บทที่ 3
การสุ่มตัวอย่างจากกลุ่มประชากรปกติ
(Sampling from a Normal Population)

3.1 บทนำ

จากบทที่ 2 นักศึกษาได้พบมาแล้วว่าในกรณีที่ไม่อาจทราบว่ากลุ่มประชากรเดิม (Parent Population) มีการแจกแจงอย่างไร ทราบแต่เพียงค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของกลุ่มประชากรนั้นเท่านั้น ซึ่งในกรณีดังกล่าวเราสามารถหาการแจกแจงโดยประมาณของค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง ($\bar{X}$) ที่แปลงรูปแล้ว และยอดรวมที่แปลงรูปตลอดจนตัวสถิติอื่น ๆ ได้โดยอาศัยทฤษฎีการโน้มเข้าสู่เกณฑ์กลาง เมื่ออาศัยข้อสนเทศจากกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n \to \infty$)

แต่ในกรณีที่ทราบการแจกแจงของกลุ่มประชากร หรือระบุการแจกแจงของกลุ่มประชากรให้หรือมีสถานการณ์ที่ชี้ชัดลงไปว่ากลุ่มประชากรมีการแจกแจงในลักษณะใด[1] กรณีเช่นนี้เราจะสามารถทราบการแจกแจงที่แน่ชัดของค่าเฉลี่ยจากตัวอย่าง ($\bar{X}$) หรือตัวสถิติอื่นได้[2]

ปัญหาที่พบในทางปฏิบัติอยู่เสมอคือตัวสถิติ (Statistics) มีการแจกแจงอย่างไร ปัญหานี้เป็นปัญหาที่สำคัญเพราะตราบใดที่เราไม่ทราบการแจกแจงของตัวสถิติเราก็ไม่อาจดำเนินการอนุมาน (Inference) โดยทางสถิติได้[3] เช่นไม่อาจกะประมาณค่าพารามิเตอร์ (โดยเฉพาะกรณีการประมาณด้วยช่วงเชื่อมั่น) ไม่อาจกะประมาณความคลาดเคลื่อน ตลอดจนไม่อาจตรวจสอบนัยสำคัญทางสถิติที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์ได้ ไม่อาจกะประมาณความคลาดเคลื่อนตลอดจนไม่อาจคำนวณหาขนาดของตัวอย่างที่เหมาะสมและอื่น ๆ ได้ ตัวอย่างเช่น เมื่อสุ่มตัวอย่างมา n ชุดจากกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงแบบ Exponential $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}; x \geq 0$ เพื่อทดสอบ

---

[1] จะกล่าวถึงสถานการณ์ของการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่าง ๆ ในบทที่ 4

[2] ตัวสถิติ (Statistics) คือฟังก์ชั่นของค่าสังเกต (Observed Value) ที่ไม่มีพารามิเตอร์ปะปนอยู่ในฟังก์ชั่นเลย แต่ถ้ามีพารามิเตอร์ปะปนอยู่พารามิเตอร์นั้นต้องทราบค่า

[3] โดยข้อเท็จจริงแล้วสามารถทำได้โดยอาศัยความรู้ในบทที่ 2 แต่นั่นเป็นเพียงค่าประมาณเท่านั้น

ข้อสมมุติฐาน $H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$ และพบว่า เขตวิกฤติกำหนดได้ด้วยตัวสถิติดังนี้ คือ $\sum_i^n X_i > k$ (หรือนัยหนึ่งจะปฏิเสธข้อสมมุติฐานเมื่อ $\sum_i^n X_i > k$)[1] หรือสุ่มตัวอย่างมา n ชุดจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบ Beta ($f_X(x) = \theta x^{\theta-1}; 0 < x < 1$) เพื่อทดสอบข้อสมมุติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ และพบว่าเขตวิกฤติกำหนดได้ด้วยตัวสถิติ $\prod_i^n X_i > k$ (หรือนัยหนึ่งจะปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลักเมื่อ $\prod_i^n X_i > k$) ดังนี้เป็นต้น ในกรณีเช่นนี้ ถ้าไม่ทราบการแจกแจงของ $\sum_i^n X_i$ หรือการแจกแจงของ $\prod_i^n X_i$ เราไม่อาจจะตรวจสอบข้อสมมุติฐานที่ต้องการได้ การแจกแจงของตัวสถิตินี้เรียกว่า "Sampling Distribution[2]" เป็นเรื่องที่จะได้ศึกษากันโดยละเอียดต่อไป แต่ในชั้นนี้จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่สุ่มตัวอย่างมาจากกลุ่มประชากรปกติเท่านั้น ส่วนในกรณีกลุ่มประชากรอื่น ๆ จะกล่าวถึงในภายหลัง คือ ในบทที่ 4

