σ^2)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \; ; -\infty < x < \infty, \; -\infty < \mu < \infty \; ; \sigma^2 > 0$$

---

[1] เมื่อ x เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continuous Type)

[2] เมื่อ x เป็นตัวแปรสุ่มชนิดตัดตอน (Discrete Type)

2. Y ~ gamma (α, β)

$$f(y) \quad = \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^2} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} ; 0 < x < \infty$$

ปัญหาที่เกิดขึ้นจากการที่ตัวแปรเชิงสุ่มเกี่ยวข้องกับค่า n ที่ตามมาก็คือ ขนาดของค่า n ที่ต่าง ๆ กันนี้จะมีผลต่อการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มหรือไม่ และในกรณีที่ค่าของ n เข้าสู่อนันต์ (infinity)/1 นั้นจะยังผลให้ฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนั้นยังคงมีหรือไม่ และถ้ายังคงมีอยู่ จะมีการเปลี่ยนแปลงฟังก์ชันการแจกแจงนั้นจากเดิมหรือไม่

ในกรณีที่ตัวแปรเชิงสุ่ม ที่ศึกษานั้นขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่าง n เมื่อศึกษา n→∞ แล้ว ตัวแปรเชิงสุ่มนั้นสามารถหาฟังก์ชั่นการแจกแจงได้แล้ว/2 นั้นหมายความว่าตัวแปรเชิงสุ่มนั้นมีขีดจำกัดในการแจกแจง (limiting distribution)

/1 n→∞ จะมีความหมายอยู่ 2 ประการ คือ

ประการที่ 1. ในกรณีที่ขนาดของประชากรเป็น finite population แล้ว สัญลักษณ์ n→∞ ก็หมายถึง n→N นั่นเอง

ประการที่ 2. ในกรณีที่ขนาดของประชากรเป็น infinite population แล้ว n→∞ ก็หมายถึงค่าของขนาดตัวอย่างมีค่ามากเข้าสู่จำนวนอนันต์นั่นเอง

/2 ฟังก์ชั่นการแจกแจง (distribution function) หมายถึงฟังก์ชันการแจกแจงทางสถิติ ซึ่งจะมีคุณสมบัติดังนี้คือ

$$F(\overline{x}) \quad = \quad Pr(X \leqslant x)$$

ในกรณีที่ x เป็นตัวแปรสุ่มชนิดตัดตอน

$$F(x) \quad = \quad \sum_{w \leqslant x} f(w)$$

และในกรณีที่ x เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

$$F(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{x} f(w)\, dw$$

ข้อสังเกตุ เมื่อตัวแปร X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดต่อเนื่องจะมีคุณลักษณะที่น่าสนใจเพิ่มมากกว่าตัวแปรเชิงสุ่มชนิดตัดตอน ดังนี้คือ

1) F(x) จะเป็นฟังก์ชันค่าต่อเนื่องกันตลอด

2) $F'(x) = f(x)$

1.2 ขีดจำกัดของการแจกแจง (Limiting Distribution)

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วดังลักษณะของตัวแปรเชิงสุ่ม ที่เกี่ยวเนื่องกัน ค่า n สาเหตุที่ต้องศึกษาโดยใช้ฟังก์ชั่น

การแจกแจง F (x) แทนที่จะศึกษาจาก pdf. f (x) ก็เพราะว่าการหาคำตอบโดยใช้ F (x) ก็ย่อมจะหมายถึงได้ส่งผลถึง f (x) ด้วย ทั้งนี้เพราะ F (x) และ f (x) มีความเกี่ยวพันอย่างยิ่ง (F (x) = ผลสะสมของ f (x) นั่นเอง) ดังนั้นเราจึงเสาะหาคำตอบในเรื่องการหาขีดจำกัดการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มจาก F (x) เพราะว่าทำได้สะดวกกว่าและหาข้อยุติได้ง่ายกว่า

ก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีการหาขีดจำกัดของการแจกแจง จะขอตกลงถึงสัญลักษณ์ที่จะใช้กันในเรื่องนี้เสียก่อนเพราะจำเป็นจะต้องมีเรื่องของขนาดตัวอย่าง n เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

สัญลักษณ์

1. $X_1, X_2, \ldots, X_n$	คือชุดของตัวแปรสุ่มซึ่งมีขนาด n
2. X_n	คือตัวแปรเชิงสุ่ม X ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีฟังก์ชันการแจกแจงเกี่ยวเนื่องกับค่า n
3. $F_n(x)$	คือ ฟังก์ชั่นการแจกแจงตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งเกี่ยวเนื่องกับค่า n
4. $F(x)$	คือฟังก์ชั่นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งไม่เกี่ยวเนื่องกับค่า n
4. $M_{X_n}(t)$ หรือ $M_X(t; n)$	คือ moment generating function ของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งเกี่ยวเนื่องกับค่า n
6. $M_X(t)$	คือ moment gernerating function ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ซึ่งไม่เกี่ยวเนื่องกับค่า n

หมายเหตุ เนื่องจากผู้อ่านอาจจะสับสนในบทนี้ ในเรื่องที่เกี่ยวกับสัญลักษณ์ที่ใช้เมื่อบ่งว่า ตัวแปรเชิงสุ่มนั้นเกี่ยวเนื่องกับค่าของ n ดังนั้นจึงขอให้แยกแยะและทำความเข้าใจให้ดี โดยเฉพาะตัวสถิติอันดับที่ n (n^{th} order statistie) Yn ซึ่งสัญลักษณ์ ตัว n ที่ใช้นั้น จะให้ความหมายถึง 2 ประการคือ เป็นทั้งตัวสถิติตัวที่ n และขณะเดียวกัน ก็หมายความว่า ตัวแปรเชิงสุ่มนั้นขึ้นอยู่กับค่า n ด้วย ในเรื่องของการหาขีดจำกัดของการแจกแจงจะแยกได้เป็น 2 วิธีด้วยกัน คือ

วิธีที่ 1 หาขีดจำกัดการแจกแจงโดยใช้ฟังก์ชั่นการแจกแจง $F_n(x)$

วิธีที่ 2 หาขีดจำกัดการแจกแจงโดยใช้ moment generation function M(t, n)

การใช้วิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 จะให้คำตอบว่า ตัวแปรเชิงสุ่ม ที่กำลังศึกษานั้นมีขีดจำกัดของการแจกแจงหรือไม่ เมื่อขนาดตัวอย่างเข้าสู่ขนาดอนันต์ แต่จะมีผลแตกต่างกันตรงที่ วิธีที่ 2 จะให้คำตอบนอกเหนือจากที่ว่า ตัวแปรเชิงสุ่มนั้นมีขีดจำกัดการแจกแจงหรือไม่ แล้วยังให้คำตอบเพิ่มเติมอีกว่า ตัวแปรเชิงสุ่มนั้นเมื่อเราให้ขนาดตัวอย่างเข้าสู่อนันต์แล้ว การแจกแจงตัวแปรเชิงสุ่มนั้นจะเปลี่ยนแปลงไปเป็นอย่างไร ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ Yn เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชนิดทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ p ในเมื่อเราขยายขนาดตัวอย่างสู่อนันต์แล้ว เราจะได้ว่า ตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n นั้นมีขีดจำกัดการแจกแจงเป็นพัวซอง ที่มีพารามิเตอร์คือ λ แต่ถึงแม้ว่า วิธีที่ 2 จะดีกว่าในแง่ที่ให้ประโยชน์มากกว่า แต่เราก็ไม่สามารถที่จะใช้วิธีการของ moment generating functionf ได้กับทุกตัวแปรเชิงสุ่ม ที่จะศึกษาได้ ทั้งนี้เพราะถ้า moment generating function นั้นไม่เข้ารูปแบบการแจกแจงแบบที่รู้จักเช่น Normal, Beta,-Gamma, Binomial, Poisson เป็นต้น เราก็จะตอบคำถามไม่ได้ว่า ตัวแปรเชิงสุ่มนั้นมีขีดจำกัดของการแจกแจงหรือไม่ นั่นประการหนึ่ง อีกประการหนึ่งตัวแปรเชิงสุ่มที่ศึกษาบางตัวก็เป็นรูปที่ซับซ้อน ยากแก่การใช้ moment generating function ได้จากเหตุผลที่กล่าวมานี้ จึงเป็นข้อจำกัดที่ทำให้เราไม่สามารถจะใช้วิธีของ moment generating function ได้กับทุกตัวแปรเชิงสุ่มได้

1.2.1 การหาขีดจำกัดการแจกแจงโดยใช้ฟังก์ชันของการแจกแจง (Limiting Distribution Function)

นิยาม กำหนดให้ Y_n เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชั่นการแจกแจง (Distribution Function) เป็น $F_n(y)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นที่ขึ้นอยู่กับจำนวนค่าสังเกตจากตัวอย่าง ถ้า F(y) เป็นฟังก์ชั่นการแจกแจงของตัวแปร Y และถ้าหากได้ว่า $\lim_{n \to \infty} F_n(y) = F(y)$ สำหรับทุกค่าของ n ซึ่งทำให้ F(y) เป็นฟังก์ชั่นที่ต่อเนื่องแล้วจะได้ว่า ตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n มีขีดจำกัดของการแจกแจง (Limiting Distribution) โดยที่มีฟังก์ชั่นของการแจกแจง คือ F(y)

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชุดหนึ่งที่มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเป็น μ, σ^2 ตามลำดับ จงหาขีดจำกัดการแจกแจงของค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง $\bar{X}$ (Sample Mean)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

$$M_x(t) = \exp(\mu t + \frac{1\sigma^2}{2} t^2)$$

$$M_{\bar{X}}(t) = M_{\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}(t)$$

