แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้สุ่มตัวอย่างมาขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบพัวซอง จงพิสูจน์ว่า ΣX_i จะเป็นตัว Sufficient Statistic สำหรับพารามิเตอร์ ตัวสถิติตัวนี้มีคุณสมบัติว่าปราศจากความเอียงเฉหรือไม่
2. กำหนดให้ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x;\theta) = (\theta/2)^{|x|}(1-\theta)^{1-|x|}\ ;\ x = -1,0,1,\ 0<\theta<1$$

   a. ตัวแปร X เป็นตัว Sufficient Statistic หรือไม่
   b. ตัวแปร |X| เป็นตัว Sufficient Statistic หรือไม่
3. กำหนดให้สุ่มตัวอย่างมาขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ $(N0,\theta)$; $\theta=\sigma^2$ จงพิสูจน์ว่าตัวสถิติต่อไปนี้มีคุณสมบัติว่าเป็นตัว Sufficient Statistic หรือไม่
   a. ΣX
   b. $\Sigma|X|$
   c. ΣX^2 เป็นตัวสถิติที่ปราศจากความเอียงเฉต่อพารามิเตอร์หรือไม่
4. ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชุดหนึ่งที่สุ่ม จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ Geometric นั่นคือ $f(x;\theta) = (1-\theta)^x\theta;\ x=0,1,2,\ldots;\ 0<\theta<1$ จงแสดงว่า ΣX_i เป็นตัว Sufficient Statistic สำหรับ θ
5. ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ Beta โดยที่มีพารามิเตอร์ $\alpha=\theta>0$ และ $\beta=2$ จงแสดงว่าผลคูณของ $X_1,\ldots,X_n$ จะเป็นตัว Sufficient Statistic สำหรับ θ
6. กำหนดให้ $X_1,\ldots,X_n$ มีคุณสมบัติว่าเป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงเหมือนกัน จงแสดงให้เห็นว่า

$$\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

   เป็นตัวประมาณค่าที่ปราศจากความเอียงเฉต่อความแปรปรวนของประชากร

7. กำหนดให้ $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ เป็นตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ θ โดยที่ $E(\hat{\theta}_1) = \theta$ และ $E(\hat{\theta}_2) = \theta + .5$ ความแปรปรวนของ $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ มีค่าเป็น 6 และ 4 ตามลำดับ จงเปรียบเทียบดูว่า ตัวประมาณค่าตัวใดที่ดีที่สุด

8. กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นชุดของตัวแปรเชิงสุ่มที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ $N(0,\theta); 0<\theta<\infty$ จงแสดงว่า ΣX_i^2 เป็นตัว sufficient statistic สำหรับพารามิเตอร์ θ

9. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของตัวแปรเชิงสุ่ม ที่มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบพัวซองที่มีพารามิเตอร์เป็น $\theta(0<\theta<\infty)$ มีคุณสมบัติเป็นตัว sufficient statistic

10. กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นชุดของตัวแปรสุ่ม ที่สุ่มมาจาก geometric distribution ซึ่งมี pdf.

$$f(x;\theta) = (1-\theta)^x\theta, \ x=0,1,2,\ldots, \ 0<\theta<1$$

จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{n} X_i$ เป็นตัว sufficient statistic

จงแสดงว่า ผลบวกของตัวแปรเชิงสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากร ที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า ซึ่งมี pdf.

$f(x;\theta) = (1/\theta)e^{-x/\theta}, \ 0<x<\infty, \ 0<\theta<\infty$ เป็นตัว sufficient statistic สำหรับ θ

11. ในงานวิจัยเกี่ยวกับการพัฒนาทางเศรษฐกิจนักเศรษฐศาสตร์ 2 คน ได้ทำการประมาณค่าเฉลี่ย μ (ค่าใช้จ่ายเฉลี่ยที่ใช้ไปในการซื้อสิ่งของบริโภค) นักเศรษฐศาสตร์ทั้งสองต่างมีแนวความคิดเป็นอิสระต่อกัน คนที่หนึ่งใช้ $\overline{X}_1$ เป็นค่าประมาณ คนที่สองใช้ $\overline{X}_2$ เป็นค่าประมาณ μ เป็นที่น่าสังเกตว่านักเศรษฐศาสตร์คนแรกทำงานค่อนข้างละเอียดกว่าคนที่สอง โดยที่เขาได้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจาก $\overline{X}_1$ ต่ำกว่าคนที่สองอยู่ 1/5 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจาก $\overline{X}_2$ ถ้าหากว่าเราต้องการที่จะรายงานผลที่ได้โดยการนำผลที่ได้ของนักเศรษฐศาสตร์ทั้งสองมาร่วมกันเพื่อที่จะใช้ในการประมาณค่าเฉลี่ยที่ใช้ไปในการซื้อสิ่งอุปโภคของประชากร จากข้อสรุปทั้งสี่ที่ได้มาโดยนักสถิติให้เรียงลำดับของวิธีทั้งสี่โดยเรียงตามลำดับประสิทธิภาพของตัวประมาณค่าในแต่ละวิธี

1. $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(\overline{X}_1 + \overline{X}_2)$

2. $\hat{\mu}_2 = \frac{4}{5}\overline{X}_1 + \frac{1}{5}\overline{X}_2$

3. $\hat{\mu}_3 = \frac{5}{6}\overline{X}_1 + \frac{1}{6}\overline{X}_2$

4. $\hat{\mu}_4 = \overline{X}_1$

12. สุ่มตัวอย่างขนาด n ให้พิจารณาตัวประมาณค่าต่อไปนี้ (พารามิเตอร์คือ μ) (n = 2)

$$\overline{X} = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

$$W = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$$

a. จงแสดงว่า ทั้งคู่เป็นตัวประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉ

b. ให้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของ W กับ $\overline{X}$ ตัวประมาณค่าใดดีกว่ากัน

13. โดยการใช้ตัวอย่างขนาด n หน่วย จงพิจารณาตัวประมาณค่าทั้งสองที่กำหนดให้เพื่อใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ μ

$$\overline{X}_{100} = \frac{1}{100}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100})$$

$$\overline{X}_{90} = \frac{1}{90}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{90})$$

ให้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของ $\overline{X}_{100}$ กับ $\overline{X}_{90}$

14. จงอภิปรายข้อความต่อไปนี้

ในปัญหาที่ 2 และ 3 จะเห็นได้ว่าเป็นตัวอย่างที่แสดงถึงการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวประมาณค่า ตัวอย่างในปัญหาที่ 3 เป็นตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจน เพราะว่าการคิดตัวประมาณโดยใช้ค่าสังเกตุเพียง 90 ค่าเพื่อหาค่า $\overline{X}_{90}$ ก็เท่ากับการทิ้งประโยชน์ที่ควรจะได้รับจากอีก 10 ข้อมูลทิ้งไปนั่นเอง ส่วนในปัญหาที่ 2 ข้อเสียของค่าประมาณ W ก็คือเราถ่วงน้ำหนักให้กับ X_1, X_2 ไม่เหมาะสม จากข้อเสียทั้งสองก็จะทำ

ให้ได้รับผลลัพธ์ที่ไม่เหมาะสมเช่นเดียวกัน (การทิ้งข้อมูลไป 10 หน่วย กับการวิเคราะห์ที่ผิดพลาดก็จะได้รับผลลัพธ์คือได้ตัวประมาณค่าที่ไม่ดีเช่นกัน) หรือจะกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือการที่เราใช้วิธีการวิเคราะห์ไม่ดีก็เปรียบเสมือนการทิ้งข้อมูลไปโดยไม่ใช้ประโยชน์นั่นเอง

