บทที่ 3
The Rao Blackwell Theorem

ทฤษฎีนี้เป็นทฤษฎีที่ช่วยในการสร้างตัวสถิติตัวใหม่ที่มีคุณสมบัติดีกว่าสถิติตัวเดิม ทั้งนี้โดยอาศัยพื้นฐานจากตัวสถิติเดิมในการสร้างตัวสถิติตัวใหม่

หลักเกณฑ์ของทฤษฎีนี้คือ กำหนดตัวสถิติขึ้นมา ตัวให้ชื่อว่า X และ Y โดยที่ตัวสถิติทั้งสองมีลักษณะดังนี้คือ

1. Y เป็นตัวสถิติที่ใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์โดยไม่มีความเอียงเฉ นั่นก็คือ ถ้าพารามิเตอร์คือ $\theta \rightarrow E(Y) = \theta$

2. X เป็นตัวสถิติที่มีคุณสมบัติว่าเป็นตัว Sufficient Statistic สำหรับพารามิเตอร์ จาก 1 และ 2 โดยอาศัยคุณสมบัติของ Rao Blackwell Theorem จะได้ว่า เราสามารถสร้างตัวสถิติที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ขึ้นมาใหม่ที่มีคุณสมบัติดังนี้คือ

- เป็นตัวประมาณค่าที่ปราศจากความเอียงเฉต่อพารามิเตอร์
- เป็นตัว Sufficient Statistic ต่อพารามิเตอร์ θ
- ความแปรปรวนของตัวสถิติตัวใหม่จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับความแปรปรวนของ Y

$$\sigma^2_{\phi(X)} \leq \sigma^2_Y$$

วิธีการสร้างตัวสถิติที่กล่าวถึงนี้คือ

$$E(Y/X = x) \quad = \quad \phi(x)$$

จะได้ว่า $\phi(x)$ ก็คือตัวสถิติที่มีคุณสมบัติดังกล่าว

ทฤษฎี กำหนดให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่ได้มาจากการแจกแจง (เป็นชนิดตัวแปรต่อเนื่องหรือไม่ก็ตาม) ที่มีฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็นคือ $f(x;\theta)$; $\theta \varepsilon \Omega$ ให้ $Y_1 = u_1(X_1,\ldots,X_n)$ เป็นตัว Sufficient Statistic และ $Y_2 = u_2(X_1,\ldots,X_n)$ (Y_2 ไม่ใช่ฟังก์ชั่นที่ประกอบ

ด้วย Y_1 เพียงอย่างเดียวเท่านั้น) Y_2 คือตัวประมาณที่ไม่มีความเอียงเฉต่อ θ แล้ว เราสามารถสร้าง $E(Y_2/Y_1) = \phi(Y_1)$ ซึ่งเป็นตัวสถิติที่มีคุณสมบัติว่า ไม่มีความเอียงเฉต่อ θ เป็น Sufficient Statistic ต่อ θ และมีความแปรปรวนต่ำ (อย่างสูงก็เท่ากับ) ความแปรปรวนของ Y_2

พิสูจน์

$$E(Y_2/Y_1) = \phi(Y_1)$$

เนื่องจากว่า $\phi(Y_1)$ เป็นฟังก์ชั่น Y_1 ดังนั้น $\phi(Y_1)$ ก็เป็นตัว Sufficient Statistic สำหรับ θ ด้วยเช่นกัน ทั้งนี้เนื่องจากว่า กำหนดให้ Y_1 เป็นตัว Sufficient Statistic (โดยทฤษฎีของ Sufficient Statistic)