เนื่องจาก X_i, X_j มีลักษณะเป็น Identically Independent Distributed

$$\begin{aligned} M_{\bar{X}}(t) &= M_{\Sigma X_i/n}(t) \\ &= [M_{X_i}(t/n)]^n \\ &= \exp(\mu(t/n) + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (t/n)^2)^n \\ &= \exp(\mu t + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n} t^2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{X}_n \sim N(n, \sigma^2/n)$

$$f_n(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp - n(\bar{x}_n - \mu)^2/2\sigma^2 \; ; \; -\infty < \bar{x}_n < \infty$$

$$F_n(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}_n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(-n(\bar{x}_n - \mu)/2\sigma) d\bar{x}_n$$

ให้ $u = \sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu)/\sigma$

$$u^2 = n((\bar{x}_n - \mu)/\sigma)^2$$

$$du = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} d\bar{x}_n \rightarrow d\bar{x}_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} du$$

$$\because \quad \bar{x}_n = -\infty \quad u = -\infty$$

และ $\bar{x}_n = \bar{x}_n \quad u = \sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu)/\sigma$

$$\Rightarrow F_n(\bar{x}_n) = \int_{-\infty}^{\bar{x}_n} (-n(\bar{x}_n - \mu)/\ \sigma)\, d\bar{x}_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma}} (\exp - (u^2/2)).\theta/\sqrt{n}\, du$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty} F_n(\bar{x}_n) = \lim_{n\rightarrow\infty} \int_{-\infty}^{n(\bar{x}_n - \mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-u^2/2} du$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty} F_n(\bar{x}_n) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2)\, du & ; \bar{x} < \mu \\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2)\, du & ; \bar{x} = \mu \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2)\, du & ; \bar{x} > \mu \end{cases}$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty} F_n(\bar{x}_n) = \begin{cases} 0 & \bar{x} < \mu \\ 1/2 & \bar{x} = \mu \\ 1 & \bar{x} > \mu \end{cases}$$

การหาค่า F(x) เพื่อมาเป็นค่าประมาณของ $\lim_{n\rightarrow\infty} F_n(x)$ จะต้องพิจารณา F(x) ที่มีความต่อเนื่องในช่วงของ $\bar{x}$ เท่านั้น ดังนั้นจากปัญหาที่ยกมานี้เราจึงสร้าง

$$F(\bar{x}) = 0 \quad ; \quad \bar{x} < \mu$$

$$F(\bar{x}) = 1 \quad ; \quad \bar{x} \geqslant \mu$$

โดยที่ $F(\bar{x})$ เป็นฟังก์ชั่นการแจกแจงที่มีความต่อเนื่องในช่วงของ $\bar{x}$ ที่เรากำหนด

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} F_n(\bar{x})$ **มีค่าลู่เข้า (ประมาณ)** $F(\bar{x})$ **จึงได้ว่า** $\bar{X}_n$ **มีขีดการแจกแจง โดยที่มีฟังก์ชันของการแจกแจง (Limiting Distribution) เป็น** $F(x)$

ข้อสังเกตุ ในปัญหานี้ $\lim_{n\to\infty} F_n(\bar{x}) = 1/2 \; ; \; \bar{x} = \mu$

ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} F_n(\bar{x}) \neq F(\bar{x})$

แต่ $F(\bar{x})$ ไม่มีความต่อเนื่องที่ $\bar{x} = 0$ [1/]

ดังนั้นจึงกำหนดให้ฟังก์ชัน

$$\left.\begin{aligned} F(\bar{x}) &= 0 \; ; \; \bar{x} < \mu \\ &= 1 \; ; \; \bar{x} \geq \mu \end{aligned}\right\} \text{ข้อจำกัดของ } \lim_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n)$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X_n มี

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 \; ; \; x = 2+1/n \\ &= 0 \; ; \; \text{elsewhere} \end{aligned}$$

ให้หาขีดจำกัดของการกระจายของตัวแปร X_n

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad f_n(x) &= 1 \; ; \; x = 2+1/n \\ \text{ดังนั้น} \quad F_n(x) &= 0 \; ; \; x < 2+1/n \\ &= 1 \; ; \; x \geq 2+1/n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_n(x) &= 0 \; ; \; x < 2 \\ &= 1 \; ; \; x \geq 2 \\ \text{กำหนดให้ } F(x) &= 0 \; ; \; x < 2 \\ &= 1 \; ; \; x \geq 2 \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} F_n(\bar{x}) = F(x)$ สำหรับทุกช่วงที่ต่อเนื่องของ $F(x)$

ดังนั้น X_n จะเป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีขีดจำกัดของการแจกแจง โดยมีฟังก์ชั่นของการแจกแจงเป็น $F(x)$

[1/] ในศึกษาถึงลักษณะของฟังก์ชั่นของการแจกแจง ในกรณีของตัวแปรชนิดต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ Y_n เป็นตัวสถิติอันดับที่ n ของกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมา จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ Uniform ในช่วง $(0, \theta)$ และให้ $Z_n = n(\theta - Y_n)$ เป็นตัวแปรตัวใหม่ ให้หาขีดจำกัดการแจกแจงของตัวแปร Z_n ว่ามีหรือไม่

$$f(x;\theta) = 1/\theta \; ; 0<x<\theta$$

$$g_n(y_n) = n(F(y_n))^{n-1} f(y_n)$$

$$= n \left[\int_0^{y_n} \frac{1}{\theta} dy_n \right]^{n-1} \frac{1}{\theta}$$

$$= n\, y_n^{n-1}/\theta^n \;\; ; \;\; 0<y_n<\theta$$

$$Z_n = n(\theta - Y_n)$$

$$Y_n = \theta - Z_n/n \;\; ; \;\; 0<z_n<n\theta$$

$$\frac{dy_n}{dz_n} = -1/n \text{ ดังนั้น } \left|\frac{dy_n}{dz_n}\right| = 1/n$$

transform form Y_n to Z_n

$$g_n(z) = (n/\theta^n)(\theta - z/n)^{n-1} \cdot 1/n$$

$$= (1/\theta^n)(\theta - z/n)^{n-1} \;\; ; \;\; 0<z_n<n\theta$$

$$G_n(z) = \int_0^{t} (1 - z/n\theta)^{n-1} \, dz_n/\theta$$

$$G_n(z) = 1 - (1 - z/n\theta)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = \lim_{n\to\infty} (1 - (1 - z/n\theta)^n)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - z/n\theta)^n$$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} (1 - z/n\theta)^n = e^{-z/\theta}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} G(z) = 1-e^{-z/\theta} \quad ; \quad -\infty<z<\infty$

ซึ่งแยกรายละเอียดเป็น

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} G_n(z) &= 0 && ; \quad z<0 \\ &= 1-e^{-z/\theta} && ; \quad z\geqslant 0 \end{aligned}$$

. G(z) เป็นฟังก์ชั่นการแจกแจงที่มีความต่อเนื่องในทุกช่วงของ z และ $\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z)$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า Z_n มีขีดจำกัดของการแจกแจงโดยที่มีฟังก์ชั่นของการแจกแจงเป็น G(z)

หมายเหตุ การที่ฟังก์ชั่นของการแจกแจงมีลักษณะดังนี้

$$\begin{aligned} G(y) &= 0 && ; \quad y<a \\ &= 1 && ; \quad y\geqslant a \end{aligned}$$

ให้สังเกตุว่าฟังก์ชั่นของการแจกแจงจะมีค่าเป็น 1 ณ ที่ค่าของ y ที่เริ่มจากจุดใดจุดหนึ่ง เราจะเรียกฟังก์ชั่นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n นั้นว่า degenerate ณ ที่จุด $Y = a$

ให้พิจารณาตัวอย่างที่ 1 จะพบว่า ฟังก์ชั่นของการแจกแจง degenerate at $X_n = \mu$ ในตัวอย่าง 2 ก็เช่นกันคือ Limiting Distribution (X_n) degenerate at 2 ส่วนในตัวอย่างที่ 3 ปรากฏว่าขีดจำกัดของการแจกแจงที่หาได้จะไม่ degenerate ณ จุดใด ๆ

1.3 การหาขีดจำกัดการแจกแจงด้วยวิธีการของโมเมนต์

(Limiting Moment Generating Function)

ในเรื่องของการหาขีดจำกัดการแจกแจงนั้น เราสามารถจะหาได้อีกวิธีหนึ่ง คือการใช้ moment generating function ดังที่ได้กล่าวมาแล้วถึงความสัมพันธ์ระหว่าง moment generating function กับ distribution function เหตุที่เราสามารถหาคำตอบการหาขีดจำกัดของการแจกแจงโดยการใช้วิธีการของโมเมนต์ เพราะว่า

พิจารณา $M_X(t,n) = E\left[e^{tX}\right]$

สมมติในกรณีของตัวแบ่รเชิงสุ่ม X ชนิดตัวแปรต่อเนื่อง
ดังนั้น pdf ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ก็คือ f(x)

$$\therefore \boxed{M_X(t,n) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . f(x)\,dx} \qquad ....(1)$$

เนื่องจากว่า

$$\boxed{F_n(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{X} f(x)\,dx} \qquad ....(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) เราจะสามารถสรุปได้ว่า ถ้าหากว่า $M_X(t,n)$ มีค่าปรากฏแล้ว จะยังผลให้ $F_n(x)$ มีค่าปรากฏด้วย นั่นย่อมหมายความว่า

$$\lim_{n\to\infty} M_X(t,n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

มีค่าปรากฏก็จะยังผลให้

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

มีค่าปรากฏด้วยเช่นกัน

จากเหตุผลที่แสดงมาให้ดู จึงทำให้สามารถหาขีดจำกัดของการแจกแจงได้ด้วยโดยอาศัยวิธีการของโมเมนต์