จากเหตุผลที่เรายกมาเปรียบเทียบ ถ้าให้ท่านช่วยแนะนำกับนักวิจัยในการวิจัยชิ้นหนึ่งที่ต้องเสียเงิน 100,000 \$ ในการเก็บข้อมูลและ 100 \$ สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูล

15. ชาวนาคนหนึ่งมีที่ดินของตนเองเป็นรูปสี่เหลี่ยม เขาต้องการประมาณพื้นที่ของที่ดินแปลงนี้ (เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า) โดยการวัดความยาวของที่ดินแปลงนี้ความยาวที่วัดได้คือ X_1 (ปรากฏว่าค่าที่วัดไว้มีความผิดพลาด) โดยที่ X_1 มีการแจกแจงแบบปกติมีค่า μ ใกล้เคียงกับ 200 ค่า $\sigma^2 = 20$ เพื่อจะแก้ไขข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นเขาทำการวัดความยาวด้านใหม่คือ X_2 หลังจากที่ได้ข้อมูลทั้งสองครั้งแล้ว ชาวนาผู้นี้จะเลือกตัวสถิติตัวใดที่จะเหมาะที่สุดในการประมาณพื้นที่ของเขา

    a. $\left(\frac{X_1+X_2}{2} \right)^2$

    b. $\frac{X_1^2 + X_2^2}{2}$

16. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าคาดหมายเป็น μ และความแปรปรวนเป็น σ^2 ถ้าสุ่มตัวอย่างมาขนาด n คือ $X_1,\ldots,X_n$ เราจะสามารถสร้างตัวประมาณค่าของ σ^2 ได้หลายทางด้วยกัน ทางหนึ่งที่ได้ก็คือ $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ ซึ่งถ้าหากเราสามารถเลือกค่าของ c ให้เหมาะจะได้ตัวประมาณค่านี้เป็นตัวประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ μ ให้หาค่า c ที่จะเป็นไปได้ในกรณีนี้

17. $X_1,X_2,\ldots,X_n$ คือกลุ่มตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มมาจากตัวแปร X เราทราบว่า $\sum_{i=1}^{200} X_i = 300$ และ $\sum_{i=1}^{200} X_i = 3754$ จากค่าที่กำหนดมาให้นี้จงสร้างค่าประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ E(X) และ V(X)

18. ตัวประมาณค่าเป็นตัวแปรชนิดหนึ่งหรือไม่ ทำไมจึงเป็นเช่นนั้นยกเหตุผลประกอบ

19. จากข้อความต่อไปนี้จงอธิบายและแยกให้เห็นความแตกต่าง

a. สถิติเชิงพรรณนากับสถิติเชิงอนุเคราะห์

b. Estimate และ Estimator

20. จงอธิบายและแสดงเหตุผลในการคำนวณประกอบด้วยว่า ทำไม $\overline{X}$ จึงมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้ (X_i มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติมีค่าเฉลี่ยเป็น μ และความแปรปรวนเป็น σ^2)

a. เป็นค่าประมาณที่มีความแนบนัยต่อพารามิเตอร์ (Consistent Estimator)

b. เป็นค่าประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉ (Unbiased Estimator)

c. เป็นค่าประมาณที่มีประสิทธิภาพที่สุด (An Efficient Estimator)

d. เป็นค่าประมาณที่บอกลักษณะของตัวพารามิเตอร์ได้อย่างเพียงพอ (A Sufficient Estimator)

21. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่มีการแจงใด ๆ โดยที่มีโมเมนต์รอบที่ k สามารถหาค่าได้คือ $E(X)^k$ จงแสดงว่า $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ เป็นค่าประมาณที่แนบนัยต่อ $E(X^k)$

22. $\overline{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง โดยที่กลุ่มตัวอย่างได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบทวินาม $B(1,p)$ จงแสดงว่า $\overline{X}$ เป็นค่าประมาณที่อธิบาย p ได้อย่างเพียงพอ พร้อมกันนั้นให้แสดงด้วยว่า $\overline{X}$ มีคุณสมบัติที่เป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพที่สุดด้วย

23. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ Exponential โดยที่มีฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นคือ $f(x;\theta) = \theta . e^{-\theta x}$; $x>0$ (θ เป็นค่าบวก) จงแสดงว่าค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง $\overline{X}$ เป็นตัวประมาณที่อธิบายพารามิเตอร์ได้อย่างพอเพียง (Sufficient Statistic for θ) และจะได้ว่า $((n-1)/n)/\overline{X}$ จะเป็นค่าประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ θ

24. ถ้า $\overline{X}$ และ S^2 ซึ่งเป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนจากตัวอย่าง ที่มีขนาด n โดยที่ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ $N(\mu, \sigma)^2$ จงแสดงว่า ตัวแปรสองมิติ $(\overline{X}, S^2)$ จะเป็นค่าประมาณที่เพียงพอ (Sufficient Statistics) สำหรับเวคเตอร์ของพารามิเตอร์ (μ, σ^2)

25. กำหนดให้ $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ เป็นตัวประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์ θ โดยที่ทั้ง $\hat{\theta}_1$ และ

$\hat{\theta}_2$ ต่างก็เป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพที่สุดทั้งคู่ จงแสดงว่าสหสัมพันธ์ระหว่าง $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ มีค่าเท่ากับ 1

26. จงแสดงว่า สำหรับตัวประมาณค่าใด ๆ ของความแปรปรวน ซึ่งได้จากการแจกแจงปกติ โดยที่ตัวประมาณค่าเหล่านั้นมีคุณสมบัติว่าเป็นตัวประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉแล้ว ตัวประมาณค่าเหล่านี้จะมีค่าของความแปรปรวนต่ำที่สุดคือ $2\sigma^4/n$ โดยกำหนดให้ $(X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$

27. กำหนดให้ $\hat{\theta}_1$ เป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพที่สุดสำหรับ θ และ $\hat{\theta}_2$ เป็นตัวประมาณค่าตัวอื่นที่มีคุณสมบัติว่าเป็นตัวประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ θ โดยที่ความแปรปรวนของ $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ คือ σ^2, $k\sigma^2 (k>1)$ ตามลำดับ จงแสดงว่า สหสัมพันธ์ระหว่าง $\hat{\theta}_1$ และ $\hat{\theta}_2$ มีค่าเท่ากับ $1/\sqrt{k}$

28. ถ้ากำหนดให้ T เป็นตัวประมาณที่เพียงพอต่อ θ(Sufficient for θ) แล้ว จงแสดงว่าสำหรับฟังก์ชั่นชนิด one to one แล้วเราจะได้ว่า $\phi(T)$ ก็จะมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณค่าที่เพียงพอสำหรับ θ ด้วย (ให้พิสูจน์ผลที่ได้กับกรณีต่อไปนี้ด้วย $2\bar{X}+3$ เป็นตัวประมาณที่เพียงพอต่อ $2\mu + 3$ จากตัวอย่างขนาด n ที่มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ $N(\mu, \sigma^2)$)

29. กำหนดให้ T เป็นตัวประมาณค่าที่มีความแนบนัยต่อ θ (Consistent Estimator for θ) จงแสดงว่า $nT/(n-1)$ ก็จะมีคุณสมบัติ Consistent ต่อ θ ด้วย

30. จงแสดงว่าผลคูณของตัวแปรเชิงสุ่ม ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ beta ซึ่งมีพารามิเตอร์ คือ $\alpha=\theta>0$ และ $\beta=2$ มีคุณสมบัติเป็นตัว sufficient statistics สำหรับพารามิเตอร์ θ