การสุ่มตัวอย่างจากกลุ่มประชากรปกติหรือการศึกษาเรื่องการแจกแจงของตัวสถิติ (Sampling Distribution) เมื่อกลุ่มประชากรเดิมมีการแจกแจงแบบปกติ หรือมีการแจกแจงแบบปกติโดยอนุโลมนั้นเป็นเรื่องที่ทรงความสำคัญและมีบทบาทในการอนุมานทางสถิติเป็นอย่างสูงมาในทุกกาลสมัยแม้ในปัจจุบันก็ยังนำมาใช้ในทางปฏิบัติกันอย่างกว้างขวาง การแจกแจงของกลุ่มประชากรเดิมที่อาจถือว่ามีการแจกแจงแบบปกติอาจเป็นเรื่องของสถานการณ์ต่อไปนี้คือ น้ำหนักของคนสัตว์, สิ่งของ, ปริมาณผลผลิตต่อไร่ของพืชเศรษฐกิจ, คะแนนสอบรายวิชาจากการสอบไล่, คะแนนรวมจากแบบสอบถามเสกลประเมินค่า (Rating Scale) ปริมาณค่าที่ได้จากการวัดในการทดลองจากห้องปฏิบัติการ (ทางเคมี ชีววิทยา และฟิสิกส์) และอื่น ๆ

การแจกแจงของตัวสถิติที่สำคัญ ๆ (Distribution of Function of Random Variables) สำหรับกรณีที่กลุ่มประชากรเดิมมีการแจกแจงแบบปกติ ที่ใช้กันอย่างกว้างขวางในปัจจุบันคือ การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) การแจกแจงแบบ t (t-Distribution) การแจกแจงแบบไคกำลังสอง (χ^2-Distribution) การแจกแจงแบบ F (F-Distribution) รวมถึง Noncentral χ^2-Distribution Noncentral t-Distribution และ Noncentral F-Distribution

---

[1] จะกล่าวถึงสมมุติฐานหลัก (Null Hypothesis, H_0) และสมมุติฐานรอง (Alternative Hypothesis, H_1 หรือ H_a) ในบทที่ 5

[2] บางครั้งเรียกว่า Derived Distribution

[3] ในงานวิจัยทั่วไป ถ้าประสบปัญหาเรื่องการแจกแจงของกลุ่มประชากร นักวิจัยมักกำหนดลงในข้อตกลงเบื้องต้น (Basis Assumption) ว่า "ถือว่ากลุ่มประชากรเดิมมีการแจกแจงแบบปกติ"

[4] กรณีคะแนนรวมจาก Rating Scale ถ้าใช้ Nonparametric Statistic จะต้องกับสถานการณ์ทางทฤษฎีมากกว่า

เรื่องนี้ จะได้ศึกษาถึงรายละเอียดของแต่ละเรื่องโดยละเอียดเป็นลำดับ ๆ ไป แต่ก่อนที่จะศึกษาถึงเรื่องนั้น จำเป็นที่จะต้องศึกษาเรื่อง Moment Generating Function ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญ[1] ที่ใช้สำหรับการหาการแจกแจงของตัวสถิติหรือฟังก์ชั่นของตัวแปรเชิงสุ่มเสียก่อน

3.2 Moment Generating Function (mgf)

ก่อนอื่นขอให้ทำความเข้าใจความหมายของโมเมนต์ (Moment) เสียก่อนทั้งนี้เพื่อความเข้าใจและเพื่อความสะดวกในการอภิปราย

นิยาม 3.1 เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ ถ้า $g(x) = (X - C)^k$; $k = 1, 2, \ldots$ $E(g(X)) = E(X - C)^k$ เรียกว่าโมเมนต์ที่ k ของตัวแปรสุ่ม X รอบค่าคงที่ C และถ้าให้ $C = 0$ จะได้ $E(g(x)) = E(X^k)$ เรียกว่า Raw Moment ที่ k หรือโมเมนต์ที่ k รอบจุดกำเนิด และถ้าให้ $C = E(X)$ จะได้ $E(g(X)) = E(X - E(X))^k$ เรียกว่า โมเมนต์ที่ k รอบค่าคาดหมายหรือ Central Moment ที่ k

จากนิยามนี้คงพอที่จะทำให้นักศึกษาได้ทำความเข้าใจและรู้จักกับคำว่า โมเมนต์ แล้ว แต่อย่างไรก็ตาม ขออธิบายเพิ่มเติมเพื่อเปรียบเทียบกับความหมายของคำว่า โมเมนต์ตามความหมายในทางฟิสิกส์อย่างไม่เป็นทางการดังนี้