สรุปแล้วทางหนึ่งนอกเหนือจากที่กล่าวมาแล้วในเรื่องการหาขีดจำกัดของการกระจายโดยใช้ฟังก์ชั่นการแจกแจงที่สร้างได้เข้าช่วยในการสรุปผลที่ได้แล้ว เราก็อาจใช้วิธีการทาง mgf ให้เป็นประโยชน์ได้ นอกจากนี้ยังให้ผลที่ดีกว่าการใช้ฟังก์ชั่นของการแจกแจง กล่าวคือ

1. การใช้ฟังก์ชั่นของการแจกแจง $F_n(x)$ นั้น เราจะต้องหาค่าของฟังก์ชั่นให้ได้สำหรับทุกค่าของ n ซึ่งทำให้ยุ่งยากกว่าการใช้ $M_{x_n}(t)$ ในบางกรณี (Distribution)

2. การใช้ $M_{X_n}(t)$ เป็นวิธีการตรวจสอบตัวแปรใด ๆ ว่ามีขีดจำกัดของการแจกแจงหรือไม่นั้น เรายังได้ประโยชน์เพิ่มขึ้นอีก คือ ทำให้เราทราบว่า Limiting distribution ของตัวแปรนั้นมีลักษณะอย่างไร

ทฤษฎี กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n ซึ่งมี Distribution Function เป็น $F_n(y)$ และมี mgf. เป็น $M(t;n)$ ซึ่งมีค่าในช่วง (exist $-h<t<h$) สำหรับทุกค่าของ n ถ้าหากเราหาได้ว่ามีฟังก์ชั่นการแจกแจง $F(y)$ ซึ่งมี mgf. $= M(t)$ ซึ่งมีค่าในช่วง $(|t| \leqslant h_1 < h)$

แล้วถ้าเราได้ว่า $\lim_{n\to\infty} M(t;n) = M(t)$ เป็นจริงแล้วจะทำให้ Y_n มี Limiting Distribution Function โดยที่มีฟังก์ชั่นของการแจกแจงเป็น $F(y)$

ในตอนที่เกี่ยวข้องกับการหาขีดจำกัดของการแจกแจงโดยวิธี mgf. นี้ ต้องอาศัยค่าประมาณของ exponential เข้าช่วย

พิจารณาจากรูป $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{\phi(n)}{n}\right)^{cn}$

โดยที่ b, c เป็นค่าใด ๆ ที่ไม่เกี่ยวข้องกับค่า n

$\phi(n)$ เป็นฟังก์ชั่นของ n

ถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \phi(n) \to 0$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{\phi(n)}{n}\right)^{cn} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{cn}$$

$$= e^{bc}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^2}{n^{3/2}}\right)^{-n/2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-t^2)}{n} + \frac{(t^3/n^{1/2})}{n}\right)^{n(-/2)}$$

โดยที่

$$b = -t^2 \quad c = -1/2 \quad \phi(n) = t^3/n^{1/2}$$

ซึ่ง $\lim_{n \to \infty} \phi(n) = 0$

แล้วจะได้ว่า $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^3}{n^{3/2}}\right)^{-n/2} = e^{t^2/2}$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ตัวแปร Z_n มีการแจกแจงแบบ $\chi^2(n)$ ถ้าให้ $Y_n = (Z_n - n)/\sqrt{2n}$ จงหา Limiting Distribution ของ Y_n โดยวิธีการใช้ mgf.

$$M_{Z_n}(t;n) = 1/(1-2t)^{n/2} \; ; \; t < (1/2)$$

$$M_{Y_n}(t;n) = M_{z_n/\sqrt{2n} - n/\sqrt{2n}}(t;n)$$

$$= \exp(-\sqrt{n/2}\, t).M_{Z_n}(t/\sqrt{2n})$$

$$M_{Y_n}(t) = e^{-\sqrt{n/2}\, t}(1 - 2(t/\sqrt{2n}))^{-n/2} \; ; \; t < \sqrt{n}/2$$

$$= e^{-\sqrt{n/2}\, t}(1 - \sqrt{2/n}\, t)^{-n/2}$$

$$= (e^{-\sqrt{2/n}.t}(1 - \sqrt{2/n}.t))^{-n/2}$$

from Taylor's formula, there exists a number $U(n)$ between 0 and x such that

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(U(n)x^3}{3}$$

$$f(x) \doteq e^x \; ; \; x = \sqrt{2/n}\, t$$

$$\text{then } e^{\sqrt{2/n}.t} = 1 + \sqrt{2/n}.t + \frac{\sqrt{2/n}t)^2}{2} + \frac{e^{u(n)}\sqrt{2/n}t)^3}{3}$$

$$M_{Y_n}(t;n) = \left[\left\{ 1 + \sqrt{2/n}t + \frac{\sqrt{2/n}t)^2}{2!} + \frac{e^{u(n)}(\sqrt{2/n}t)^3}{3!} \right\} (1 - \sqrt{2n}t) \right]^{-n/2}$$

$$= \left[1 - \frac{(\sqrt{2/n}t)^2}{2n} + \left(\frac{e^{U(n)}(\sqrt{2/n}t)^3}{3!} - \frac{(\sqrt{2/n}t)^3}{2!} - \frac{e^{U(n)}(\sqrt{2/n}t)^4}{3!} \right)\right]^{-n/2}$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{n} + \left\{ \frac{e^{U(n)} \quad t^3}{3\sqrt{n}} - \frac{\frac{\sqrt{2}t^3}{\sqrt{n}} - \frac{e^{U(n)}4t^4}{3n^2}}{n} \right\}\right]^{-n/2}$$

$$b \quad = -t^2;\ c = -1/2$$

$$u(n) = \left\{ \frac{e^{U(n)}t^3}{3\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}t^3}{\sqrt{n}} - \frac{e^{U(n)}4t^4}{3n} \right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} U(n) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{e^{U(n)}t^3}{3\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}t^3}{\sqrt{n}} - \frac{e^{U(n)}4t^4}{3n} \right\}$$

$$= 0 \quad \text{since } U(n)\to 0 \text{ as } n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t;n) = e^{t^2/2} \text{ for all real value of t}$$

$$\text{since} \quad M_y(t) = e^{t^2/2} \ ;\ Y \sim \text{normal } (0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t) = M_y(t)$$

$Y_n = (Z_n - n)/\sqrt{2n}$ มี Limiting Distribution เป็นการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยของประชากรเป็น 0 และความแปรปรวน 1

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ ตัวแปรเชิงสุ่ม Z_n มีการแจกแจงแบบพัวซอง โดยมีค่าพารามิเตอร์เป็น $\mu = n$ จงแสดงว่า ตัวแปร $Y_n = (Z_n - n)/\sqrt{n}$ จะมี Limiting Distribution เป็นการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรเป็น 0, 1 ตามลำดับ

กำหนดให้ $Z_n \sim$ Poisson $(\mu = n)$

$$M_{Z_n}(t;n) = \exp(n(e^t - 1))$$

$$Y_n = (Z_n - n)/\sqrt{n}$$

$$M_{Y_n}(t;n) = M_{(Z_n/\sqrt{n}) - \sqrt{n}}(t;n)$$

$$= \exp(-\sqrt{n}t)M_{z_n}(t/\sqrt{n})$$

$$= \exp - \sqrt{n}t.\exp(n(e^{t/\sqrt{n}} - 1))$$

$$= e^{-\sqrt{n}t}e^{n(e^{t/\sqrt{n}} - 1)}$$

$$= e^{-\sqrt{n}t}e^{n(e^{t/\sqrt{n}})}$$

$$= e^{n(e^{t/\sqrt{n}} - 1) - \sqrt{nt}}$$

จาก Taylor's formula จะปรากฏ $0 < \zeta(n) < t/\sqrt{n}$

ซึ่ง $e^{t/\sqrt{n}} = 1 + t/\sqrt{n} + (1/2!)(t/\sqrt{n})^2 + (1/3!)(t/\sqrt{n})^3 \exp \zeta(n)$

$$= 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1t^2}{2n} + \frac{e^{\zeta(n)}t^3}{3!n\sqrt{n}}$$

$$n(e^{t/\sqrt{n}} - 1) - \sqrt{n}t = n\left[1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1t^2}{2n} + \frac{e^{\zeta(n)}t^3}{n\sqrt{n}} - 1\right] - \sqrt{\ }nt$$

$$= \sqrt{n}t + \frac{t^2}{2} + \frac{e^{\zeta(n)}t^3}{6\sqrt{n}} - \sqrt{n}t$$

$$M_{y_n}(t;n) = \exp\left[\frac{t^2}{2} + \frac{e^{\zeta(n)}t^3}{6\sqrt{n}}\right]$$

$$\lim_{n \to \infty} M_{y_n}(t;n) = \lim_{n \to \infty} \exp\left[\frac{t^2}{2} + \frac{e^{\zeta(n)}t^3}{6\sqrt{n}}\right]$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\zeta(n)}t^3}{6\sqrt{n}} = 0$$

$$Y \sim \text{normal }(0,1) \text{ ดังนั้น } M_Y(t) = \frac{t^2}{2}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} M_{Y_n}(t;n) = M_Y(t)$

ดังนั้น Y_n จะมีขีดจำกัดการกระจายเป็นการแจกจงแบบปกติที่มีพารามิเตอร์คือ $\mu = 0, \sigma^2 = 1$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ X_n เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า ซึ่งมีพารามิเตอร์เป็น $\alpha = n$ และ β โดยที่ β เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับค่า n ให้ $Y = \frac{X_n}{n}$ จงหาขีดจำกัดการกระจายของ Y

กำหนดให้ $X_n \sim \text{gamma }(\alpha = n, \beta)$

$$\therefore f_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^2} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \; ; \; \alpha > 0; \beta > 0$$