31. ในวงจรไฟฟ้าอันหนึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อย ๆ 3 ชิ้นต่อกัน วงจรอันนี้จะไม่ทำงานถ้าหากชิ้นส่วนหนึ่งส่วนใดชำรุด โดยที่ชิ้นส่วนแต่ละชิ้นเป็นอิสระจากกัน โดยอายุการใช้งานมีการแจกแจงแบบเอ็กโพเนนเชียล มีพารามิเตอร์เป็น λ กำหนดให้ T_i เป็นอายุการใช้งานของแต่ละชิ้นส่วน โดยที่ $t_1 \leq t_2 \leq t_3$

ก. จงหาค่าเฉลี่ยอายุการใช้งานของวงจรไฟฟ้านี้

ข. แสดงให้เห็นว่า $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} t_i$ เป็นค่าประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ $1/\lambda$

ค. หาความแปรปรวนของอายุการใช้งานของวงจรอันนี้

ง. จงแสดงให้เห็นว่า $2\lambda \sum_{i=1}^{3} t_i$ มีการแจกแจงแบบไดกำลังสองที่มีองศาความเป็นอิสระเป็น 6

2.6 Minimum-variance Unbiased Estimator (MVB)

คุณสมบัติในด้าน Efficiency ของตัวประมาณค่านั้นมีข้อสังเกตว่าเราจะต้องทราบค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าเหล่านั้นทุกตัว ในกรณีที่เราทราบว่าตัวประมาณที่เลือกมานั้นมีคุณสมบัติว่าปราศจากอคติ ข้อยุ่งยากที่เกิดขึ้นก็คือเราจะต้องสร้างเซทของตัวประมาณค่านี้ขึ้นและนำมาเปรียบเทียบกันทุกตัว จุดประสงค์เพื่อที่จะเลือกตัวประมาณค่าที่ดีที่สุด ดังนั้นวิธีการเลือกตัวประมาณค่าที่ดีที่สุดโดยวิธีเลือกเช่นนี้จึงเสียเวลาและยุ่งยากมาก การได้ตัวประมาณค่าตัวใดตัวหนึ่งมานอกจากจะต้องตัดสินด้วยคุณสมบัติของการปราศจากความอคติต่อค่าพารามิเตอร์ คุณสมบัติของความแนบนัยต่อพารามิเตอร์ (Consistency) แล้วยังต้องนำมาเปรียบเทียบกับตัวประมาณค่าอื่นที่มีคุณสมบัติเช่นเดียวกันนี้อีก การเปรียบเทียบที่จะกล่าวถึงนี้ก็คือการเปรียบเทียบในค่าของความแปรปรวน

สรุป การที่จะเลือกตัวประมาณค่านั้นเรายึดหลักดังนี้

1. ปราศจากอคติต่อค่าพารามิเตอร์
2. มีความแนบนัยต่อพารามิเตอร์
3. ความแปรปรวนของตัวประมาณค่าที่เลือกได้นั้นจะต้องมีค่าต่ำที่สุด (Minimum Variance)

ในบรรดาตัวประมาณค่าทั้งหลายที่ปราศจากอคติ นั่นคือ $V(\hat{\theta}_i)$ มีค่าเท่ากับ

MVB (Minimum-variance Bound) ดังนั้น $\hat{\theta}_i$ จะเป็นตัวประมาณค่าที่มีความแปรปรวนต่ำที่สุดในบรรดาตัวประมาณค่าทั้งหลายที่ปราศจากอคติในการตรวจดูคุณสมบัติข้อที่ 3 ว่า $V(\hat{\theta}_i) = \text{MVB}$ หรือไม่นั้น มีทฤษฎีที่กล่าวไว้คือ Rao Cramer Inequality มีสาระดังนี้

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มมาจากการแจกแจงที่มี $f(x;\theta)$; $\theta \varepsilon \Omega$ โดยที่ $\Omega = \{\theta; a<\theta<b\}$ a และ b เป็นค่าที่ทราบ เราจะสามารถสร้างฟังก์ชั่นของตัวสถิติใด ๆ ขึ้นมาในรูปของ $Y_i = u_i(X_1, \ldots, X_n)$ โดยที่เลือกเฉพาะ Y_i เป็นตัวที่ปราศจากความเอียงเฉต่อพารามิเตอร์แล้วเราจะได้คุณสมบัติที่ตามก็คือ ความแปรปรวนของตัวประมาณค่าใด ๆ Y_i จะมีค่ามากกว่าหรืออย่างน้อยที่สุดก็จะมีค่าเท่ากับ MVB เราหาค่า MVB ได้จากฟังก์ชั่นของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$

โดยที่ค่าของ $\quad MVB = 1/nE\left[\dfrac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2$

สรุปได้ดังนี้คือ $\quad \sigma^2_{Y_i} \geqslant 1/nE\left[\dfrac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2$

ข้อสังเกต อสมการของ Rao Cramer มีเงื่อนไขในการใช้คือ

1. $\dfrac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}$ exist for all x and all θ

2. $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\int\ldots\int\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)\,dx_1\ldots dx_n = \int\ldots\int\dfrac{\partial}{\partial\theta}\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)dx_1,\ldots, dx_n$

จากข้อที่ 2 หมายความว่า ค่าของตัวแปร X จะต้องเป็นค่าคงที่ที่ไม่เกี่ยวข้องกับ θ

3. $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\int\ldots\int u(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)\,dx_1,\ldots,dx_n$

$= \int\ldots\int u(x_1,\ldots,x_n)\dfrac{\partial}{\partial\theta}\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)\,dx_1,\ldots,dx_n$

4. $0 < E_\theta\left[\dfrac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2 < \infty$

อสมการของ Rao Cramer นี้บางทีเรียกว่าขีดจำกัดขั้นต่ำของความแปรปรวน (Minimum Variance Bound (MVB) or Minimum Lower Bound)

$$\sigma^2_{Y_i} \geq \frac{1}{nE\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta}\right]^2}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มขนาด n จากฟังก์ชั่นที่มีการแจกแจงที่มี pdf; คือ $f(x;\theta)$; $\theta\varepsilon\Omega = \{ \nu < \theta < \delta\}$

โดยที่ ν และ δ เป็นค่าที่ทราบ $Y = u(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ เป็นตัวสถิติที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ (การพิสูจน์จะใช้ในกรณีของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องเพื่อความสะดวกในการคำนวณ)

ให้ pdf ของ Y คือ $g(y;\theta)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,dx = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\theta)\,dx = \frac{\partial 1}{\partial\theta}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}\,dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta} f(x;\theta)dx = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

(เนื่องจาก $\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{f(x;\theta)}\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}$)

เพราะว่า Y เป็นตัวสถิติที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ θ

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} y.g(y;\theta)\,dy = \theta$

$$Y = u(X_1,X_2,\ldots,X_n)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)dx_1\ldots dx_n = \theta$$

differentiate with respect to θ

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)dx_1\ldots dx_n = \frac{\partial\theta}{\partial\theta}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta}\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)\,dx_1\ldots dx_n = 1$$

$n=2$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial\theta} f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\,dx_1dx_2 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2)f(x_1;\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}f(x_2;\theta) + f(x_2;\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}f(x_1;\theta)\,dx_1dx_2$$

$$= 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2)\, f(x_1;\theta)\cdot\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}.f(x_2;\theta) + f(x_2;\theta)\frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial\theta} f(x_1;\theta)\,dx_1dx_2$$

$$= 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2)\, f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial \ln f(x_2;\theta)}{\partial\theta}\,dx_1dx_2$$

$$= 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2} f(x;\theta)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\,dx_1dx_2 = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\prod_{i=1}^{2} f(x;\theta)\,dx_1dx_2 = 1$$