เพื่อให้ง่ายแก่การพิสูจน์จะขอยกตัวอย่างในกรณีของตัวแปรชนิดต่อเนื่อง

ดังนั้นให้

$$\text{pdf of } Y_1 = f(y_1;\theta)$$

$$\text{pdf of } Y_2 = f(y_2;\theta)$$

$$\text{joint pdf of } Y_1,Y_2 = f(y_1,y_2;\theta)$$

$$E(Y_2/Y_1=y_1) = \int y_2 f(y_2/y_1,\theta)\, dy_2$$

$$\phi(y_1) = \int y_2 f(y_1,y_2;\theta)/f(y_1;\theta)\, dy_2$$

$$\phi(y_1).f(y_1;\theta) = \int y_2 f(y_1,y_2;\theta)\, dy_2$$

$$\int \phi(y_1)f(y_1;\theta)\, dy_1 = \int\int y_2 f(y_1,y_2;\theta)\, dy_2 dy_1$$

$$= \int\int y_2 f(y_2)f(y_1/y_2,\theta)\, dy_1 dy_2$$

$$= \int\int y_2 f(y_2;\theta)dy_2\, f(y_1/y_2;\theta)dy_1$$

$$= \theta \int f(y_1/y_2,\theta)dy_1$$

$$E(\phi(Y_1)) = \theta.1 = \theta$$

$$\because v(Y_2) = E(Y_2-\theta)^2$$

$$= \quad E((Y_2 - \phi(y_1)) + (\phi(y_1) - \theta))^2$$

$$= \quad E((Y_2 - \phi(y_1))^2 + 2E((Y_1 - \phi(y_1))(\phi(y_1) - \theta))$$

$$+ E(\phi(y_1) - \theta)^2$$

$$E((Y_2 - \phi(y_1))(\phi(y_1) - \theta)) = \int\int (y_2 - \phi(y_1))(\phi(y_1) - \theta)\, f(y_1, y_2; \theta) dy_1 dy_2$$

$$\int\int (y_2 - \phi(y_1))(\phi(y_1) \quad \theta)\, f(y_2/y_1, \theta) dy_2$$

$$f(y_2/y_1, \theta)\, f(y_1, \theta)\, dy_1\, dy_2$$

$$= \int\int (y_2 - \phi(y_1)) f(y_2/y_1, \theta) dy_2)$$

$$(\phi(y_1) - \theta) f(y_1; \theta) dy_1$$

$$= 0$$

$$\sigma^2_{Y_2} = E(Y_2 - \phi(y_1))^2 + E(\phi(y_1) - \theta)^2$$

$$= V(Y_2/y_1) + V(\phi(y_1))$$

$$V(Y_2/y_1) \geqslant 0$$

$$\sigma^2_{Y_2} \geqslant \sigma^2_{\phi(y_1)}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $Y_1<Y_2<Y_3<Y_4<Y_5$ เป็น Order Statistic จากตัวอย่างชุดหนึ่งที่สุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ Uniform โดยที่มี pdf คือ $f(x;\theta) = 1/\theta;\ 0<x<\theta,\ 0<\theta<\infty$

a. จงแสดงว่า Y_5 เป็นตัว Sufficient Statistic

b. กำหนดให้ $2Y_3$ เป็นตัวประมาณที่ไม่มีความเอียงเฉต่อพารามิเตอร์ และให้หาตัวประมาณค่าสำหรับพารามิเตอร์ที่ดีกว่าทั้ง Y_5 และ $2Y_3$

a. $$g_n(y_n) = n\,(F(y_n))^{n-1} f(y_n)$$

$$= 5\left(\int_0^{y_5} 1/\theta\, dy_5\right)^{5-1} . 1/\theta$$

$$= 5y_5^4/\theta^5 \quad ; \quad 0<y_5<\theta$$

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(F(y_k))^{k-1}(1-F(y_k))^{n-k}f(y_k)$$

$$g_3(y_3) = \frac{5!}{2!\,2!}\left(\int_0^{y_5} 1/\theta dy_3\right)^{3-1}\left(1-\int_0^{y_5} 1/\theta\, dy_3\right)^{5-3} 1/\theta$$

$$= 30\ \frac{y_3^2}{\theta^5}(\theta-y_3)^2 \quad ; \quad 0 < y < \theta$$

$$g_{ij}(y_i,y_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}(F(y_i))^{i-1}$$