เมื่อ $\alpha = n$

$$\therefore \quad f_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)\beta^n} x^{n-1} e^{-x/\beta} \; ; \; n>0, \beta>0$$

$$M_X(t,n) = \frac{1}{(1-\beta t)^n} \; ; \; t < \frac{1}{\beta}$$

$$M_Y(t,n) = M_{x_n/n}(t)$$

$$= M_{X_n}(t/n)$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{\beta t}{n})^n} \; ; \; \frac{t}{n} < \frac{1}{\beta}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_Y(t,n) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\beta t}{n}^{-n})$$

$$\because \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{b}{n})^{cn} = e^{bc}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} M_Y(t,n) = e^{-\beta t(-1)}$

$$= e^{\beta t}$$

เนื่องจากว่า $e^{\beta t}$ ไม่สามารถจะจัดให้เข้ารูปแบบของโมเมนต์แบบใด ๆ ได้ เราจึงสรุปว่า $Y = \frac{X_n}{n}$ นั้น ไม่สามารถหาคำตอบในเรื่องการหาขีดจำกัดของการแจกแจงได้ด้วยวิธีการของโมเมนต์ได้

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ Z_n เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ $\chi^2(n)$ และกำหนดให้ $W_n = Z_n/n^2$ จงหาขีดจำกัดการแจกแจงของ W_n

$$\because \quad Zn \sim \chi^2(n)$$

ดังนั้น

$$M_{Z_n}(t,n) = \frac{1}{(1-2t)^n} \; ; t < \frac{1}{2}$$

$$M_{W_n}(t,n) = M_{Z_{n/n^2}}(t)$$

$$= M_{Z_n}(t/n^2)$$

$$= \frac{1}{(1-2t/n^2)^n} \; ; \; t < \frac{n}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{W_n}(t) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{2t}{n^2})^{-n}$$

$$\because \boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{b}{n} + \frac{\phi(n)}{n})^{cn} = e^{bc} \\ \\ \text{เมื่อ } \lim\limits_{n\to\infty} \phi(n) = 0 \end{array}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} M_{W_n}(t) = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{0}{n} + \frac{(2t/n)}{n})^{-n}$$

$$= e^{0}$$

$$= 1$$

ดังนั้น เราจึงไม่สามารถจะสรุปหาคำตอบของตัวแปรเชิงสุ่ม W_n ได้เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 3 ทั้งนี้เพราะโมเมนต์ของตัวแปรเชิงสุ่ม W_n เมื่อแทนค่า n เป็นอนันต์แล้ว มีค่าเป็น 1 ซึ่งไม่สามารถจะจัดให้เข้ารูปแบบของโมเมนต์รูปใด ๆ ได้

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $\bar{X}_n$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบพัวซอง ซึ่งมีพารามิเตอร์ $\mu = 1$ จงหาฟังก์ชั่นโมเมนต์ของตัวแปรเชิงสุ่ม

$$Y_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)$$

เมื่อได้แล้วให้หาขีดจำกัดการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n โดยการใช้วิธีการของโมเมนต์

$$\because \quad X \sim \text{Poisson } (\mu = 1)$$

$$\therefore \quad M_X(t) = e^{\mu(e^t - 1)}$$

$$M_X(t) = e^{(e^t - 1)}$$

$$M_{Y_n}(t) = M_{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu 7/\sigma}(t)$$

$$= M_{\frac{\sqrt{n}\bar{X}_n}{\sigma} - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}}(t)$$

$$= e^{-\sqrt{n}\mu/\sigma} M_{\frac{\sqrt{n}\bar{X}_n}{\sigma}}(t)$$

$$= e^{-\sqrt{n}\mu/\sigma} M_{\bar{X}_n}(\sqrt{n}t/\sigma$$

$$= e^{-\sqrt{n}\mu/\sigma} M_{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}}(\sqrt{n}t/\sigma)$$

$$M_{Y_n}(t) = e^{-\sqrt{n}\mu/\sigma} M_{\frac{X_1}{n}+\frac{X_2}{n}+\dots+\frac{X_n}{n}}(\sqrt{n}t/\sigma)$$

$\because$ X_i และ X_j มีคุณสมบัติ I.I.D. และ $\mu = 1, \sigma = 1$

ดังนั้น

$$M_{Y_n}(t) = e^{-\sqrt{n}t}\left[M_{\frac{X_i}{n}}(\sqrt{n}t)\right]^n$$

$$= e^{-\sqrt{n}t}\left[M_{X_i}(\sqrt{n}t/n)\right]^n$$

$$= e^{-\sqrt{n}t}\left[M_{X_i}(t/\sqrt{n})\right]^n$$

แทนค่า $M_{X_i}(t/\sqrt{n})$

$$M_{Y_n}(t) = e^{-\sqrt{n}t}\left[e^{(e^{t/\sqrt{n}}-1)}\right]^n$$

$$= e^{-\sqrt{n}t}\left[e^{n(e^{t/\sqrt{n}}-1)}\right]$$

$$= \exp\left[-\sqrt{n}t + n(e^{t/\sqrt{n}}-1)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \exp\left[-\sqrt{n}t + n(e^{t/\sqrt{n}}-1)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{(-\sqrt{n}t + n(e^{t/\sqrt{n}}-1))} \qquad \dots(1)$$

จาก Taylor Formula โดยการกระจายรอบจุด a = 0

จะได้ว่า

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!}$$

$$+ f'''(\xi)\frac{x^3}{3!} \; ; \text{ โดยที่ } 0<\xi<x$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^{\xi}x^3}{3!}$$

$$e^{t/\sqrt{n}} = 1 + (t/\sqrt{n}) + (\frac{t}{\sqrt{n}})^2 \frac{1}{2!} + e^{\xi} \frac{(t/\sqrt{n})^3}{3!}$$

โดยที่ $0<\xi<t/\sqrt{n}$

แทนค่า $e^{t/\sqrt{n}}$ ลงในสมการที่ (1) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{(-\sqrt{n}t + n(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \frac{e^{\xi}}{3!} (t^3/\sqrt{n^3}) - 1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{(-\sqrt{n}t + n + \sqrt{n}t + \frac{t^2}{2} + \frac{e^{\xi}}{3!} \frac{t^3}{\sqrt{n}} - n)}$$

$$= e^{(\frac{t^2}{2})}$$

โดยที่ $e^{t^2/2}$ คือ โมเมนต์เยนเนอเรตติ้งฟังก์ชั่นของตัวแปรเชิงสุ่ม Y ที่มีการแจกแจงแบบปกติ (0, 1)

1.4 ทฤษฎีการเข้าสู่เกณฑ์กลาง (Central Limit Theorem)

การศึกษาใด ๆ ที่อยู่ในลักษณะของผลรวมของตัวแปรเชิงสุ่ม เช่นการศึกษาถึงปริมาณน้ำประปาที่ใช้ในเขตกรุงเทพฯ ซึ่งเป็นผลรวมของการศึกษาปริมาณน้ำจากหน่วยย่อยทั้งหมด, การคำนวณน้ำหนักของสินค้าที่จะบรรทุกในเรือ ตลอดจนถึงการหาความเข้มของแสงที่เกิดจากจุดกำเนิดหลายแหล่ง ตัวอย่างที่ยกมากล่าวนี้ล้วนแต่เป็นการศึกษาผลลัพธ์ที่ได้ในลักษณะของผลรวม เพื่อจะนำไปใช้เป็นประโยชน์ในการดำเนินงานทั้งสิ้น

ปัญหาที่เกิดขึ้นในลักษณะดังกล่าวจะต้องใช้วิธีการทางสถิติเข้าช่วยเพราะว่าเราไม่สามารถที่จะศึกษาทั้งประชากรได้ อันเนื่องมาจากข้อจำกัดในเรื่องของเวลา หรือเงินทองก็ตาม ในด้านของการวิเคราะห์ผลหลังจากที่ได้สังเกตุกลุ่มตัวอย่างมาแล้ว ทฤษฎีที่จะต้องนำมาใช้ในช่วงนี้ก็คือ “ทฤษฎีการเข้าสู่เกณฑ์กลาง” เราสามารถใช้ทฤษฎีนี้มาช่วยในเรื่องของการวิเคราะห์ในเรื่องผลรวม นอกจากนี้ยังสามารถนำไปศึกษาในเรื่องของค่าเฉลี่ยได้อีกด้วย

สาระสำคัญของการนำทฤษฎีนี้ไปใช้ก็คือ

ถ้าเรากำหนด $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชุดหนึ่งที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบใด ๆ ที่มีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของประชากรเป็น μ และ σ^2 ตามลำดับ

จะได้ว่าตัวสถิติ $Y_n = \dfrac{\Sigma X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$ จะมีการแจกแจง (ประมาณ) แบบปกติ n(0,1)

ในกรณีที่จะนำไปใช้ในรูปของค่าเฉลี่ยตัวสถิติคือ

$$Z_n = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim n(0,1)$$

พิสูจน์ $$Y = \sum_{1}^{n} \frac{X_i - n\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

เนื่องจาก $M_X(t)$ มีค่าปรากฏในช่วง $-h<t<h$

และ $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$

$$M_{Y_n}(t) = M_{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)}(t)$$

$$= M_{\frac{X_1-\mu}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{X_2-\mu}{\sigma\sqrt{n}} + \ldots + \frac{X_n-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t)$$

เนื่องจาก X_i และ X_j มีคุณสมบัติเป็น IID

ดังนั้น จึงยังผลให้ $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ และ $\dfrac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ มีคุณสมบัติเป็น IID ด้วย

ดังนั้น

$$M_{Y_n}(t) = \left[M_{\frac{X_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t)\right]^n$$

$$= \left[M_{X_i-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

$\because \quad M_{X_i-\mu}(t) = e^{-\mu t} M_{X_i}(t)$

จาก Taylor formula ได้ว่า

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(\xi)\frac{x}{2!} \; ; 0<\xi<x$$