ในกรณีที่ $n = n$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1,x_2,\ldots,x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\,dx_1\ldots dx_n = 1$$

ให้ $Y = u(X_1,X_2,\ldots,X_n)\,;\, Z = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right]$

โดยที่ทั้ง Y และ Z ต่างก็เป็นฟังก์ชั่น $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ทั้งคู่

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} y.z \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\, dx_1 \ldots dx_n = 1$$

$$E(YZ) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

พิจารณา $V(Z) = V \sum_{i=1}^{n} [\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta}]$

เนื่องจาก $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

ดังนั้น $\frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta}, \ldots, \frac{\partial \ln f(x_n;\theta)}{\partial \theta}$ ก็เป็นตัวแปรที่มีความเป็นอิสระต่อกันด้วย

$$V(Z) = \sum_{i=1}^{n} V [\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta}]$$

$$= n \left\{ E [\frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta}]^2 - [E \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial \theta}]^2 \right\}$$

$$V(Z) = n \left\{ E [\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta}]^2 - [E \frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta}]^2 \right\}$$

จาก $(1) \rightarrow (E \frac{\partial f(x_i;\theta)}{\partial \theta}) = 0$

$$V(Z) = n E [\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta}]^2$$

ให้ ϱ_{YZ} เป็นค่าสหสัมพันธ์ระหว่าง Y และ Z

จากสูตรได้ว่า $\varrho_{YZ} = \frac{E(YZ) - E(Y)E(Z)}{\sqrt{V(Y)V(Z)}}$

$$E(Y) = \theta,\ E(Z) = 0\ \ E(YZ) = 1$$

$$\varrho_{YZ} = \frac{1}{\sqrt{V(Y)V(Z)}}$$

$$= \frac{1}{\sigma_Z \sigma_Y}$$

เนื่องจากคุณสมบัติที่ว่า

$-1 \leqslant \varrho \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho^2 \leqslant 1$

$$\varrho_{YZ}^2 = \frac{1}{\sigma_Y^2 . \sigma_z^2} \leqslant 1$$

$$\rightarrow \quad \sigma_Y^2 \geqslant \frac{1}{\sigma_Z^2}$$

$$\sigma_Y^2 \geqslant \frac{1}{nE\left[\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta}\right]^2}$$

นิยาม กำหนดให้ Y เป็นตัวสถิติที่ปราศจากความเอียงเฉต่อพารามิเตอร์ เราจะเรียกตัวสถิติ Y ว่าเป็นตัวสถิติที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดของ θ (An efficient statistic for θ) ก็ต่อเมื่อ ความแปรปรวนของ Y มีค่าเท่ากับค่าของ Rao-Crame'r Inequality

หมายเหตุ ในบางปัญหาเราอาจจะหา MVB ได้จาก

$$\sigma^2 \geqslant \frac{1}{-n E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_i;\theta)}{\partial \cdot \partial^2}\right]}$$

ถ้าหากว่าการ differentiate เทียบกับ θ ครั้งที่สอง ทำให้การแก้ปัญหาง่ายกว่าการ differentiate ครั้งเดียว

พิสูจน์

$$E\left[\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta}\right]^2 = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta^2}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_i;\theta)dx = 1$$

differentiate with respect to θ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta} . f(x_i;\theta)dx \quad = \quad 0$$

assume second differentiate with respect to θ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta} . f(x_i\theta)dx \quad = \quad 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta^2} . f(x_i;\theta) + \frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} f(x_i;\theta) \right] dx \quad = \quad 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta^2} f(x_i;\theta)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial \theta} dx \quad = \quad 0$$

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2} f(x;\theta)dx \quad = \quad -\int_{\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x;\theta)^2}{\partial \theta} f(x;\theta)dx$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial \theta^2} \right) \quad = \quad -E\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial \theta} \right]^2$$

การทดสอบค่าประมาณใดค่าประมาณหนึ่งที่เลือกมาเพื่อตรวจสอบดูว่าเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพที่สุดนั้น โดยวิธีการใช้อสมการของ Rao Crame'r นั้นใช้ได้กับการกระจายใด ๆ ไม่ว่าจะเป็นชนิดต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง ขอแต่ให้มีลักษณะสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสี่ประการดังกล่าวมาแล้วข้างต้น

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ตัวแปรชุดหนึ่ง $X_1,\ldots,X_n$ ซึ่งมีขนาด n ตัวแปรชุดนี้สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเป็นแบบพัวซองซึ่งมีค่าเฉลี่ยของประชากรคือ $\theta>0$ เป็นที่รู้กันว่า $Y=\Sigma X$ เป็นตัว Sufficient Statiatic สำหรับ θ จงแสดงว่า $Y/n=\overline{X}$ จะเป็นตัวสถิติที่มีประสิทธิภาพที่สุด

การที่จะแสดงว่าตัวสถิติใดเป็นตัวสถิติที่มีประสิทธิภาพที่สุดจะต้องแสดงคุณสมบัติสองอย่าง

1. เป็นค่าประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อพารามิเตอร์

$$E(Y/n) = \frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$ เพราะว่า $X_1,\ldots,X_n$ เป็นอิสระต่อกัน

$$\frac{1}{n} n \cdot \theta = \theta$$

2. $Y = X_i$ is a sufficient statistic for θ

   $Y/n = \Sigma X_i/n$ is also a sufficient statistic for θ

3. $V(Y/n)$ มีค่าเท่ากับ MVB

เพราะว่า

$$V(Y/n) = V(\bar{X}) = \theta/n$$

$$MVB = 1/n\, E\left[\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right]^2$$

$$f(x_i;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \;;\; x = 0,1,2,\ldots,$$

$$\ln f(x_i;\theta) = -\theta \ln e + x \ln\theta - \ln x!$$

$$\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta} = -1 + x/\theta$$

$$\left[\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right]^2 = [x/\theta - 1]^2$$

$$= \frac{(x-\theta)^2}{\theta^2}$$

$$E\left[\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right]^2 = E\left[\frac{(X-\theta)^2}{\theta^2}\right]$$

$$= V(X)/\theta^2$$

$$= \theta/\theta^2$$

$$= 1/\theta$$

$$\text{MVB} = 1/n/\theta = \theta/n$$

เพราะว่า $V(\overline{X})$ มีค่าเท่ากับ Rao Crame'r lower bound

ดังนั้น $\overline{X}$ จึงเป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพที่สุด ($\overline{X}$ มีคุณสมบัติครบถ้วนทั้งสามประการ)

หมายเหตุ อัตราส่วนที่เปรียบเทียบระหว่าง Rao Crame'r lower bound กับค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าใด ๆ (ตัวสถิติ) เราเรียกค่าที่ได้นั้นว่า ประสิทธิภาพของตัวสถิตินั้น ๆ (โดยปกติจะคิดออกมาเป็นเปอร์เซ็นต์)