โดยปกติเรื่องของโมเมนต์ทางฟิสิกส์เป็นเรื่องของการหมุนของคานที่มีน้ำหนัก W ถ่วงที่ปลายทั้งสองรอบจุดคงที่ที่เรียกว่าจุดหมุน (Fulcrum, F) ในทางสถิติ $E(g(X)) = E(X - C)^k = \sum_{i}^{n} (X_i - C)^k P(X_i = x_i)$ เป็นเรื่องของการศึกษาถึงลักษณะของการแจกแจงค่าของ X รอบจุดคงที่ C หมายความว่ายึดจุด C เป็นหลักแล้วศึกษาดูว่าผลรวมของความเบี่ยงเบนกำลังที่ k ของค่า X จากจุด C ถ่วงน้ำหนักด้วย $Pr(X = x)$ มีลักษณะเช่นใด ผลรวมนี้จะมากจะน้อยอย่างไรขึ้นอยู่ที่ว่า ค่าของ X เบนห่างจาก C ไปไกลเพียงใด ถือว่า C ทำหน้าที่เสมือนจุดหมุนหรือจุดฟัลครัมในทางฟิสิกส์ โดยมีค่าของ X เลื่อนใกล้ไกลจากค่า C แตกต่างกันไปตามลักษณะของข้อมูล โดยมีผลลัพธ์ที่คอยไว้เท่ากับ $E(g(x))$ ซึ่งเมื่อนำไปเทียบกับทางฟิสิกส์ น้ำหนัก W ที่ปลายคานทั้งสองจะต้องเลื่อนเข้าหรือห่างจากจุดหมุนอยู่บ่อยครั้งจนกว่าจะทำให้คานอยู่ในลักษณะ

---

[1] เทคนิคที่ใช้ในการหาการแจกแจงของฟังก์ชั่นของตัวแปรสุ่มที่ใช้มากในทางปฏิบัติคือ

ก. Moment Generating Function Technique (mgf)

ข. Cumulative Density Function Technique (cdf)

ค. Transformation of Random Variable Technique

สมดุลย์หรือมีค่าโมเมนต์คงที่เท่ากับค่า ๆ หนึ่ง ด้วยเหตุผลนี้ (ตามความเห็นของข้าพเจ้าซึ่งอาจผิดได้) จึงเรียกค่าคาดหมาย $E(g(x)) = E(X - C)^k$ ว่า "โมเมนต์" ที่ k รอบจุด C โดยยึดถือสถานการณ์ที่ใกล้เคียงกับคำว่า "โมเมนต์" ในทางฟิสิกส์เป็นประมาณ หรือนำคำว่า "โมเมนต์" มาใช้โดยอนุโลม

หมายเหตุ จากนิยาม $E(g(x)) = E(X - C)^k$; $k = 1, 2, \ldots$ กรณีเฉพาะที่สำคัญคือ

ก. ถ้า $C = 0, k = 1$ จะได้ $E(g(x)) = E(X)$ = ค่าคาดหมายหรือค่าเฉลี่ย (μ)

ข. ถ้า $C = 0, k = 2$ จะได้ $E(g(x)) = E(X^2)$

จากผลในข้อ ก. และข้อ ข. จะพบว่า $E(X^2) - (E(X))^2 = V(X)$

ค. ถ้า $C = E(X), k = 2$ จะได้ $E(g(x)) = E(X - E(X))^2 = V(X)$

ในทางปฏิบัติหรือแม้แต่ในทางทฤษฎีซึ่งจะกล่าวถึงในลำดับต่อไป (บทที่ 4) เราจะพบเห็นและใช้กรณีเฉพาะทั้งสามประการนี้บ่อยครั้ง เพราะถือว่า $E(X)$ และ $V(X)$ เป็นค่าที่แสดงคุณลักษณะของกลุ่มประชากรที่ทรงความสำคัญยิ่ง

นิยาม 3.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ mgf ของ X คือ

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \Sigma e^{tx} P(X = x) : & \text{กรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบตัดตอน} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx : & \text{กรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง} \end{cases}$$

เมื่อ t เป็นตัวแปรค่า (Real Variable) ใด ๆ โดยที่ $-h < t < h, h > 0$

ข้อสังเกต

1. $M_X(t)$ เป็นสัญลักษณ์ของ mgf อ่านว่า "Moment Generating Function ของตัวแปรสุ่ม X ที่ประเมิน ณ. ค่า $t = t$" บางครั้งอาจใช้ $m(t)$ หรือ $M_X(t)$ หรือ $\psi_X(t)$ หรือ $M(t)$ หรืออื่น ๆ ทั้งนี้แตกต่างกันไปตามความถนัดของผู้เขียนแต่ละท่าน

2. $M_X(t) = E(e^{tX})$ บางครั้งอาจเขียนเป็น $M_X(t) = E(e^{tx})$ หรือ $M_x(t) = E(e^{tX})$ ทั้งนี้ก็ด้วยเหตุผลเช่นเดียวกับข้อ 1