ให้ $f(x) = M_{X-\mu}(t)$ ....(1)

$$f(0) = M_{X-\mu}(0)$$

$$= e^{-0} M_X(0)$$

$$= 1.$$

$$f'(t) = e^{-\mu t} M'_X(t) + e^{-\mu t}(-\mu) M_X(t)$$

$$f'(0) = M'_X(0) - \mu M(0)$$

เนื่องจาก $M(0) = 1$ และ $M'_X(0) = \mu$

ดังนั้น

$$f'(0) = \mu - \mu$$

$$= 0$$

$$f''(t) = e^{-\mu t} M''_X(t) + e^{-\mu t}(-\mu) M'_X(t)$$

$$- \left[\mu e^{-\mu t} M'_X(t) + \mu e^{-\mu t}(-\mu) M_X(t)\right]$$

$$f''(t) = e^{-\mu t} M_X''(t) - e^{-\mu t} \mu M_X'(t)$$

$$- \mu e^{-\mu t} M_X'(t) + \mu^2 e^{-\mu t} M_X(t)$$

เพราะว่า $M_X''(0) = E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f''(0) &= 1.(\sigma^2+\mu^2) - \mu^2 - \mu.\mu + \mu^2.1 \\ &= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 - \mu^2 + \mu^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

แทนค่า ในสมการที่ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M_{X-\mu}(t) &= M_{X-\mu}(0) + M_{X-\mu}'(0)t + M_{X-\mu}''(\xi)\frac{t^2}{2!} \\ &= 1 + 0t + M_{X-\mu}''(\xi)\frac{t^2}{2!} \\ &= 1 + M_{X-\mu}''(\xi)\frac{t^2}{2} \end{aligned} \qquad \dots (2)$$

$$M_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + M_{X-\mu}''(\xi)\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 - \frac{1}{2};$$

$$-h < \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} < h \qquad \dots (3)$$

จากสมการที่ (2) เรานำมาจัดใหม่ดังนี้

$$M_{X-\mu}(t) = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \left[\frac{M_{X-\mu}''(\xi) - \sigma^2}{2}\right]t^2 \qquad \dots (4)$$

ดังนั้น จากสมการที่ (3) และ (4) จะได้ว่า

$$M_{X-\mu}(t/\sigma\sqrt{n}) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + \left[\frac{M''_{X-\mu}(\xi) - \sigma^2}{2}\right]\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2n} + \left[\frac{M''_{X-\mu}(\xi) - \sigma^2}{2\sigma^2 n}\right]t^2$$

$$\therefore M_{Y_n}(t) = \left[M_{X-\mu}(t/\sigma\sqrt{n})\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \left(\frac{M''_{X-\mu}(\xi) - \sigma^2}{2\sigma^2 n}\right)t^2\right]^n$$

เมื่อ $0<\xi<t/\sigma\sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{t^2}{2n} + \left(\frac{M''_{X-\mu}(\xi) - \sigma^2}{2\sigma^2 n}\right)t^2\right]^n$$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty}$ ของ $0<\xi<t/\sigma\sqrt{n}$

เมื่อ $0<\xi<0$ ดังนั้น $\xi = 0$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} M''_{X-\mu}(\xi) = M''_{X-\mu}(0)$$

$$= \sigma^2$$

$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{(\sigma^2 - \sigma^2)}{2\sigma^2 n}t^2\right]^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{t^2}{2n}\right]^n$$

$$= e^{t^2/2}$$

เนื่องจาก $e^{t^2/2}$ ก็คือ รูปแบบการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีพารามิเตอร์เป็น (0,1)

ทฤษฎี การเข้าสู่เกณฑ์กลาง (Central Limit Theorem)

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชุดหนึ่งที่มีขนาด n และมี pdf.$f(x;\theta)$ ถ้าหากเราทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรว่าเป็น μ และ σ^2 (หาค่าได้) จะได้ผลตามมาว่า

เมื่อขนาด n มากขึ้น $Y_n = (\Sigma X_i - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ จะเข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ n(0,1)

การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ขอยกให้เป็นแบบฝึกหัด โดยที่แนวการพิสูจน์ให้ใช้วิธีการหาขีดจำกัดของการกระจายโดยการใช้โมเมนต์เยนเนอร์เรตติ้งฟังก์ชั่น พิสูจน์ให้ได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} M(Y_n;t) = e^{t^2/2} => Y_n \sim n(0,1)$$

ประโยชน์และการนำไปใช้

1. ทฤษฎีนี้ใช้ได้กับประชากรที่มีการแจกแจงแบบใด ๆ ก็ได้ขอแต่ให้มีเงื่อนตามที่กำหนด

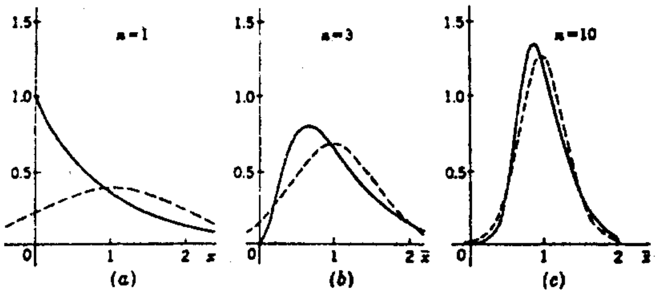
2. ทฤษฎีนี้ช่วยในการประมาณค่าในกรณีที่ขนาดตัวอย่างใหญ่เกินกว่าจะหาคำตอบได้จากการแจงเดิมของประชากร เช่น การแจกแจงแบบทวินาม, การแจกแจงแบบพัวซองเป็นต้น

ตัวอย่าง กำหนดให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ได้มาจากประชากรที่มี pdf.$f(x) = e^{-x}$; $x>0$ รูปที่แสดงต่อไปนี้ เส้นหนาคือเส้นแสดงการแจกแจงของตัวแปร X จริง ๆ ส่วนเส้นประ คือ เส้นที่แสดงถึงการใช้ทฤษฎีนี้ในการประมาณให้เป็นการแจกแจงแบบปกติ จากรูป a,b,c จะเห็นได้ว่า เมื่อขนาดของตัวอย่างเพิ่มมากขึ้น การแจกแจงจริง ๆ กับการแจงที่ประมาณขึ้นตามทฤษฎียิ่งเข้าใกล้กัน

นั่นคือเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มมากขึ้น เราสามารถที่จะประมาณค่าการแจงแบบปกติได้

การใช้ทฤษฎีนี้มิได้มีข้อจำกัดสำหรับการแจกแจงที่เป็นแบบต่อเนื่องเท่านั้น การแจกแจงที่ไม่ต่อเนื่องก็ใช้ได้ ขอแต่ให้มีการปรับข้อมูลให้เป็นแบบต่อเนื่อง

รูปแสดงถึงการแจกแจงจริง ๆ ของตัวแปรเชิงสุ่ม และการประมาณการแจกแจงด้วยทฤษฎีการเข้าสู่เกณฑ์กลาง



รูป (a) แสดงถึง กราฟการแจกแจง เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างเป็น 1

รูป (b) แสดงถึง กราฟการแจกแจง เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างเป็น 3

รูป (c) แสดงถึง กราฟการแจงแจง เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างเป็น 10

จากรูปทั้ง 3 ที่แสดงให้ดู จะปรากฏว่า ยิ่งขนาดตัวอย่าง n มีค่ายิ่งมากขึ้นเท่าใด เส้นกร๊าฟของการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มนั้น ก็จะเข้าใกล้โค้งปกติ

ตัวอย่างที่ 1

ให้ $\overline{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างขนาด 100 ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ $X^2(50)$ ให้หาค่าโดยประมาณของ $Pr(49<\overline{X}<51)$

$$X_i \sim X^2(50)$$

$$E(X) = 50 \quad V(X) = 100 \quad n = 100$$

$$Y_n = \frac{\overline{X} - 50}{10/\sqrt{100}} \sim n(0,1)$$

$$Pr(49<\overline{X}<51) = Pr\left(\frac{49-50}{1} < \frac{\overline{X}-50}{1} < \frac{51-50}{1} \right)$$

$$= \Pr(-1 < Y_n < 1)$$

$$= Z_1 - Z_{-1}$$

$$= 0.841 - 0.159$$

$$= 0.682$$

ตัวอย่างที่ 2

ให้ $Y \sim b(n, 0.55)$

จงหาค่าของ n ที่เล็กที่สุดที่คล้องกับเงื่อนไขว่า $\Pr(Y/n > 1/2)$

$$E(Y/n) = 0.55 \quad V(Y) = (0.55)(0.45)/n$$

$$\Pr(Y/n > 1/2) = \Pr\left(\frac{Y/n - 0.55}{\sqrt{\frac{0.55 \times .45}{n}}} > \frac{1/2 - 0.55}{\sqrt{\frac{0.55 \times .45}{n}}}\right)$$

$$\Pr(Y/n > 1/2) = \Pr\left(Z_{1.645} > \frac{.5 - 0.55}{\sqrt{\frac{0.55 \times 0.45}{n}}}\right) = 0.95$$

$$\frac{.5 - 0.55}{\sqrt{\frac{0.55 \times 0.45}{n}}} = 1.645$$

$$n = \frac{(1.645)^2(0.55)(0.45)}{(.05)^2}$$

$$n = 267.896$$

$$n = 268$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างขนาด 15 หน่วย จากประชากรที่มีการแจกแจงที่มี pdf. $f(x) = 3x^2, 0<x<1$ จะมีค่าอยู่ระหว่าง $\frac{3}{5}$ และ $\frac{4}{5}$