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ S^2 เป็นความแปรปรวนซึ่งได้มาจากกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากร ที่มีการแจกแจงแบบ $n(\mu,\theta), 0<\theta<\infty$ จงหาค่าประสิทธิภาพของ $\frac{nS^2}{n-1}$

$$\because \; X_i \sim N(\mu,\theta)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-(x_i-\mu)^2/2\theta}; 0<\theta<\infty$$

$$\ln f(x_i) = \ln\left(\frac{1}{2\pi}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\theta}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{2}\ln\theta - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_i) = 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{(x_i-\mu)^2}{2}\cdot\frac{1}{\theta^2}$$

$$= -\frac{1}{2\theta} + \frac{(x_i-\mu)^2}{2\theta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^2}\ln f(x_i) = \frac{1}{2\theta^2} - \frac{2(x_i-\mu)^2}{2\theta^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x_i) = \frac{1}{2\theta^2} - \frac{(x_i - \mu)^2}{\theta^3}$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x_i)\right] = E\left[\frac{1}{2\theta^2} - \frac{(X_i - \mu)^2}{\theta^3}\right]$$

$$= \frac{1}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} E(X_i - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} \cdot \theta$$

$$= \frac{1-2}{2\theta^2}$$

$$= \frac{-1}{2\theta^2}$$

$$\text{MVB} = \frac{1}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(x)\right]}$$

$$= \frac{2\theta^2}{n}$$

$$\because \frac{nS^2}{\theta} \sim \chi^2(n-1)$$

$$E\left[\frac{nS^2}{\theta}\right] = (n-1)$$

$$V\left(\frac{nS^2}{\theta}\right) = 2(n-1)$$

$$\frac{1}{\theta^2} V(nS^2) = 2(n-1)$$

$$V\left(\frac{n}{n-1} S^2\right) = \frac{2\theta^2(n-1)}{(n-1)^2}$$

$$= \frac{2\theta^2}{n-1}$$

ประสิทธิภาพ (Efficiency) ของ $(\frac{n}{n-1})S^2$ $= \frac{MVB}{V(\frac{n}{n-1}S^2)} \times 106$

$$= \frac{2\theta^2}{n} \cdot \frac{(n-1)}{2\theta^2} \times 100$$

$$= \frac{(n-1)}{n} \times 100$$

ตัวอย่างเช่นถ้ากำหนดขนาดตัวอย่าง $n = 10$

จะได้ว่าประสิทธิภาพของ $\frac{n}{n-1}S^2 = \frac{(10-1)}{10} \times 106$

$$= 90\%$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มชุดหนึ่ง ที่สุ่มมาจากประชากร ที่มีการแจกแจง ซึ่งมี pdf. คือ

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} ; 0<x<1$$

จงหาค่าประสิทธิภาพของ $(n-1)/Z$ โดยที่

$$Z = -\sum_{1}^{n} \ln X_i$$

กำหนดได้ $Y_i = -\ln X_i$

$$e^{-y} = X_i$$

transform จาก X มาเป็น Y

$$|J| = \frac{dx}{dy}$$

$$= e^{-y_i}$$

$$f(y) = |J| \cdot f(x^{-1})$$

$$= e^{-y_i}\theta(e^{-y_i})^{\theta-1} ;\ 0<y<\infty$$

$$= \theta e^{-y_i\theta} ;\ 0<y<\infty$$

ดังนั้น Y จะมีการแจกแจงแบบแกมม่า มีพารามิเตอร์ $\alpha = 1$ และ $\beta = 1/\theta$

ดังนั้น

$$M_Y(t) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{\theta}t)}$$

$\because$ Y $\sim$ gamma ($\alpha = 1$, $\beta = 1/\theta$)

$$E(Y) = \alpha\beta$$

$$= 1(1/\theta)$$

$$\therefore E(-Y) = -1/\theta$$

กำหนด $Z = -\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$

$$M_Z(t) = [\ M_{Y_i}(t)\ ]^n$$

$$= [\ \frac{1}{(1 - \frac{1}{\theta}t)}\ ]^n$$

$$= (1 - \frac{1}{\theta}t)^{-n}$$

$\therefore \quad Z \sim \text{gamma}\ (\alpha = n,\ \beta = 1/\theta)$

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(n)(1/\theta)^n} z^{n-1} e^{-z/(1/\theta)} \ ; 0<z<\infty$$

$$E\left(\frac{1}{Z}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{z} \frac{1}{\Gamma(n)(1/\theta)^n} z^{n-1} e^{-z/(1/\theta)} dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)(1/\theta)^n} \int_0^\infty z^{n-2} e^{-z/(1/\theta)} dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)(1/\theta)^n} \int_0^\infty z^{n-2} e^{-z\theta} dz$$

$$E\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{\theta}{\Gamma(n)} \int_0^\infty (z\theta)^{n-2} e^{-z\theta} dz\theta$$

$$= \frac{\theta\Gamma(n11)}{\Gamma(n)}$$

$$= \frac{\theta(n-2)!}{(n-1)!}$$

$$= \frac{\theta}{n-1}$$

$$\therefore \quad E\,\frac{(n-1)}{Z} = \theta \ ; V\,\frac{(n-1)}{Z} = \frac{\theta^2}{n-2}$$

$$\because \quad f(x) = \theta x^{\theta-1}$$

$$\ln f(x) = \ln\theta + (\theta-1)\ln x$$

$$= \ln\theta + \theta\ln x - \ln x$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x) = \frac{1}{\theta} + \ln x - 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(x) = -\frac{1}{\theta^2} + 0$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x)\right] = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$\text{MVB} = -\frac{1}{n(-1/\theta^2)}$$

$$= \frac{\theta^2}{n}$$

$$\text{MVB} = \frac{\theta^2}{n}$$

$\therefore$ ประสิทธิภาพของตัวสถิติ $\frac{(n-1)}{Z}$ $= \frac{\text{MVB}}{V(\frac{n-1}{Z})}$

$$= \frac{\theta^2}{n} \Big/ \frac{\theta^2}{(n-2)}$$

$$= \frac{n-2}{n}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า ในกรณีที่เราเพิ่มขนาดตัวอย่าง $n \to \infty$ แล้วจะยังผลให้ ตัวสถิติ ($\frac{n-1}{Z}$) มีคุณสมบัติเป็น asymtotically efficient

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดให้ ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีฟังก์ชั่นการแจกแจงคือ

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x};\ \lambda > 0,\ x \geqslant 0$$

จงพิสูจน์ว่า (ถ้าใช้ขนาดตัวอย่าง n)

ถ้า $\hat{\lambda} = \frac{2n}{\Sigma X_i}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ λ แล้ว

$\hat{\lambda}$ เป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพสูงสุด (efficient estimator) หรือไม่

จาก $$\text{MVB} = \frac{1}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right]^2}$$

$$f(x;\lambda) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

$$\ln f(x;\lambda) = 2\ln\lambda + \ln x - \lambda x$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f(x;\lambda) = \frac{2}{\lambda} + 0 - x$$

$$= \frac{2}{\lambda} - x$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f(x;\lambda)\right]^2 = \left[\frac{2}{\lambda} - x\right]^2$$

$$= \frac{4}{\lambda^2} - 2\cdot\frac{2}{\lambda}x + x^2$$

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f(x;\lambda)\right]^2 = E\left[\frac{4}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda}X + X^2\right]$$

$$= \frac{4}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda}E(X) + E(X^2)$$