3. mgf ก็คือฟังก์ชั่น เป็นฟังก์ชั่นที่ติดอยู่ในเทอมของตัวแปรค่า t และพารามิเตอร์อื่น ๆ ของแต่ละกลุ่มประชากรที่กำลังศึกษาอยู่ ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า mgf ก็คือ "ฟังก์ชั่นที่ให้กำเนิดหรือก่อให้เกิด (Generate)" โมเมนต์ (Raw Moment) ที่เป็นฟังก์ชั่นเพราะ mgf ได้จากการหาค่าคาดหมายของฟังก์ชั่น e^{tX}

4. mgf ของตัวแปรสุ่ม X (ประชากร X) บางตัวอาจไม่ปรากฏค่า (ไม่ exist) หมายความว่าบางกลุ่มประชากรหรือ Probaility Law บางเรื่องอาจไม่ให้ mgf ซึ่งเมื่อพบกรณีเช่นนี้เราสามารถเลี่ยงไปใช้ Characteristic Function แทน เพราะตัวแปรสุ่ม (X) ทุกตัวจะต้องให้ Characteristic Function เสมอ ในทุกค่าของ t

Characteristic Function ของตัวแปรสุ่ม X นิยามได้ดังนี้

$$C_X(t) = E(e^{itX}) = \begin{cases} \Sigma e^{itx}P(X = x) : \text{กรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบตัดตอน} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx : \text{กรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง} \end{cases}$$

โดยที่ $i = \sqrt{-1}$ และ t เป็นตัวแปรค่า (Real Variable)

ที่กล่าวว่า $C_X(t)$ ของตัวแปรสุ่ม X จะปรากฏเสมอในทุกค่าของ t หมายความว่า เมื่อ $x \to \infty$ และ $t > 0$, e^{tx} จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว $f_X(x)$ จะต้องมีค่าต่ำลง (ใกล้ 0) อย่างรวดเร็วในขณะเดียวกัน ทั้งนี้ก็เพื่อให้ Intregral หรือ Sum ลู่เข้าสู่ $+t$ และเมื่อ $x \to -\infty$ และ $t < 0$, e^{tx} จะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว ซึ่ง $f_X(x)$ จะต้องมีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว (ใกล้ 0) เพื่อให้ Intregral หรือ Sum ลู่เข้าสู่ $-t$

5. การที่กล่าวว่า mgf คือฟังก์ชั่นที่ให้กำเนิดโมเมนต์ (Raw Moment) นั้น เป็นการกล่าวถึงสาเหตุของการมีชื่อเรียกดังกล่าว กล่าวคือเมื่อเราหาอนุพันธ์ (Derivative) ของ mgf. เทียบต่อ t แล้วประเมินค่า ณ. ค่า $t = 0$ จะทำให้ได้โมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม

พิจารณา

จาก $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f_X(x)dx$

$M'_X(t) = \frac{d}{dt} M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx}f_X(x)dx$[1]

=> $M'_X(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = E(X) =$ โมเมนต์ที่ 1 รอบจุดกำเนิด[2]

$M''_X(t) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{tx}f_X(x)dx$

คำว่า Variate หมายถึงตัวแปรสุ่ม (Random Variable)

[1] จะกล่าวถึง Differentiate of Intregral ในตอนท้ายของบทนี้

[2] การประเมินค่าของอนุพันธ์ของ mgf ณ. ค่า $t = 0$ อาจใช้เขียนแทนด้วย $M'_X(t)\Big|_{t=0}$ หรือ $M'_X(0)$ ก็ได้

$$\Rightarrow \quad M''_X(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = E(X^2) = \text{โมเมนต์ที่ 2 รอบจุดกำเนิด}$$

$$\vdots$$

$$M^n_X(t) = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{tx} f_X(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad M^n_X(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx = E(X^n) = \text{โมเมนต์ที่ n รอบจุดกำเนิด}$$

สำหรับกรณี Central Moment ก็ดำเนินการได้ในทำนองเดียวกัน[1]

6. ในกรณีการหาโมเมนต์ของตัวสุ่มด้วยวิธีของ mgf เป็นไปได้ด้วยความยากลำบากและค่อนข้าง "งุ่มง่าม" โดยเฉพาะอย่างยิ่งการหาโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มที่เป็นแบบตัดตอน (Discrete) เช่น Hypergeometric Distribution เมื่อปรากฏสถานการณ์เช่นนี้เราจะเลี่ยงการหาโมเมนต์จาก mgf มาเป็น Factorial Moment และแทนที่จะใช้ mgf ก็กลับใช้ Factorial Moment Generating Function ดังนิยาม

นิยาม 3.2 เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ Factorial Moment ที่ r^{th} ของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$E\left(\prod_{k=1}^{r} (X-k+1)\right) = E(X(X-1)(X-2)\ldots(X-r+1))$$