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$

$$f(x) = 3x^2 \quad ; \quad 0<x<1$$

ให้ $$Y = \frac{\Sigma X_i}{n} = \overline{X}$$

$$E(\overline{X}) = E\left[\Sigma X_i/n\right]$$

$$= \frac{\Sigma E(X_i)}{n}$$

$$= E(X)$$

$$E(X) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x.3x^2\, dx$$

$$= \int_0^1 3x^3\, dx$$

$$= \frac{3x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= 3\left(\frac{1}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x^2.3x^2\, dx$$

$$= \int_0^1 3x^4\, dx$$

$$= \frac{3x^5}{5}\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$V(X) = \frac{3}{5} - (\frac{3}{4})^2$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{48-45}{80}$$

$$= \frac{3}{80}$$

จากทฤษฎีการเข้าสู่เกณฑ์กลาง จะได้ว่า

$Y = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma/\sqrt{n}}$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ มีพารามิเตอร์เป็น (0,1)

กำหนด $Y = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

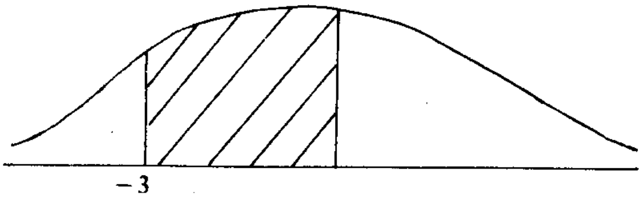
เพราะว่า $E(\bar{X}) = \frac{3}{4}$ และ $V(\bar{X}) = \sigma = \sqrt{\frac{3}{80}}$

$$Pr\left(\frac{3}{5} < \bar{X} < \frac{4}{5}\right) = Pr\left(\frac{3/5 - 3/4}{\sqrt{3/80}/\sqrt{15}} < \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{4/5 - 3/4}{\sqrt{3/80}/\sqrt{15}}\right)$$

$$= Pr(-3 < Y_n < 1)$$

$$= Pr(Y \leqslant 1) - Pr(Y \leqslant -3)$$

เปิดตาราง



$$\Pr\left(\frac{3}{5} < \bar{X} < \frac{4}{5}\right) = \Pr(Y_n \leqslant 1) - \Pr(Y_n \leqslant -3)$$

$$\approx .841 - .001$$

$$= .840$$

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ สุ่มตัวอย่าง $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ มาจากประชากรที่มีค่าเฉลี่ย 10 และความแปรปรวน 4 โดยการใช้ทฤษฎีการเข้าสู่เกณฑ์กลาง จงคำนวณหา

$$Pr\left[\sum_{i=1}^{10} X_i > 110\right]$$

2. ท่อส่งน้ำมันสายหนึ่งประกอบด้วยท่อส่งย่อย ๆ ประกอบกันขึ้น 10 ท่อน ความยาวของท่อเหล็กแต่ละท่อนที่นำมาประกอบกัน จะมีการแจกแจงเหมือนกัน โดยมีค่าเฉลี่ยคือ 2 เมตร และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน .05 เมตร ความยาวของท่อส่งน้ำมันสายนี้ตามแบบมาตรฐาน จะต้องมีความยาว 20 ± .10 เมตร จงหาโอกาสที่ท่อส่งน้ำมันจะได้มาตรฐานที่ตั้งนี้

3. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $1<x<\infty$ เป็นฟังก์ชั่นของการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้ากำหนดให้ใช้ขนาดตัวอย่าง 72 จากฟังก์ชั่นการแจกแจงนี้ จงหาโอกาสที่จะมีจำนวนตัวอย่างมากกว่า 50 หน่วยขึ้นไป จะมีค่าน้อยกว่ามัธยฐาน

4. จากการทดลองโยนลูกเต๋า 12 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมบนหน้าของลูกเต๋าจะไม่ต่ำกว่า 36 แต้ม และไม่เกิน 48 แต้ม

5. จงหาความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างขนาด 15 ที่ได้มาจากตัวแปรที่มีฟังก์ชั่นการแจกแจงเป็น $f(x) = 3(1-x)^2, 0<x<1$ จะมีค่าอยู่ระหว่าง $\frac{1}{2}$ กับ $\frac{3}{4}$

1.5 Stochastic Convergence

ถ้าเรากำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n Convergesstochastically ไปยังค่า c (ค่าคงที่) ใด ๆ หมายความว่าขีดจำกัดการกระจายของ Y_n จะ Degenerate ณ. ที่ $Y_n = c$ (พิจารณาจากเรื่องของ Limiting Distribution ประกอบ)

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\bar{x}) = 0 \quad ; \bar{x}<0$$
$$= 1 \quad ; \bar{x}\geq 0$$

เราอาจกล่าวได้ว่า $\bar{x}_n$ Converges stochastically ไปยังค่า 0

ทฤษฎี กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n มีฟังก์ชั่นการแจกแจงคือ $F_n(y)$ ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า n (n เป็นเลข จำนวนเต็มบวก) กำหนดให้ c คือค่าคงที่ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับค่า n เราจะกล่าวได้ว่า ถ้าตัวแปรต่อเนื่อง Y_n Converges stochastically ไปยังค่า c แล้วจะยังผลให้

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n - c|<\varepsilon) = 1 \qquad \text{สำหรับทุก } \varepsilon>0$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ $\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n - c|<\varepsilon) = 1$ สำหรับทุกค่าของ $\varepsilon>0$ แล้วจะยังผลให้ Y_n Converges stochastically ไปยังค่า c

พิสูจน์ ต้องแยกการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วนคือ

ส่วนที่ 1 สมมุติ Y_n Converges stochastically ไปยังค่า c แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n - c|<\varepsilon) = 1 ; \varepsilon>0$$

ส่วนที่ 2 สมมุติว่า $\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n - c|<\varepsilon) = 1 ; \varepsilon>0$

→ Y_n Converges stochastically ไปยังค่า c

การพิสูจน์เพื่อให้ง่ายเราจะเริ่มพิสูจน์ในส่วนที่ 2 ก่อนคือ

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_n(y) &= 0 \quad ; \quad y<c \\
&= 1 \quad ; \quad y>c \\
F(y) &= 0 \quad ; \quad y<c \\
&= 1 \quad ; \quad y\geq c \\
\lim_{n\to\infty} F_n(y) &= F(y)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า Y_n Converges stochastically ไปยังค่า c

การพิสูจน์ตอนที่ 1 ใช้หลักการพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน คือ สมมุติว่า Y_n Converges stochastically ไปยังค่า c

ซึ่งหมายความว่า $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = 0 \quad y<c$

$= 1 \quad y>c$

แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \Pr\{|Y_n - c|<\varepsilon\} = 1$

หรือจะพิสูจน์ให้ได้ $\lim_{n\to\infty} \Pr\{|Y_n - c|\geq\varepsilon\} = 0$ ก็ได้เช่นเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n มีการกระจายมีรูปของการแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น n, p ให้พิสูจน์ว่า Y_n/n Converges stochastically ไปยังค่า p

ในเรื่องของ Stochastic converges เราจะต้องใช้ Chebysheve's inequality ในการพิสูจน์ Chebysheve's inquality มีสาระสำคัญดังนี้คือ

ถ้าตัวแปรเชิงสุ่ม X_n มีฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็น เป็น f(x) และมีค่าเฉลี่ยเป็น μ มีค่าความแปรปรวนที่สามารถหาได้คือ σ^2 จะได้ว่า

$$\Pr(|X-\mu|>k\sigma) \leq 1/k^2 \text{; สำหรับค่า } k>0$$

หรือ $$\Pr(|X-\mu|<k\sigma) > 1-1/k^2$$

จากปัญหาที่กำหนดให้ $Y_n \sim b(n,p)$

สมมุติ $\lim\limits_{n\to\infty} Pr(|Y_n - c|<\varepsilon) = 1 \quad ; \quad \varepsilon>0$

จะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า Y_n converges stochastically ไปยังค่า c ซึ่งหมายความว่า ขีดจำกัดการแจกแจงของ Y_n Degenerate ณ. ที่จุด c หรือ

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_n(y) &= 0 \quad ; \quad y<c \\ &= 1 \quad ; \quad y>c \end{aligned} \qquad \text{.... (1)}$$

ถ้าหาก $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(y)$ ได้ในแบบที่ (1) เราสามารถหาฟังก์ชั่น ซึ่งแสดงถึงขีดจำกัดของฟังก์ชั่นการแจกแจงของตัวแปร Y_n ได้คือ

$$\begin{aligned} F(y) &= 0 \; ; \; y<c \\ &= 1 \; ; \; y\geq c \end{aligned}$$

สรุป สมมุติ $\lim\limits_{n\to\infty} Pr(|Y_n - c|\varepsilon) = 1 \; ; \; \varepsilon>0$

$$\begin{aligned} F(y) &= 0 \; ; \; y<c \\ &= 1 \; ; \; y\geq c \end{aligned}$$

พิจารณา $Pr(|Y_n - c|<\varepsilon)$

$$\begin{aligned} &= Pr(-\varepsilon<Y_n - c<\varepsilon) \\ &= Pr(c-\varepsilon<Y_n<c+\varepsilon) \\ &= Pr(Y_n<c+\varepsilon) - Pr(Y_n\leq c-\varepsilon) \\ &= F(c+\varepsilon) - F(c-\varepsilon) \end{aligned}$$

กำหนดให้ $\lim\limits_{n\to\infty} Pr(|Y_n - c|<\varepsilon) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} F(c+\varepsilon) - F(c-\varepsilon) = 1$$

โดยคุณสมบัติของฟังก์ชั่นการแจกแจง จะได้ว่า

$$\lim_{\nu\to\infty} F(c+\varepsilon] = 1 \quad ; \quad y\geq c+\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} F(c-\varepsilon) = 0 \quad ; \quad y\leq c-\varepsilon$$