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda^2 x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty (x^2\lambda^2)\,e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (x\lambda)^2 e^{-\lambda x}\,d\lambda x$$

$$= \frac{1}{\lambda}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2}{E(X)}$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda^2 x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty (x\lambda)^3 e^{-\lambda x}\,d\lambda x$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(4) = \frac{3!}{\lambda^2} = \frac{6}{\lambda^2}$$

$$\therefore\ E[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\lambda)]^2 = \frac{4}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda}(\frac{2}{\lambda}) + \frac{6}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}[4-8+6] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$MVB = \frac{1}{n\cdot\frac{2}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{2n}$$

$$\because\quad \hat{\lambda} = \frac{2n}{\Sigma X_i} = \frac{2}{\overline{X}} \Rightarrow \overline{X} = \frac{2}{\hat{\lambda}}$$

$$V(\hat{\lambda}) = V(\frac{2}{\overline{X}}) = 4V(\frac{1}{\overline{X}})$$

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า ค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ $b(1,\theta)$ จะเป็นตัวสถิติที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด (efficient statistic)
2. กำหนดให้ $f(x;\theta) = 1/\theta$; $0<x<\theta$ โดยที่ $\theta>0$
   จงคำนวณหาส่วนกลับของ $nE\{[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\theta)]^2\}$
   จงเปรียบเทียบค่าของ MVB ที่ได้กับค่าความแปรปรวนของตัวสถิติ $\frac{(n+1)Y_n}{n}$ โดยที่ Y_n ก็คือ ค่าที่โตที่สุดจากตัวอย่าง
3. กำหนดให้ $f(x;\theta) = \frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]}$; $0<x<\infty$; $-\infty<\theta<\infty$
   จงพิสูจน์ว่า ค่า MVB คือ $2/n$ โดยที่ n คือ ขนาดตัวอย่าง

2.7 Completeness (Complete Density Functions)

เรื่อง Completeness เป็นเรื่องที่ศึกษาคุณสมบัติของ Density Functions เพื่อที่จะใช้เป็นแนวทางในการสร้างตัวประมาณค่าที่ดี ก่อนที่จะได้รู้จักฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นที่มีคุณสมบัติเป็น Completeness จะขอทำความเข้าใจเกี่ยวกับคำว่า Complete ของฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นเสียก่อน

กำหนดให้ X เป็นตัวแปรต่อเนื่องที่มีฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็น เป็น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\alpha_0<\theta<\alpha_1$ และ $a<x<b$

เราจะเรียกว่า $\{f(x;\theta);\ \alpha_0<\theta\leqslant\alpha_1,\ a<x<b\}$ ว่าเป็น family ของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น

จะสังเกตุได้ว่า

- ค่าของ θ ในช่วงหนึ่ง ๆ ก็จะให้เซทของฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นแตกต่างกันไป

- โดยทั่วไป $a<x<b$ เราจะกำหนดให้ a,b ไม่ขึ้นอยู่กับ θ เพื่อให้ง่ายวิเคราะห์ในขั้นแรกเท่านั้น (ซึ่งโดยปกติ ฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็น ส่วนใหญ่ก็จะมีลักษณะเช่นนี้) สรุปโดยทั่วไป ฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นที่จะศึกษาว่า Complete หรือไม่นั้นจะประกอบด้วยคุณสมบัติดังนี้

$$f(x;\theta) > 0 \;;\; a<x<b,\ a_0<\theta<\alpha_1$$

$$f(x;\theta) = 0 \quad \text{elsewhere}$$

ตัวอย่างที่จะยกมาศึกษาประกอบเช่น

1. กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น θ และมีความแปรปรวนเป็น 1

$$f(x;\theta) = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-(x-\theta)^2/2} \;;\; -\infty<x<\infty$$

$$-\infty<\theta<\infty$$

$$a = -\infty \quad b = \infty$$

$$\alpha_0 = -\infty \quad a_1 = \infty$$

เพราะว่า $V(\bar{X})$ มีค่าเท่ากับ Rao Crame'r lower bound

ดังนั้น $\overline{X}$ จึงเป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพที่สุด ($\overline{X}$ มีคุณสมบัติครบถ้วนทั้งสามประการ)

หมายเหตุ อัตราส่วนที่เปรียบเทียบระหว่าง Rao Crame'r lower bound กับค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าใด ๆ (ตัวสถิติ) เราเรียกค่าที่ได้นั้นว่า ประสิทธิภาพของตัวสถิตินั้น ๆ (โดยปกติจะคิดออกมาเป็นเปอร์เซ็นต์)

2. กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงแบบพัวซอง โดยที่มีพารามิเตอร์เป็น θ

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^x e^\theta}{x} \; ; \; x = 0,1,2,\ldots \quad 0<\theta<20$$

$$= 0 \text{ elsewhere}$$

โดยที่ $a = 0$, $b = \infty$

$\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \infty$

3. กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงแบบยูนิฟรอมในช่วง $(0,\theta)$

$$f(x;\theta) = 1/\theta \; ; \; 0<x<\theta \quad 0<\theta<\infty$$

$$= 0 \text{ elsewhere}$$

จะเห็นว่าตัวอย่างที่ 3 นี้แตกต่างกับตัวอย่างที่ 1 และที่ 2 ในเมื่อช่วงของตัวแปร X เกี่ยวข้องกับ θ ทั้งสามตัวอย่างที่ยกมาให้ดูเพื่อแสดงถึง family ของฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นในแบบต่าง ๆ กัน

พิจารณาจาก $\{f(x;\theta);\ a<x<b,\ \alpha_0<\theta<\alpha_1\}$

ไม่ว่าตัวแปร X จะมีการแจกแจงแบบใด

ถ้าเราจะกำหนด U(X) ซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชั่นที่เกี่ยวข้องกับ θ โดยที่ค่าของ X อยู่ในช่วง $a<x<b$ แล้ว เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $U(X) = 0$ สำหรับทุกค่าของ X ในช่วง a และ b แล้วจึงจะทำให้ $E(U(X)) = 0$ ด้วย

เราจะเรียก family ของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ X นี้ว่าเป็น Complete family

นิยาม กำหนดให้ family ของฟังก์ชั่น ความน่าจะเป็นของตัวแปร X คือ $\{f(x;\theta);\ \theta\varepsilon\Omega\}$ (จะเป็นชนิดต่อเนื่องหรือไม่ก็ได้) ให้ U(X) เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องของ X (แต่ต้องไม่ใช่ฟังก์ชั่นของ θ)

ถ้าหากเราได้ว่า $E(U(x)) = 0$ แล้วสำหรับทุกค่าของ θ ใน Ω

จะยังผลให้ $U(X) = 0$ เท่านั้น สำหรับแต่ละค่าของ x ในช่วง a และ b ที่ทำให้ $f(x;\theta) > 0$ เท่านั้น เราจะเรียก family ของฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นนี้ว่า Complete family

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\{f(x;\theta);\ x=0,1,\ 0<\theta<1\}$ จงพิสูจน์ว่าเป็น Complete family

$$
\begin{aligned}
f(x;\theta) &= \theta^{x}(1-\theta)^{1-x}\ ;\ x=0,1 \\
&= 0 \ \text{ otherwise}
\end{aligned}
$$

กำหนดให้ u(x) เป็นฟังก์ชั่นที่ต่อเนื่องทุกค่าของ $x = 0,1$

ถ้า
$$
\begin{aligned}
E\,(u(x)) &= 0 \\
\sum_{x=0,1} u(x)\ f(x;\theta) &= 0 \\
\sum_{x=0,1} u(x).\theta^{x}(1-\theta)^{1-x} &= 0 \\
u(0)\theta^{0}(1-\theta)^{1-0} + u(1)\theta^{1}(1-\theta)^{1-1} &= 0 \\
u(0)(1-\theta) + u(1)\theta &= 0 \quad ; \quad 0<\theta<1 \\
u(0) + (u(1) - u(0))\theta &= \qquad \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)
\end{aligned}
$$

ถ้ามี linear function อยู่ในรูป.

$$
\begin{aligned}
a \pm by &= 0 \ \text{ โดยที่ค่าของ } y \text{ มีมากกว่า 1 ค่าแล้ว} \\
\Rightarrow a = b &= 0
\end{aligned}
$$

