บทที่ 5
Moment Estimate

5.1 การประมาณค่าโดยวิธีการใช้โมเมนต์ (Estimation by the Method of Moment)

ความหมายของการประมาณค่าของพารามิเตอร์โดยวิธีโมเมนต์

(1) กำหนดให้ $\mu_r' = E(X)^r$ เป็นโมเมนต์ของประชากรรอบที่ r

(2) ให้ $M_j' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j$ เป็นโมเมนต์ของตัวอย่างรอบที่ j

เราจะใช้โมเมนต์ของตัวอย่างแทนโมเมนต์ของประชากรเพื่อที่จะใช้เป็นแนวทางในการสร้างตัวประมาณค่าที่ต้องการ

นั่นคือ $M_j' = \mu_j'(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ ....(1)

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจาก ประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากรเป็น μ, σ^2 ตามลำดับ

จงประมาณค่าของ μ และ σ โดยใช้วิธีการของโมเมนต์

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\Sigma X_i = M_1' \text{; โมเมนต์ของตัวอย่างรอบที่ 1}$$

เนื่องจาก $E(X) = \mu$

และ $M_1' = \mu_1'$ (จาก (1))

ดังนั้น $\frac{1}{n}\Sigma X_i = E(X) = \bar{X}$

→ $\bar{x}$ เป็นค่าประมาณของ μ ที่ได้จากวิธีการของโมเมนต์

เนื่องจาก $\sigma^2 = E(X)^2 - (E(X))^2$

และ $E(X)^2 = \mu_2'$

$E(X) = \mu_1'$

แทนค่า $E(X)^2$ ด้วย $\frac{1}{n}\Sigma X_i^2$

$$E(X) = \frac{1}{n}\Sigma X_i$$

$$E(X)^2 - (E(X))^2 = \frac{1}{n}\Sigma X_i^2 - (\frac{1}{n}\Sigma X_i)^2$$

$$= \frac{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2_{mle} = \frac{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2_{mle} = \frac{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}{n}$$

ค่าประมาณของ σ^2โดยวิธีการของโมเมนต์ $\frac{\Sigma(X_i - \overline{X})^2}{n}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $X_1,...,X_n$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบพัวซองที่มีพารามิเตอร์เป็น λ จงหาค่าประมาณของ λ โดยวิธีการของโมเมนต์

เนื่องจาก $E(X) = \lambda$

และ $\mu_1' = E(X)$

เพราะว่า $\mu_1' = M_1'$

นั่นก็คือ $E(X) = \frac{1}{n}\Sigma X_i = \overline{X}$

$\Rightarrow \hat{\lambda}_{mle} = \overline{X}$

ค่าประมาณของ λ โดยวิธีการของโมเมนต์ก็คือ $\overline{X}$

จากตัวอย่างนี้ เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่าการหาค่าประมาณ โดยวิธีโมเมนต์ในปัญหานี้จะได้คุณสมบัติดังนี้คือ

1. เป็นตัวประมาณค่าที่ unbias
2. เป็นตัวประมาณค่าที่ Consistency
3. เป็นตัวประมาณค่าที่มีคุณสมบัติเป็น sufficiency

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้สุ่มตัวอย่าง $X_1, \ldots, X_n$ มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ Negative exponential โดยที่ $f(x;\theta) = \theta \exp(-\theta x)$; $0<x<\infty$ ให้หาค่าประมาณของ θ โดยวิธีการของโมเมนต์

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty x\theta\exp(-\theta x)\,dx \\
&= (1/\theta)\int_0^\infty x\theta\exp(-\theta x)\,d\theta x \\
&= (1/\theta)\,\Gamma(2) = 1/\theta \\
E(X) &= 1/\theta
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $E(X) = \mu_1'$

แทนที่ u_1' ด้วย M_1'

$$1/\hat{\theta} = \frac{1}{n}\Sigma X_i$$

ดังนั้น $\hat{\theta} = 1/\bar{X}$

ดังนั้นค่าประมาณของ θ โดยวิธีของโมเมนต์คือ $1/\bar{X}$

5.2 คุณสมบัติของตัวประมาณค่าที่ได้มาจากวิธีการของโมเมนต์ (Properties of Moment Estimate)

1. เป็นตัวประมาณที่มีคุณสมบัติ Consistency

2. ตัวประมาณที่ได้มาจากวิธีการของโมเมนต์ไม่จำเป็นต้องมีตัวเดียวอาจจะมีหลายตัวก็ได้ ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่ใช้ตัวอย่างที่ 3 เดิมเราได้ว่า $\hat{\theta} = 1/\bar{X}$

แต่ถ้าเราใช้วิธีการเริ่มต้นด้วย

$$E(X)^2 = \int_0^\infty x^2\,\theta e^{-\theta x}\,dx$$

$$= (1/\theta)^2 \int_0^\infty (\theta x)^2 e^{-\theta x}\,d\theta x$$

$$= (1/\theta)^2\,\Gamma(3)$$

$$= 2/\theta^2$$

$$\Rightarrow \theta = \sqrt{2/E(X)^2}$$

เนื่องจาก $E(X)^2 = \mu_2'$ และ $M_2' = \Sigma X_i^2/n$

เราแทนที่ μ_2' ด้วย M_2' ดังนั้น

$$\hat{\theta} = \sqrt{2/M_2'}$$

$$= \sqrt{2n/\Sigma X_i^2}$$

$\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่าที่ได้จากวิธีการของโมเมนต์

แบบฝึกหัด

1. $X_1,\ldots,X_n$ be a random sample from the density

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}\exp(-e^{-(x-\theta)})$$

Find a method of moments estimator of θ.

2. Let $X_1,\ldots,X_n$ denote a random sample from $f(x;\theta) = \theta f_1(x) + (1-\theta)f_0(x)$ where $0<\theta<1$ and $f_1(x)$ and $f_0(x)$ are known densities. Estimate θ by the method of moments.

3. Let $X_1,\ldots,X_n$ be a random sample from the geometric density

$$f(x;\theta) = \theta(1-\theta)^x \ ; \ x=0,1, \ 0<\theta<1$$

Find an estimator of θ by the method of moment.

4. Let $X_1,\ldots,X_n$ be a random sample from the density

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= 2x/\theta \ ; \ 0<x<\theta \\ &= 2(1+x)/(1-\theta) \ ; \ \theta<x<1 \end{aligned}$$

Estimate θ by the method of moment.