นิยาม 3.3 เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ Factorial Moment Generating Function (fmgf) คือ

$$E(t^X) = \begin{cases} \Sigma\, t^x p(X=x) & : \text{กรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบตัดตอน} \\ \int_{-\infty}^{\infty} t^x f_X(x)dx & : \text{กรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง} \end{cases}$$

เมื่อ $-h < t < h,\ h > 0$ เป็นตัวแปรใด ๆ (Real Variable)

ข้อสังเกต

ขอให้ข้อสังเกตสำหรับเรื่องนี้ไว้เป็น 4 ประการคือ

1. mgf เป็นฟังก์ชั่นที่ใช้สำหรับหาโมเมนต์ชนิด Raw Moment จะประเมินค่าอนุพันธ์ของ mgf ณ. ค่า $t = 0$ ส่วน fmgf ใช้สำหรับหาโมเมนต์ชนิด Factorial Moment จะประเมินค่าอนุพันธ์ของ fmgf ณ. ค่า $t = 1$ ทั้งสองวิธีนี้ให้ผลลัพธ์ (โมเมนต์) ตรงกัน แต่ mgf นิยมใช้กว้างขวางกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของการหาการแจกแจงของตัวสถิติ

---

[1] กรณี Central Moment

$M_{X-E(X)}(t) = E(e^{t(X-E(X))})$ ดังนั้น $M^n_{X-E(X)}(t) = E(X-E(X))^n$

2. fmgf มักใช้กับตัวแปรสุ่มแบบตัดตอน

3. เรื่องของโมเมนต์และ Generating Function ยังมีอีกหลายวิธี เช่น Cumulant (หรือ Semi Invariants) และ Cumulant Generating Function แต่จะไม่กล่าวถึงในที่นี้

4. เจตนาประการที่สำคัญของการศึกษาเรื่อง mgf คือจะนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาการแจกแจงของตัวสถิติ (Sampling Distribution หรือ Derived Distribution)

ตัวอย่าง 3.1 สมมุติตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงดังนี้

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$ [1]

จงคำนวณหาค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X โดยวิธี mgf และ fmgf

วิธีทำ

ก. โดยวิธี mgf

จาก $f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

$$=> \quad M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

โดยอาศัยการกระจายเทย์เลอร์ของ $y = e^u$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{u^x}{x!}$$

$$=> \quad M_X(t) = e^{-\lambda}e^{(\lambda e^t)}$$

$$= e^{\lambda e^t - \lambda}$$

$$= e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt} e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$= e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t$$

---

[1] โดยปกตินิยมเรียกการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบตัดตอนว่า Probability Function ใช้สัญลักษณ์ P(.) เช่น P(X = x) ส่วนตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง นิยมเรียกว่า Probability Density Function ใช้สัญลักษณ์ f(.) เช่น $f_X(x)$ ในลำดับตั้งแต่นี้ต่อไปเพื่อความสะดวกจะใช้สัญลักษณ์ f(.) กับตัวแปรสุ่มทั้งสองแบบ การจะสังเกตว่า f(.) เป็นการแจกแจงแบบใดขอให้นักศึกษาสังเกต Domain ของตัวแปรสุ่มนั้นแทน

ดังนั้นค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X คือ $E(X) = M_X'(t)\Big|_{t=0} = \lambda$

ข. โดยวิธี fmgf

$$\text{จาก} \quad f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \text{fmgf} = E(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{t^x e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}.e^{\lambda t} \quad \text{(อาศัย Taylor Expansion ของ } e^u\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} E(t^X) = \frac{d}{dt} e^{\lambda(t-1)} = \lambda e^{\lambda(t-1)}$$

ดังนั้นค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X คือ $E(X) = \lambda e^{\lambda(t-1)}\Big|_{t=1} = \lambda$

ตัวอย่าง 3.2 ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบ $N(\mu, \sigma^2)$ จงหา mgf ของ X พร้อมทั้งแสดงให้เห็นว่า $E(X) = \mu$ และ $V(X) = \sigma^2$

วิธีทำ

$$\text{จาก} \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

$$\Rightarrow \quad M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - \frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 dx$$

ให้ $\frac{x-\mu}{\sigma} = u$ ดังนั้น $x = \mu + \sigma u$ และ $dx = \sigma du$

$$=> \qquad M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\mu+\sigma u)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\sigma u - u^2/2} du$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\sigma u + t^2\sigma^2/2 - t^2\sigma^2/2 - u^2/2} du$$

$$= \frac{e^{\mu t + t^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2/2 - t\sigma u + t^2\sigma^2/2)} du$$

$$= \frac{e^{\mu t + t^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u/\sqrt{2} - \sigma t/\sqrt{2})^2} du$$

$$= \frac{e^{\mu t + t^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-\sigma t)^2} du$$