$$(F(y_j)-F(y_i))^{j-i-1}(1-F(y_j))^{n-j}f(y_i)f(y_j)$$

$$g_{35}(y_3,y_5) = \frac{5!}{2!1!0!}(F(y_3))^2(F(y_5)-F(y_3))(1-F(y_5))^0 f(y_3)f(y_5)$$

$$= 60\left(\int_0^{y_3} 1/\theta\, dy_3\right)^2\left(\int_0^{y_5} 1/\theta dy_3 - \int_0^{y_3} 1/\theta dy_3\right) 1/\theta^2$$

$$= 60\ \frac{y_3^2}{\theta^2}\left(\frac{y_5}{\theta}-\frac{y_3}{\theta}\right)\frac{1}{\theta^2}$$

$$= 60\ \frac{y_3^2}{\theta^5}(y_5-y_3)\ ; 0<y<y_5<\theta$$

$$\prod_{i=1}^{5} f(x_i;\theta) = \frac{1}{\theta^5}$$

$$= g(y_5;\theta).k(x_1,\ldots,x_5)$$

where $g(y_5;\theta) = 5y_5^4/\theta^5$

$k(x_1,\ldots,x_5) = 1/5y_5^4$ ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับ θ

ดังนั้น Y_5 จึงเป็นตัว Sufficient Statistic สำหรับ θ

b. โดยทฤษฎีของ Rao blackwell

$$E(2Y_3/Y_5=y_5) = \int_0^{y_5} 2y_3.g(y_3/y_5)\,dy_5$$

$$g(y_3/y_5) = \frac{g(y_3,y_5)}{g(y_5)}$$

$$= \left(\frac{60}{\theta^5} y_3^2(y_5 - y_3)\right) / 5y_5^4 / \theta^5$$

$$g(y_3/y_5) = 12 \frac{y_3^2}{y_5^4} (y_5 - y_3)$$

$$E(2Y_3/y_5) = \int_0^{y_5} 2y_3 \frac{12y_3^2}{y_5^4} (y_5 - y_3)\, dy_3$$

$$= \frac{24}{y_5^4} \int_0^{y_5} y_3^3(y_5 - y_3)\, dy_3$$

$$= \frac{24}{y_5^4} \left(\int_0^{y_5} y_3^3 y_5 dy_3 - \int_0^{y_5} y_3^4 dy_3\right)$$

$$= 24(y_5/20) = 6y_5/5$$

$$E(6y_5/5) = \frac{6}{5} E(Y_5)$$

$$= \frac{6}{5} \int_0^{\theta} y_5 y_5^4/\theta^5\, dy_5$$

$$= 6 \int_0^{\theta} y_5^5/\theta^5 dy_5$$

$$= \frac{6}{\theta^5} \frac{y_5^6}{6} \Big|_0^{\theta}$$

$$= \theta$$

$$E\left(\frac{6}{5} y_5\right)^2 = \frac{36}{25} \int_0^{\theta} y_5^2 5y_5^4/\theta^5\, dy_5$$

$$= \frac{36}{5\theta} \int_0^{\theta} y_5^6\, dy_5 = \frac{36}{5\theta^5} \frac{\theta^7}{7}$$

$$= \frac{36}{37} \theta^2$$

$$V\left(\frac{6}{5} Y_5\right) = E\left(\frac{6}{5} Y_5\right)^2 - \left(E\left(\frac{6}{5} Y_5\right)\right)^2$$

$$= \frac{36}{35}\theta^2 - \theta^2 = \frac{\theta^2}{35}$$

$$g_3(y_3) = 30\,\frac{y_3^2}{\theta^5}(\theta - y_3)^2 \quad ; \quad 0<y_3<\theta$$