ดังนั้น $E(Y_n) = np,\ V(Y_n) = np(1-p)$

และ $$\Pr(|Y_n - np| < k\sqrt{np(1-p)}) > 1 - 1/k^2$$

$$\Pr(Y_n/n - p| < \frac{k\sqrt{np(1-p)}}{n}) > 1 - 1/k^2$$

กำหนดให้ $$\varepsilon = \frac{k\sqrt{np(1-p)}}{n} \rightarrow k = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}$$

$$\Pr(|Y_n/n - p| < \varepsilon) \geqslant 1 - p(1-p)/n\varepsilon^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n/n - p| < \varepsilon) \geqslant 1 - \lim_{n\to\infty} p(1-p)/n\varepsilon^2$$

$$1 - 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n/n - p| < \varepsilon) = 1$$

ดังนั้น Y_n/n Converges stochastically ไปสู่ค่า p

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ S_n^2 เป็นความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาด n โดยที่ตัวแปรในกลุ่มตัวอย่างมีการแจกแจงแบบปกติและมีค่าเฉลี่ยเป็น μ ความแปรปรวนเป็น σ^2 จงพิสูจน์ว่า $nS^2/(n-1)$ จะลู่เข้าหา σ^2

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเป็นปกติ นั่นคือ $X_i \sim n(\mu, \sigma^2)$

ดังนั้นจะได้ว่า $nS^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$

ในกรณีของตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบไคกำลังสองเราจะได้ผลว่า

$$E(nS^2/\sigma^2) = (n-1)$$
$$V(nS^2/\sigma^2) = 2(n-1)$$

Chebysheve's inquality

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|nS_n^2/\sigma^2 - (n-1)| \geqslant k\sqrt{2(n-1)}\} \leqslant 1/k^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|nS_n^2/(n-1) - \sigma^2| \geqslant \frac{k\sigma^2\sqrt{2(n-1)}}{(n-1)}\} \leqslant 1/k^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|nS_n^2/(n-1) - \sigma^2| \geqslant k\sigma^2\sqrt{2/(n-1)}\} \leqslant 1/k^2$$

$$\varepsilon = k\sigma^2\sqrt{2/(n-1)} \qquad k = \varepsilon\sqrt{(n-1)}/\sigma^2\sqrt{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|nS_n^2/(n-1) - \sigma^2| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sigma^2\sqrt{2}/\varepsilon^2\sqrt{(n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|nS_n^2/(n-1) - \sigma^2| \geqslant \varepsilon\} \leqslant 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{|nS_n^2/(n-1) - \sigma^2| < \varepsilon\} = 1$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1 และที่ 2 พอจะแสดงให้ทราบว่าการพิสูจน์ตัวแปรเชิงสุ่มใดลู่เข้าหา (Stochastic converges) ไปค่าคงที่ค่าหนึ่งก็มีความหมายในเชิงว่า ตัวแปรเชิงสุ่มนั้นเป็นค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าคงที่ (พารามิเตอร์) จะมีค่าที่แตกต่างไปบ้างก็คือ ε ในกรณีที่จำนวนค่าสังเกตุ n มีขนาดใหญ่มาก ๆ

1.6 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเรื่องการลู่เข้าของตัวแปรสุ่ม

ทฤษฎีที่ 1 กำหนดให้ U_n เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีฟังก์ชั่นของการแจกแจงเป็น $F_n(u)$ (ขึ้นอยู่กับค่า n) ถ้าตัวแปร U_n ลู่เข้าหา (Converges stochastically) ไปยังค่า $c \neq 0$ แล้ว จะได้ผลลัพธ์ว่า ตัวแปรเชิงสุ่มตัวใหญ่ U_n/c จะ Converges stochastically ไปยังค่า 1

ทฤษฎีที่ 2 กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม U_n ซึ่งมีฟังก์ชั่นของการแจกแจงขึ้นอยู่กับค่า n และถ้าตัวแปร U_n Converges stochastically ไปยังค่า c และ $\Pr(U_n<0) = 0$ สำหรับทุกค่าของ n จะได้ว่า ตัวแปรเชิงสุ่ม $\sqrt{U_n}$ Converges stochastically ไปยังค่า $\sqrt{c}$

ทฤษฎีที่ 3 กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม U_n และ V_n ซึ่งมีฟังก์ชั่นของการแจกแจงขึ้นอยู่กับค่า n ทั้งคู่ คือ $F_n(u)$ และ $H_n(v)$ ถ้าทราบว่า U_n Converges stochastically ไปยังค่า c และ V_n Converges stochastically ไปยังค่า d จะได้ว่า ตัวแปรเชิงสุ่ม $U_n V_n$ จะ Converges stochastically ไปยังค่า c.d

และในกรณีที่ $d \neq 0$ ได้ว่าตัวแปร U_n/V_n จะ Converges stochastically ไปยังค่า c/d

ทฤษฎีที่ 4 กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม U_n และ V_n มีฟังก์ชั่นการแจกแจง คือ $F_n(u)$ และ $H_n(v)$ (ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า n) โดยที่ขีดจำกัดของการกระจายของ U_n คือ $F(u)$ ละตัวแปรเชิงสุ่ม V_n Converges stochastically ไปยัง 1 แล้วจะได้ว่า

ตัวแปร $W_n = U_n/V_n$ แล้ว W_n จะมีขีดจำกัดของการแจกแจงเหมือนกับการแจกแจงของ U_n คือ $F(w)$

หมายเหตุ ทฤษฎีที่ 4 มีประโยชน์ในแง่ที่ว่าจะเป็นหนทางหนึ่งในการที่จะหาว่าตัวสถิติจะมีการแจกแจงเช่นใด

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n มีการแจกแจงเป็นแบบ b(n,p)

จงพิสูจน์ว่า (a) $\frac{Y_n}{n}$ converges stochastically to p

(b) $(1 - Y_n/n)$ converges stochastically to $(1 - p)$

a. $\because Y_n \sim b(n,p)$

ดังนั้น $E(Y_n) = np$

$V(Y_n) = np(1-p)$

จาก Chebyshev's inequality ได้ว่า

ถ้า X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มใด ๆ ที่มี $E(X) = \mu$

และ $V(X) = \sigma^2$ แล้ว จะได้ว่า

$$\Pr\left[|X-\mu| \geq k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\Pr\left[\,|Y_n - np| \geq k\sqrt{np(1-p)}\,\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\Pr\left[\,\left|\frac{Y_n}{n} - P\right| \geq k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

กำหนดให้ $\varepsilon = k\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

$$k = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}$$

$$\Pr\left[\,\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\,\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right] = \leq \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\,\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n^2}$$

$$\geq 1 - 0$$

เนื่องจากค่า pdf เกิน 1 ไม่ได้

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \Pr\left[\,\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right] = 1$$

จัดรูปใหม่

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\,|(1 - \frac{Y_n}{n}) - (1-p) < \varepsilon\right] = 1$$

$$\because \lim_{n\to\infty} \Pr\left[\,|(1 - \frac{Y_n}{n}) - (1-p)| < \varepsilon\right] = \lim_{n\to\infty} \Pr\left[\,| - \frac{Y_n}{n} + p| < \varepsilon\right.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Pr\left[\,| -(\frac{Y_n}{n} - p)| < \varepsilon\right.$$

เนื่องจากค่า $\left| -\left(\frac{Y_n}{n} - p\right) \right| = \left| \left(\frac{Y_n}{n} - p\right) \right|$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\left| \left(1 - \frac{Y_n}{n}\right) - (1 - p) \right| \right] = 1$

ตัวอย่างที่ 2 แสดงการหาการแจกแจงของตัวสถิติโดยใช้ทฤษฎีที่ 4 ดังกล่าว

กำหนดให้ $W_n = Y_n - np/\sqrt{n(Y_n/n)(1 - Y_n/n)}$ จงหาขีดจำกัดของการแจกแจง โดยที่ Y_n มีการแจกแจงแบบทวินาม ที่มีพารามิเตอร์เป็น n,p

สร้างให้ $U_n = Y_n - np/\sqrt{np(1-p)}$

โดยการใช้ทฤษฎีการเข้าหาเกณฑ์กลาง (Central Limit Theorem) U_n จะมีขีดจำกัดของการแจกแจงเป็นปกติ (0, 1)

เนื่องจาก $Y_n \sim b(n,p)$

จะได้ว่า Y_n/n Converges stochastically ไปยังค่า p

$(1 - Y_n/n)$ Converges stochastically ไปยังค่า $(1 - p)$

(ใช้ผลได้จากตัวอย่าง)

จากทฤษฎีของ Stochastic convergence จะได้ว่า

1. $\frac{Y_n}{n}/\left(1 - \frac{Y_n}{n}\right)$ Converges stochastically ไปยังค่า $p/(1-p)$

2. $\dfrac{\frac{Y_n}{n}\left(1 - \frac{Y_n}{n}\right)}{p(1-p)}$ Converges stochastically ไปยังค่า 1

เนื่องจาก $0<p<1$

3. $\dfrac{\frac{Y_n}{n}\left(1 - \frac{Y_n}{n}\right)}{\sqrt{p(1-p)}}$ Converges stochastically ไปยังค่า 1

$$V_n = \sqrt{\frac{\frac{Y_n}{n}(1-\frac{Y_n}{n})}{p(1-p)}}$$

$$W_n = \frac{U_n}{V_n} = \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{\frac{Y_n}{n}(1-\frac{Y_n}{n})}}$$

$$W_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{n(Y_n/n)(1-Y_n/n)}}$$

โดยทฤษฎีบทที่ 4 ได้ว่า W_n เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีขีดจำกัดของการแจกแจงเป็นปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น 1