ให้ $u - \sigma t = v$ ดังนั้น $du = dv$

$$=> \qquad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-V^2/2} dv = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$$=> \qquad M_X'(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} . (\mu + \sigma^2 t)$$

$$=> \qquad E(X) = M_X'(t) \Big|_{t=0} = \mu$$

$$M_X''(t) \Big|_{t=0} = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} (\mu + \sigma^2 t)^2 + \sigma^2 e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$$

$$=> \qquad V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2$$

$$= \sigma^2$$

3.3 คุณสมบัติของ mgf

mgf มีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎี 3.1 สมมุติว่าตัวแปรสุ่ม X มี mgf เป็น $M_X(t)$ ถ้าตัวแปรสุ่มตัวใหม่ Y มีลักษณะดังนี้คือ $Y = aX + b$ โดยที่ a และ b เป็นตัวคงที่ แล้ว

$$M_Y(t) = e^{bt}M_X(at)$$

พิสูจน์

เนื่องจาก $Y = aX + b$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{aX+b}(t) \\ &= E(e^{(aX+b)t}) \\ &= E(e^{aXt+bt}) \\ &= E(e^{aXt})E(e^{bt}) \\ &= e^{bt}E(e^{aXt}) \\ &= e^{bt}E(e^{(at)X}) \\ &= e^{bt}M_X(at) \end{aligned}$$

ข้อสังเกต จากทฤษฎี 3.1 ขอให้สังเกตผลลัพธ์แยกเป็น 2 ลักษณะดังนี้

1. ถ้า $a = 0$ แสดงว่า $Y = b$ และถ้า $b \leqslant 1$, $M_Y(t) = E(e^{bt}) = e^{bt}$ แสดงว่าเป็น mgf ของตัวแปรสุ่มที่มีลักษณะการแจกแจงที่คงที่ เช่น Uniform Distribution เช่น $Y = \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ แต่ถ้า $a = 0$ และ $b > 1$ กรณีนี้จะไม่มีความหมายใด ๆ ในเชิงสถิติ

2. ถ้า $b = 0$ แสดงว่า $Y = aX$ ดังนั้น $M_Y(t) = E(e^{(aX)t}) = E(e^{(at)X}) = M_X(at)$ แสดงว่าการหา mgf ของตัวแปรสุ่ม Y ที่เป็นพหุคูณ (Multiple) ของตัวแปรสุ่มเดิม (X) นั้นให้ดำเนินการหาโดยการนำ (at) ไปแทนค่าใน t ใน mgf ของ X

ข้อสังเกตข้อนี้สำคัญมาก เพราะกรณีนี้ถูกนำมาใช้บ่อยครั้ง เช่นในก..สร้าง test สำหรับทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับ Exponential Distribution ($H_0 : \lambda = \lambda_0$ vs. $H_1 : \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$) ซึ่งเราจำเป็นต้องแปลงเขตวิกฤติ $\sum_i^n X_i > k$ เป็น $2\lambda \sum_i^n X_i \geqslant 2\lambda k$ หรือ $\sum_i^n (2\lambda)X_i > (2\lambda k)$ เพื่อความสะดวกในการทดสอบ

ตัวอย่าง 3.3 ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเป็น $N(\mu, \sigma^2)$ มี mgf เป็น $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$ จงหา mgf ของตัวแปรสุ่ม $Y = 2X + 3$ พร้อมทั้งหาค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของ Y

วิธีทำ

จาก $\quad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$

กำหนดให้ $\quad Y = 2X + 3$

ดังนั้นโดยอาศัยทฤษฎี 3.1 จะทำให้ได้ mgf ของ Y ดังนี้

$$M_Y(t) = e^{3t} M_X(2t)$$

$$= e^{3t}.e^{\mu(2t) + \sigma^2(2t)^2/2}$$: นำ (2t) ไปแทนใน t ใน mgf ของ X

$$= e^{(3+2\mu)t + (4\sigma^2)t^2/2}$$

$$M_Y'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{(3+2\mu)t + (4\sigma^2)t^2/2}\right)$$

$$= e^{(3+2\mu)t + 4\sigma^2 t^2/2}.((3+2\mu) + 4\sigma^2 t))$$

$$=> \quad E(Y) = M_Y'(t)\Big|_{t=0} = 3 + 2\mu$$

$$M_Y''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(e^{(3+2\mu)t + (4\sigma^2)t^2/2}\right)$$

$$= e^{(3-2\mu)t + (4\sigma^2)t^2/2}.(4\sigma^2) + ((3 + 2\mu) + 4\sigma^2 t)$$
$$. \ e^{(3+2\mu)t + (4\sigma^2)t^2/2} . ((3 + 2\mu) + 4\sigma^2 t)$$