$$V(2Y_3) = E(2Y_3)^2 - E((2Y_3))^2$$

$$E(2Y_3)^2 = 4\int_0^\theta y_3(\theta - y_3)\,dy_3$$

$$= 4.30\int_0^\theta y_3\,(\theta - y_3)\,dy_3$$

$$= \frac{120}{\theta^5}\int_0^\theta (y_3^4\theta^2 - 2y_3^5\theta + y_3^6)\,dy$$

$$= \frac{120}{\theta^5}\left(\frac{\theta^7}{5} - \frac{2\theta^7}{63} + \frac{\theta^7}{7}\right)$$

$$= \frac{8\theta^2}{7}$$

$$E(2Y_3) = \theta$$

$$V(2Y_3) = \frac{8\theta^2}{7} - \theta^2$$

$$= \frac{\theta^2}{7}$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่าตรงตามทฤษฎีของ Rao Blackwell ที่ว่า ถ้ามีตัวสถิติสองตัว ตามตัวอย่างนี้ก็คือ $2Y_3$ และ Y_5 เมื่อทราบว่า

1. เป็นตัวประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อ θ และความแปรปรวนของ $2Y_3$ คือ $\theta^2/7$

2. Y_5 เป็นตัวสถิติที่อธิบายลักษณะของพารามิสเตอร์ได้อย่างเพียงพอ (Sufficient Statistic) เนื่องจาก $E(2Y_3/Y_5) = 6Y_5/5$ เป็นฟังก์ชั่นของ Y_5 จะมีคุณสมบัติดังนี้

2.1 $6Y_5/5$ เป็นตัว Sufficient Statistic สำหรับพารามิเตอร์

2.2 $6Y_5/5$ เป็นตัวประมาณที่ปราศจากความเอียงเฉต่อพารามิเตอร์ และความแปรปรวนของ $\frac{6Y_5}{5}$ มีค่าน้อยกว่าความแปรปรวนของ $2Y_3$

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X,Y มีฟังก์ชั่นร่วมของการแจกแจงคือ $f(x,y) = (2/\theta^2) e^{-(x+y)/\theta}$; $0<x<y<\infty$ เป็นที่ทราบว่า

$$E(Y) = \frac{3\theta}{2}, \quad V(Y) = \frac{5\theta^2}{4}$$

จงหาค่าของ E(Y/x) และพิสูจน์ว่า E(Y/x) คล้องตามเงื่อนไขของทฤษฎี Rao Blackwell

$$E(Y/x) = \int y\, f(y/x)\, dy$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

$$f(x) = \int_0^\infty (2/\theta^2)\, e^{-(x+y)/\theta}\, dy$$

$$= (2/\theta^2)\, e^{-x/\theta} \int_x^\infty e^{-y/\theta}\, dy$$

$$= \frac{2}{\theta}\, e^{-x/\theta}(-e^{-y/\theta})$$

$$= \frac{2}{\theta}\, e^{-x/\theta}(e^{-x/\theta})\ ;\ 0<x<\infty$$

$$= \frac{2}{\theta}\, e^{-2x/\theta}$$

$$f(y/x) = \frac{(2/\theta^2)\, e^{-(x+y)/\theta}}{(2/\theta)\, e^{-2x/\theta}}$$

$$= \frac{1}{\theta}\, e^{(x-y)/\theta}$$

$$E(Y/x) = \int_x^\infty y \frac{1}{\theta} e^{(x-y)/\theta} dy$$

$$= \theta e^{x/\theta} \int_x^\infty \frac{y}{\theta} e^{-y/\theta} d\frac{y}{\theta}$$

$$= \theta e^{x/\theta} [-\frac{y}{\theta} e^{-y/\theta} + \int_x^\infty e^{-y/\theta} d\frac{y}{\theta}]$$

$$= \theta e^{x/\theta} [-\frac{y}{\theta} e^{-y/\theta} - e^{-y/\theta}] \Big|_x^\infty$$