เทียบกับสมการที่ (1) $u(0) = a$; $(u(1) - u(0)) = b$; $y = \theta\ (0<\theta<1)$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) - u(0) = 0$$

$$u(1) = u(0) = 0$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็นชุดหนึ่งของของตัวสถิติอันดับที่ 1 จนถึงอันดับที่ n ซึ่งสร้างขึ้นมาจากกลุ่มตัวอย่างขนาด n ซึ่งมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเป็นยูนิฟรอมในช่วง $(0,\theta)$ โดยที่ฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นคือ

$$f(x;\theta) = 1/\theta \quad 0<x<\theta;\ 0<\theta<\infty$$

$$= 0 \quad \text{elsewhere}$$

จงแสดงว่า family ของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวสถิติอันดับที่ n เป็น Complete family

$$g_n(y_n) = n\{F(y_n)\}^{n-1} f(y_n)$$

$$= n\{\int_0^{y_n} 1/\theta\, dy_n\}^{n-1} 1/\theta$$

$$= n(1/\theta)^n y_n^{n-1} \ ; \ 0<y_n<\theta$$

กำหนดให้ $u(y_n)$ เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องของ y_n ที่ $0<y_n<\theta$

สมมุติให้ $$E(u(Y_n)) = 0$$

$$\int_0^\theta u(y_n) y_n^{n-1}/\theta^n dy_n = 0$$

เนื่องจากว่า $n \neq 0$; $\theta \neq 0$

$$\int_0^\theta u(y_n) y_n^{n-1} dy_n = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

โดยวิธีการ differentiate under integral sign with respect to θ

$$u(\theta).\theta^{n-1} = 0$$

$$u(\theta) = 0$$

สำหรับทุกค่าของ θ ซึ่ง $u(\theta) = 0 \; : \; 0<\theta<\infty$

$$u(y_n) = 0 \; : \; 0<y_n<\theta$$ [1/]

ดังนั้น family ของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ Y_n จะเป็น Complete family

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ ตัวแปรเชิงสุ่ม (X,Y) [2/] ((X,Y) be the two-dimension random variable) โดยที่ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น

$$f(x,y) = p^{x+y}(1-p)^{2-x-y} \; ; \quad x=0,1,\; y=0,1$$
$$0<p<1$$

ก. ให้แสดงว่า $E(X) = E(Y)$

ข. ให้ใช้ประโยชน์ที่ได้จากส่วน ก. ในการแสดงว่า ฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นดังกล่าวเป็นฟังก์ชั่นที่ไม่ Complete โดยการหาฟังก์ชั่นที่ไม่เป็น 0 แต่สามารถทำให้ $E(u(X,Y)) = 0$

สำหรับทุกค่าของ p โดยที่ $0<p<1$

ก. $$f(x,y) = p^{x+y}(1-p)^{2-x-y} \; ; \quad x=0,1,\; y=0,1$$
$$0<p<1$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{y=0,1} p^{x+y}(1-p)^{2-x-y} \\
&= p^x(1-p)^{1-x} \sum_{y=0,1} p^y(1-p)^{1-y} \\
&= p^x(1-p)^{1-x}\,((1-p)+p) \\
&= p^x(1-p)^{1-x} \qquad ; \quad x=0,1
\end{aligned}$$

1/ เนื่องจากว่า Y_n เป็น subset ของ θ พิจารณาค่าของช่วงประกอบ

2/ เราเรียกตัวแปร (X,Y) ว่าตัวแปรเชิงสุ่มสองมิติ

ทำนองเดียวกัน

$$f(y) = p^{y}(1-p)^{1-y} \quad ; \quad y = 0,1$$

$$E(X) = p$$

$$E(Y) = p$$

ข. $f(x,y) = p^{x+y}(1-p)^{2-x-y}$; $x = 0,1,\ y = 0,1$

$0 < p < 1$

กำหนดให้

$$u(X,Y) = X - Y$$

$$E(u(X,Y)) = \Sigma\Sigma\, u(x,y)\, f(x,y)$$

$$= \sum_{x}\sum_{y} (x-y)p^{x+y}(1-p)^{2-x-y}$$

$$= p - p$$

$$= 0$$

ดังนั้นก็จะมี $u(X,Y) = (X - Y) \neq 0$ ที่เรากำหนดได้และทำให้ $E(u(X,Y)) = 0$ ซึ่งยังผลให้ family ของความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม (X,Y) ไม่เป็น Complete Family

ข้อสังเกตุ ในกรณีที่ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นอยู่ในรูป even function ดังเช่น

$$f(x;\theta) = 1/2\theta \quad ; \quad -\theta < x < \theta$$

$$0 < \theta < \infty$$

$$= 0 \text{ elsewhere}$$

จะได้ว่าฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น (family ของมัน) จะไม่เป็น Complete family

เช่นกำหนดให้ $u(x) = X$ ซึ่ง $X \neq 0$

$$E(u(X)) = 0$$

$$\int_{-\theta}^{\theta} x \, 1/2\theta \, dx = 0$$

$$0 = 0$$

เป็นต้น

โจทย์แบบฝึกหัด

1. ตัวแปรสุ่มสองมิติ (X,Y) มีฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นคือ

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2 - \frac{1}{2}(y-\alpha)^2\right] \quad -\infty<x<\infty;\ \infty<y<\infty$$

$$0<\alpha<\infty$$

จงแสดงว่าฟังก์ชั่นนี้เป็นฟังก์ชั่นที่ไม่ Complete

2. กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นคือ

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x = 0,1;\ 0<p<1$$

ก. ให้ u เป็นฟังก์ชั่นใด ๆ ของ X (ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับ p) โดยที่ u จะต้องไม่เป็นฟังก์ชั่นศูนย์ นั่นหมายความว่า u(1) และ u(0) จะไม่เท่ากับ 0 ทั้งคู่ได้หาค่าของ E(u(X))

ข. ใช้ประโยชน์ที่ได้จากข้อ ก. แล้วแสดงว่า $E(u(X)) \neq 0$ ได้ สำหรับทุกค่าของ $0<p<1$ ก็ต่อเมื่อ $u = 0$ เท่านั้น

ค. จากตอน ก. และตอน ข. ให้สรุปว่า family ของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปร X เป็น Complete family

3. กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ได้มาจากเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. $f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$; $x = 0,1$; $0<\theta<1$

$= 0$ elsewhere

ข. $f(x;\theta) = \dfrac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$; $x = 0,1,2,\ldots$, $0<\theta<\infty$

$= 0$ elsewhere

จงแสดงให้เห็นว่า $Y_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$ เป็น complete sufficient statistic สำหรับ θ และจงหาตัวสถิติที่เป็นตัวที่ดีที่สุด ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ Y_1

4. จงแสดงให้เห็นว่า ตัวสถิติอันดับที่ 1 ซึ่งเรียกว่า Y_1 ของกลุ่มตัวอย่างที่ได้มาจากประชากรที่มี pdf $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $0<x<\theta$, $-\infty<\theta<\infty$ มีคุณสมบัติเป็น complete sufficient statistic สำหรับ θ และจงหาตัวสถิติที่ดีที่สุด สำหรับ θ

2.8 Uniqueness

กำหนดให้ตัวแปรสุ่มกลุ่มหนึ่งประกอบด้วย $X_1, X_2, \ldots, X_n$ โดยที่มี $f(x;\theta)$ ให้ $Y_1 = u(X_1, \ldots, X_n)$ และ Y_1 ยังมีคุณสมบัติพิเศษเพิ่มขึ้นคือ Y_1 เป็นตัวสถิติที่มีคุณสมบัติ Sufficiency

ดังนั้นในการหาตัวสถิติที่จะใช้เป็นตัวประมาณค่าของ θ เราควรสนใจในตัว Y_1 โดยที่สร้าง $\phi(Y_1)$ เป็นฟังก์ชั่นของ Y_1 และ $E(\phi(Y_1)) = \theta$