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\overline{X}_n$ คือ ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบแกมม่าซึ่งมีพารามิเตอร์ คือ $\alpha = \mu > 0$ และ $\beta = 1$ จงหาขีดจำกัดการแจกแจงของตัวสถิติ $\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu)/\sqrt{\overline{X}_n}$

เนื่องจาก $X \sim \text{gamma}\ (\alpha = \mu,\ \beta = 1)$

$$E(X) = \alpha\beta = \mu$$

ดังนั้น

$$E(\overline{X}_n) = \mu$$

$$V(X) = \alpha\beta^2$$

$$= \mu.1$$

ดังนั้น

$$V(\overline{X}_n) = \mu/n$$

จากทฤษฎีการเข้าสู่เกณฑ์กลาง จะได้ว่า

$$U_n \quad = \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\mu/n}} \sim N(0, 1)$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\overline{X}_n$ Converges stochastically to μ ได้โดยอาศัย Chebyshev Inequality ดังนี้คือ

$$\Pr[|\overline{X}_n - \mu| < k\sqrt{\mu/n}] \quad \geqslant \quad 1 - \frac{1}{k^2}$$

กำหนดให้ $\varepsilon \quad = \quad k\sqrt{\mu/n}$

ดังนั้น $\quad k \quad = \quad \varepsilon\sqrt{n/\mu}$

$$\therefore \quad \Pr[|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon] \geqslant 1 - \frac{\mu}{\varepsilon^2 n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \Pr[|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon] \geqslant 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{\mu}{\varepsilon^2 n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \Pr[|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon] \geqslant 1 - 0$$

$\because$ ค่าของความน่าจะเป็นเกิน 1 ไม่ได้

ดังนั้น

$$\lim_{n \to \infty} \Pr[|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon] = 1$$

นั่นคือ $\overline{X}_n$ จะ Converger stochastically ไปยังค่า μ

$\therefore \quad \overline{X}_n/\mu$ จะ Converges stochastically ไปยัง 1

จากทฤษฎี 4 ของเรื่อง stochastic converge กำหนดให้ $V_n = \dfrac{\overline{X}_n}{\mu}$ และ $U_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\mu/n}}$

$$W_n = \frac{U_n}{\sqrt{v_n}}$$

เนื่องจาก U_n มีการแจกแจงระบบ N(0, 1) และ $\sqrt{v_n}$ converges ไปยังค่า 1

ดังนั้น จากทฤษฎีที่ 4

$$W_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\mu/n}} \times \sqrt{\frac{\mu}{\overline{X}_n}}$$

$$= \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\overline{X}_n/n}}$$

ดังนั้น $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\overline{X}_n/n}}$ จะมีการแจกแจงแบบเดียวกับ U_n คือ N(0, 1)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มขนาด n โดยที่ X มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรเป็น μ และ σ^2 ตามลำดับ จงหาขีดจำกัดการกระจายของตัวแปรเชิงสุ่ม $\frac{\sigma\overline{X}_n}{S_n}$

เนื่องจากว่า $M_{\overline{X}_n}(t) = M_{\frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}}(t)$

$$= M_{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}(t/n)$$

เนื่องจาก X_i และ X_j มีคุณสมบัติเป็น identica'ly independent distributed

ดังนั้น $M_{\overline{X}^n}(t) = [M_{X_i}(t/n)]^n$

$\because \; X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow \; M_{X_i}(t) = e^{-\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$\therefore \; M_{\overline{X}^n}(t) = [e^{-\mu\frac{t}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{n^2}}]^n$

$$= e^{-\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{n}}$$

$\Longrightarrow \quad \overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

(1) $\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ จากการพิสูจน์

(2) $\because S_n$ converges stochastically ไปยัง σ

ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด โดยการพิสูจน์ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[|S_n - \sigma| < \varepsilon\right] = 1$$

$\therefore \ \frac{S_n}{\sigma}$ จะ converges stochastically ไปยัง 1 (โดยทฤษฎีที่ 3)

(3) จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$W_n = \frac{\overline{X}_n}{S/\sigma} = \frac{\sigma\overline{X}_n}{S}$$ จะเป็น

ตัวแปรเชิงสุ่มใหม่ที่มีการแจกแจงแบบเดียวกับตัวแปร $\overline{X}_n$ ทุกประการนั่นคือ

$$W_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

แบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนดให้ $\bar{X}_n$ คือ ค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ มีพารามิเตอร์ $(0, 1)$ จงหาขีดจำกัดการแจกแจงของ $\bar{X}_n$

2. กำหนดให้ Y_n เป็นตัวสถิติอันดับที่ n ที่ได้มาจากกลุ่มตัวอย่าง $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ซึ่งสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง โดยมีฟังก์ชั่นการแจกแจง คือ $F(x)$ และฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น คือ

   $f(x) = F'(x)$ จงหาขีดจำกัดของการแจกแจงของ $Z_n = n[1 - F(Y_n)]$

3. กำหนดให้ pdf. ของตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n คือ

   $f_n(y) = 1, y = n$ นอกเหนือจากนี้เป็น 0 หมด จงแสดงว่า ตัวแปรเชิงสุ่ม Y_n นี้ไม่มีขีดจำกัดการแจกแจง

4. กำหนดให้สุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่องใด ๆ โดยที่เป็นที่ทราบกันว่า

   $f(x) = F'(x)$ จงหาขีดจำกัดการแจกแจงของ $W_n = nF(Y_2)$ โดยที่ Y_2 คือ ตัวสถิติอันดับที่ 2 ของกลุ่มตัวอย่าง

5. กำหนดให้สุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีพารามิเตอร์ คือ (μ, σ^2) โดยที่ $\mu > 0$ จงแสดงว่า ตัวแปรเชิงสุ่ม $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ไม่มีขีดจำกัดในการแจกแจง

6. กำหนดให้ Z_n มีการแจกแจงแบบพัวซอง ซึ่งมีพารามิเตอร์ $\mu = n$ จงหาขีดจำกัดการแจกแจงของ $Y_n = (Z_n - n)/\sqrt{n}$

7. กำหนดให้ S_n^2 เป็นค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเป็น μ และ σ^2 ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า $\frac{nS_n^2}{(n-1)}$ และ S_n^2 จะ converges ไปยังค่า σ^2

8. กำหนดให้ $\bar{X}_n$ เป็นค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรซึ่งมี pdf. $f(x) = e^{-x}$; $0 < x < \infty$

1. จงหา $M_{Y_n}(t)$ โดยที่ $Y_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)$

2. จงหาขีดจำกัดการแจกแจงของ Y_n

9. กำหนดให้ W_n คือ ตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยคือ μ และความแปรปรวนคือ b/n^p โดยที $p>0$ และ μ กับ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ ซึ่งไปเกี่ยวข้องกับค่า n จงพิสูจน์ว่า W_n จะ converges stochastically ไปยังค่า μ

10. กำหนดให้ Y_n เป็นตัวสถิติอันดับ n ซึ่งได้มาจากกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ และต่อเนื่องในช่วง $(0, \theta)$ โดยที่ $\theta>0$ จงพิสูจน์ว่า $Z_n = \sqrt{Y_n}$ จะ converges stochastically ไปยังค่า $\sqrt{\theta}$

11. กำหนดให้ $X \sim x^2(50)$ จงหาค่าโดยประมาณของ $Pr(40<X<60)$

12. กำหนดให้ความน่าจะเป็นของคน ๆ หนึ่งในกลุ่มคนที่ศึกษา มีค่าความน่าจะเป็นที่จะมีชีวิตอยู่ต่อไปได้อย่างน้อย 5 ปี มีค่าเท่ากับ $p = 0.95$

ก. ถ้าเราสังเกตคนกลุ่มนี้เป็นจำนวน 60 คน (สมมติแต่ละคนเป็นอิสระต่อกัน) จงหาค่าความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยที่สุด จะมีคน 56 คน มีชีวิตอยู่ต่อไปมากกว่า หรือเท่ากับ 5 ปี

ข. จงคำนวณผลของข้อ ก. โดยวิธีการแจกแจงแบบพัวซอง และเปรียบเทียบค่าที่ได้

13. กำหนดให้ $\bar{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยจากกลุ่มตัวอย่างขนาด 128 หน่วย ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า โดยมีพารามิเตอร์ คือ $\alpha=2$ และ $\beta=4$ จงหาค่าโดยประมาณของ $Pr(7<\bar{X}<9)$

14. กำหนดให้ Y เป็น $b(400, \frac{1}{5})$ จงหาค่าโดยประมาณของ $Pr(0.25<Y/n)$

15. กำหนดให้ Y เป็น $b(100, \frac{1}{2})$ จงหาค่าของ $Pr(Y = 50)$

16. กำหนดให้ $f(x) = 1/x^2, 1<x<\infty$ คือ pdf. ของตัวแปรเชิงสุ่ม X ถ้าสุ่มตัวอย่างมาขนาด 72 จากประชากรกลุ่มนี้ จงหาค่าประมาณของความน่าจะเป็นที่จะมีตัวอย่างมากกว่า 50 หน่วยที่มีค่าน้อยกว่า 3

17. มีการวัดของสิ่งหนึ่งอยู่ 48 ครั้ง การวัดแต่ละครั้งจะปัดเศษให้เป็นเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นผลบวกที่แท้จริงของการวัดทั้ง 48 ครั้ง จึงมีค่าใกล้เคียงกับผลบวกของตัวเลขที่ปัดเศษแล้วทั้ง 48 ครั้ง สมมติว่าเศษที่ได้จากการปัดให้เป็นเลขจำนวนเต็มนั้นแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน และเศษเหล่านี้มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ จงหาค่าโดยประมาณของความน่าจะเป็นที่ผลบวกของเลขจำนวนเต็ม ที่ได้จากการปัดนี้จะแตกต่างจากผลบวกของค่าจริงอยู่ 2 หน่วย