$$=> \quad M_Y''(t)\Big|_{t=0} = 4\sigma^2 + (3 + 2\mu)^2$$

จาก $\quad V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

$$= M_Y''(t)\Big|_{t=0} - \{M_Y'(t)\Big|_{t=0}\}^2$$

$$=> \quad = (4\sigma^2 + (3 + 2\mu)) - (3 + 2\mu)$$

$$= 4\sigma^2$$

นั่นคือ เมื่อ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ และ $Y = 2X + 3$ จะพบว่า

$$M_Y(t) = e^{(3+2\mu)t + (4\sigma^2)t^2/2}$$

$$E(Y) = 3 + 2\mu$$

$$V(Y) = 4\sigma^2$$

ตัวอย่างเช่น $X \sim N(10, 1)$ และ $Y = X + \frac{1}{4}$

จะพบว่า $M_Y(t) = e^{(1/4+10)t + t^2/2}$

$$E(Y) = \frac{1}{4} + 10 = 10.25$$

$$V(Y) = 1$$

ตัวอย่าง 3.4 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเป็น $N(\mu, \sigma^2)$ และมี mgf เป็น $e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$ จงหา mgf ของตัวแปรสุ่ม $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ พร้อมทั้งหา E(Z) และ V(Z)

วิธีทำ

เนื่องจาก $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ และ $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$
ดังนั้น

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= M_{X/\sigma - \mu/\sigma}(t) \\
&= E(e^{(X/\sigma - \mu/\sigma)t}) \\
&= e^{(-\mu t)/\sigma} M_{X/\sigma}(t) \\
&= e^{(-\mu t)/\sigma}.M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right) \\
&= e^{(-\mu t)/\sigma}.e^{\mu t/\sigma + \sigma^2(t/\sigma)^2/2} \\
&= e^{-\mu t/\sigma + \mu t/\sigma + t^2/2} \\
&= e^{t^2/2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $M'_Z(t) = \frac{d}{dt} e^{t^2/2} = te^{t^2/2}$

$E(Z) = M'_Z(t) \Big|_{t=0} = 0$

และ $M''_Z(t) = \frac{d^2}{dt^2} (e^{t^2/2}) = t^2e^{t^2/2} + e^{t^2/2}$

$= E(Z^2) = M''_Z(t) \Big|_{t=0} = 1$

ดังนั้น $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z)^2) = 1 - 0 = 1$

นั่นคือ เมื่อ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ และให้ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ แล้ว

$M_Z(t) = e^{t^2/2}$

$E(Z) = 0$

และ $V(Z) = 1$

ทฤษฎี 3.2 ถ้าตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นอิสระต่อกัน (Independent Variates) มี mgf เป็น $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), ..., M_{X_n}(t)$ ตามลำดับ และ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นตัวคงที่ใด ๆ ดังนั้น mgf ของตัวแปรสุ่ม

$$Y = \sum_{i}^{n} a_iX_i = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n \text{ คือ}$$

$$M_Y(t) = \prod_{i}^{n} M_{X_i}(a_it) = M_{X_1}(a_1t).M_{X_2}(a_2t) ... M_{X_n}(a_nt)$$

พิสูจน์ จาก

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n$$

$$=> \quad M_Y(t) = E(e^{(a_1t)X_1}.e^{(a_2t)X_2} ... e^{(a_nt)X_n})$$

เพราะว่า $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น $(a_1t)x_1, (a_2t)X_2, ..., (a_nt)x_n$ เป็นอิสระต่อกันด้วย

$$=> \quad M_Y(t) = E(e^{(a_1t)X_1}) . E(e^{a_2t)X_2}) ... E(e^{(a_nt)X_n})$$

$$=> \quad M_Y(t) = M_{X_1}(a_1t) . M_{X_2}(a_2t) ... M_{X_n}(a_nt) \quad : \text{ทฤษฎี 3.1}$$

ข้อสังเกต

1. a_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ จะมีค่าเป็นเท่าใดก็ได้ ถ้า $a_i = 1; i = 1, 2, \ldots, n$ แสดงว่า $Y = \sum_i^n X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ถ้า $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ แสดงว่า $Y = X_1 - X_2$ ถ้า $a_i = \frac{1}{n}$; $i = 1, 2, \ldots, n$ แสดงว่า $Y = \frac{1}{n} \sum_i^n X_i = \overline{X}$ ดังนี้เป็นต้น

2. $Y = \sum_i^n a_iX_i = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ แสดงว่า Y เป็นฟังก์ชั่นของค่าสังเกตจากกลุ่มตัวอย่างขนาด n หรือนัยหนึ่ง Y เป็นตัวสถิติ (Statistics) ซึ่งเป็นสิ่งที่เราจำเป็นต้องหาการแจกแจงของมันเพื่อการอนุมานทางสถิติ เช่นประมาณค่าพารามิเตอร์ ตรวจสอบนัยสำคัญ (ทดสอบข้อสมมุติฐาน) หาค่าความน่าจะเป็น กำหนดขนาดตัวอย่างที่เหมาะสม (Optimal Sample Size) และอื่น ๆ โดยปกติในสถานการณ์ทางปฏิบัติเรามักพบเห็นตัวสถิติรูปนี้บ่อยครั้งที่สุด