เราสามารถสร้างฟังก์ชั่นของ Y_1 ตัวอื่นได้อีกนอกเหนือจาก $\phi(Y_1)$ สมมุติว่าตัวสถิติที่สร้างตัวใหม่คือ $\psi(Y_1)$ โดยที่ $\psi(Y_1)$ มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณค่าที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ θ

ดังนั้น

$$E(\psi(Y_1)) = \theta$$

ซึ่งทั้ง $\phi(Y_1)$ และ $\psi(Y_1)$ นอกจากจะเป็นค่าประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉทั้งคู่แล้วยังเป็นตัวสถิติที่มีคุณสมบัติเป็น Sufficiency อีกด้วย

ถ้า Y_1 มี family ของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นเป็น Complete family

จะได้ว่า

$$u(Y_1) = 0$$

ซึ่งทำให้

$$E(u(Y_1)) = 0$$

กำหนดให้

$$u(Y_1) = \phi(Y_1) - \psi(Y_1)$$

$$E(\phi(Y_1) - \psi(Y_1)) = 0$$

$$E(\phi(Y_1)) - E(\psi(Y_1)) = 0$$

$$\theta - \theta = 0$$

เพราะว่า $\phi(Y_1) - \psi(Y_1) = 0$

ดังนั้นจึงมีผลให้ $\phi(Y_1) = \psi(Y_1)$

นั่นคือถ้า family ของฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ Y_1 เป็น Complete family และ Y_1 เป็นตัวสถิติที่มีคุณสมบัติ Sufficiency สำหรับพารามิเตอร์ θ แล้ว ผลสรุปที่ได้ก็คือ จะมีแต่ฟังก์ชั่น $\phi(Y_1)$ เพียงฟังก์ชั่นเดียวเท่านั้น

คำจำกัดความ กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นค่าที่สังเกตขนาด n ที่มี $f(x;\theta)$; $\theta \varepsilon \Omega$ ให้ $Y_1 = u(X_1, \ldots, X_n)$ เป็น Sufficient Statistic สำหรับ θ โดยที่ family ของ $Y_1 \cdot \{g(y;\theta), \theta \varepsilon \Omega\}$ เป็น Complete family ถ้ามี $\phi(Y_1)$ ซึ่งเป็น continuous function ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นค่าประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ θ แล้ว จะสรุปได้ว่า $\phi(Y_1)$ เป็น Unique Best statistic สำหรับ θ

ตัวอย่างที่ 1

จงแสดงให้เห็นว่า Y_1 ซึ่งเป็นตัวสถิติอันดับที่ 1 จากกลุ่มตัวอย่างขนาด n ที่มีฟังก์ชั่นการแจกแจงความถี่คือ $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, -\theta<x<\infty, -\infty<\theta<\infty$ เป็น complete sufficient statistics สำหรับพารามิเตอร์ θ จงหา unique continuous function ของ Y_1 ซึ่งจะเป็นตัวสถิติที่ดีที่สุดสำหรับ θ

$$\begin{aligned}
g(y_1;\theta) &= n\,[\,1 - F(y_1)]^{n-1} f(y_1) \\
&= n\,[\int_{y_1}^{\infty} e^{-(x-\theta)}\,dx\,]^{n-1} e^{-(y_1-\theta)} \\
&= n\,[\,-e^{-(x-\theta)} \Big|_{y_1}^{\infty}\,]^{n-1} e^{-(y_1-\theta)} \\
&= n\,[\,-e^{-\infty} + e^{-(y_1-\theta)}\,]^{n-1} e^{-(y_1-\theta)} \\
&= n\,[\,e^{-n(y_1-\theta)}\,];\ \theta<y_1<\infty
\end{aligned}$$

1. พิสูจน์ว่า Y_1 มี family of pdf เป็น complete

กำหนดให้มีฟังก์ชั่นของ Y_1 ในที่นี้คือ $U(Y_1)$

โดยที่ $E(U(Y_1)) = 0$ ต้องพิสูจน์ $\forall U(Y_1) = 0$

= family ของ Y_1 เป็น complete

พิสูจน์ กำหนดให้ $E[u(Y_1)] = 0$

$$\int_0^\infty u(y_1)\, g(y_1;\theta)\, dy_1 = 0$$

$$\int_\theta^\infty u(y_1) n e^{-n(y_1-\theta)}\, dy_1 = 0$$

$$ne^{n\theta} \int_\theta^\infty u(y_1)\, e^{-ny_1}\, dy_1 = 0$$

เพราะว่า $ne^{n\theta} > 0$

$$\int_\theta^\infty u(y_1) e^{-ny_1}\, dy_1 = 0$$

ดิฟเฟอร์เรนชิเอทเทียบกับ θ

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \int_\theta^\infty n(y_1)\, e^{-ny_1}\, dy_1 = 0$$

$$\therefore \quad u(\theta)e^{-n\theta} = 0$$

$$= \quad u(\theta) = 0 \quad ; \quad -\infty<\theta<\infty$$

$$\therefore \quad u(y_1) = 0 \quad ; \quad \theta<y_1<\infty$$

ดังนั้น family ของ Y_1 เป็น complete family

2. พิสูจน์ว่า Y_1 เป็น sufficient statistic

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = e^{-\Sigma x_i + n\theta}$$

$$g(y_1;\theta) = n\,[e^{-n(y_1-\theta)}]$$

$$ne^{-ny_1+n\theta}$$

$$e^{-\Sigma x_i+n\theta} = ne^{-ny_1+n\theta}\frac{e^{-\Sigma x_i}}{ne^{-ny_1}}$$

$k(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{e^{-\Sigma x_i+ny_1}}{n}$ ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับ θ

ดังนั้นโดยอาศัยทฤษฎีที่ 1 จะได้ว่า Y_1 เป็นตัว sufficient statistic สำหรับ θ

3. หา Unique best statistic ซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของ Y_1

$$\begin{aligned}
E(Y_1) &= \int_\theta^\infty y_1 ne^{-n(y_1-\theta)}\,dy_1 \\
&= ne^{n\theta}\int_\theta^\infty y_1 e^{-ny_1}\,dy_1 \\
&= \frac{e^{n\theta}}{n}\int_\theta^\infty ny_1 e^{-ny_1}\,dny_1 \\
&= \frac{e^{n\theta}}{n}\left[-\int_\theta^\infty ny_1\,de^{-ny_1}\right] \\
&= \frac{e^{n\theta}}{n}\left[-ny_1e^{-ny_1}+\int_\theta^\infty e^{-ny_1}\,dny_1\right]\Big|_\theta^\infty \\
&= \frac{e^{n\theta}}{n}\left[-ny_1e^{-ny_1}-e^{-ny_1}\right]_\theta^\infty \\
&= \frac{e^{n\theta}}{n}\left[n\theta e^{-n\theta}+e^{-n\theta}\right] \\
&= \frac{e^{n\theta}}{n}e^{-n\theta}(n\theta+1) \\
&= \frac{n\theta+1}{n}
\end{aligned}$$

$$\theta = nE\frac{(Y_1)}{n} - \frac{1}{n} = E(Y_1) - \frac{1}{n}$$

$\therefore$ กำหนดให้ $\hat{\theta} = Y_1 - \frac{1}{n}$ จะเป็น best statistics สำหรับ θ เพราะมีคุณสมบัติ 3 ประการ คือ

1. $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ θ
2. $\hat{\theta}$ เป็นตัว sufficient statistics
3. $\hat{\theta}$ มี Minimum Variance