$$= e^{x/\theta} [\frac{x}{\theta} e^{-x/\theta} + e^{-x/\theta}]$$

$$= \theta [\frac{x}{\theta} + 1] = x + \theta$$

$$E(Y/x) = x + \theta$$

พิสูจน์ว่า $E(Y/x)$ คล้องตามเงื่อนไขของทฤษฎี Rao-Blackwell **มันหมายความว่า** จะต้องได้

$$(1) \quad E(X+\theta) = \frac{3\theta}{2}$$

$$\text{และ } (2) \quad V(X+\theta) \leqslant \frac{5\theta^2}{4}$$

$$(1) \quad E(X+\theta) = E(X) + \theta$$

$$E(X) = \int x f(x) dx$$

$$= \int_0^\infty x \cdot \frac{2}{\theta} e^{-2x/\theta} dx$$

$$= \frac{\theta}{2} \int_0^\infty \frac{2x}{\theta} e^{-2x/\theta} d\frac{2x}{\theta}$$

$$E(X+\theta) = \frac{\theta}{2} L(1) + \theta$$

$$= \frac{\theta}{2} + \theta = \frac{3\theta}{2}$$

(2) $V(X+\theta) = V(X)$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^\infty x^2 . \frac{2}{\theta} e^{-2x/\theta} dx - (\frac{\theta}{2})^2$$

$$= \int_0^\infty \frac{2x^2}{\theta} e^{-2x/\theta} dx - \frac{\theta^2}{4}$$

$$= \frac{\theta^2}{4} \int_0^\infty (\frac{2x}{\theta})^2 e^{-2x/\theta} d\frac{2x}{\theta} - \frac{\theta^2}{4}$$

$$= \frac{\theta^2}{4} \Gamma(3) - \frac{\theta^2}{4}$$

$$= \frac{\theta^2}{4} \cdot 2! - \frac{\theta^2}{4}$$

$$= \frac{2\theta^2}{4} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{4}$$

นั่นคือ $V(X+\theta) < V(Y)$

แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับการสร้างตัวประมาณค่าโดยวิธีนี้ก็คือ พยายามเลือกค่าของพารามิเตอร์ของประชากรที่เป็นไปได้ โดยให้ค่าที่เลือกนี้เหมาะกับค่าสังเกตที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง เช่น ในการทดลองโยนเหรียญ 10 ครั้ง ปรากฏว่าขึ้นหน้าหัว 4 ครั้ง เราจะประมาณค่า π (สัดส่วนของความสำเร็จในการโยนเหรียญแล้วได้หน้าหัว) ของประชากรได้เท่าไร เป็นที่ทราบกันอยู่ว่าสัดส่วนจริงของความสำเร็จในการที่จะโยนเหรียญแล้วได้หน้าหัวคือ $0<\pi<1$ ถ้าทดลองเลือกดูว่า $\pi = 0.1$ จะเป็นค่าที่สมเหตุสมผลหรือไม่ โดยการศึกษาว่าความน่าจะเป็น $\pi = .1$ จะมีค่าน่าเชื่อถือแค่ใด ถ้าให้ S เป็นตัวแปรแทนจำนวนครั้งที่โยนเหรียญ n ครั้งแล้วได้หัว ดังนั้นฟังก์ชั่นของความน่าจะเป็น S

$$f(s;\pi) = \binom{n}{s} \pi^s(1-\pi)^{n-s} \quad ; \quad s=0,1,2,\ldots,$$

กำหนดให้ $n=10, s=4$

จงหาความน่าจะเป็นของ $\pi; L(\pi)= \binom{10}{4} \pi^4(1-\pi)^6; 0<\pi< 1$

ซึ่งถ้าหากว่าเราลองเลือกค่า $\pi = 0.1$

ในการโยนเหรียญ 10 ครั้ง แล้วผลลัพธ์จะเป็นหัว 4 ครั้งจะมีความน่าจะเป็น

$$L(\pi=0.1) = \binom{10}{4} (.1)^4(.9)^6$$

$$= .011$$