ตัวอย่าง 3.5 ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีการแจกแจงแบบ $N(\mu, \sigma^2)$ หรือนัยหนึ่ง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็น Sampled Random Variable ขนาด n ที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากร X ที่มีการแจกแจงแบบ $N(\mu, \sigma^2)$

ก. จงหา mgf ของตัวแปรสุ่ม $Y = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \ldots + \frac{1}{n} X_n = \overline{X}$ พร้อมทั้งหาค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนของ Y

ข. ถ้า $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ และ $N_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ จงหา mgf ของตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 - X_2$ พร้อมทั้งหา E(Y) และ V(Y)

วิธีทำ

จากตัวอย่าง 3.3 แสดงว่าเมื่อ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$

ดังนั้น เมื่อกำหนดให้ $Y = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \ldots + \frac{1}{n} X_n$

$$\Rightarrow \quad M_Y(t) = M_{X_1(t/n)} M_{X_2(t/n)} \ldots M_{X_n(t/n)} \quad \text{ทฤษฎี 3.2}$$

$$= e^{\mu.t/n + \sigma^2(t/n)^2/2} . e^{\mu.t/n + \sigma^2(t/n)^2/2} \ldots e^{\mu.t/n + \sigma^2(t/n)^2/2}$$

$$= e^{\sum_i^n \mu t/n + \sum_i^n \sigma^2/n^2 . t^2/2}$$

$$\Rightarrow \quad M_Y(t) = e^{\mu t + \sigma^2/n . t^2/2}$$

ดังนั้น

$$M'_Y(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\mu t + \sigma^2/n.t^2/2}\right)$$

$$= e^{\mu t + \sigma^2/n.t^2/2}\left(\mu + \frac{\sigma^2 t}{n}\right)$$

ดังนั้น $$E(Y) = M'_Y(t)\Big|_{t=0} = \mu$$

และ

$$M''_Y(t) = \frac{d}{dt^2}\left(e^{\mu t + \sigma^2/n.t^2/2}\right)$$

$$= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{n}t\right)^2 . e^{\mu t + \sigma^2/n.t^2/2} + \frac{\sigma^2}{n} \cdot e^{\mu t + \sigma^2/n.t^2/2}$$

$$E(Y^2) = M''_Y(t)\Big|_{t=0} = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

ดังนั้น $$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

นั่นคือ เมื่อ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกันและต่างก็มีการแจกแจงแบบ $N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว จะพบว่า ตัวแปรสุ่ม $Y = \bar{X}$ จะมี mgf ค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนเป็น

$$M_Y(t) = e^{\mu t + \sigma^2/n.t^2/2}$$

$$E(Y) = \mu$$

$$V(Y) = \frac{\sigma^2}{n}$$

ข. เนื่องจาก $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ดังนั้น $M_{X_1}(t) = e^{\mu_1 t + \sigma_1^2.t^2/2}$

และ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ดังนั้น $M_{X_2}(t) = e^{\mu_2 t + \sigma_2^2.t^2/2}$

ให้ $Y = X_1 - X_2$

ดังนั้น

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \,.\, M_{X_2}(-1.t)$$

$$= e^{\mu_1 t + \sigma_1^2.t^2/2} \,.\, e^{\mu_2(-t) + \sigma_2^2.(-t)^2/2}$$

ดังนั้น

$$M_Y'(t) = \frac{d}{dt}\, e^{(\mu_1-\mu_2)t + (\sigma_1^2+\sigma_2^2).t^2/2}$$

$$= e^{(\mu_1-\mu_2)t + (\sigma_1^2+\sigma_2^2).t^2/2}.((\mu_1-\mu_2) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t)$$

=>

$$E(Y) = M_Y'(t) \Big|_{t=0}$$

$$= \mu_1 - \mu_2$$

และ

$$M_Y''(t) = ((\mu_1 - \mu_2) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t)^2 \,.\, e^{(\mu_1-\mu_2)t + (\sigma_1^2+\sigma_2^2).t^2/2}$$

$$+ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \,.\, e^{(\mu_1-\mu_2)t + (\sigma_1^2+\sigma_2^2).t^2/2}$$

$$E(Y^2) = M_Y''(t) \Big|_{t=0}$$

$$= (\mu_1 - \mu_2)^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

ดังนั้น

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = (\mu_1 - \mu_2)^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - (\mu_1 - \mu_2)^2$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

ดังนั้นเมื่อ $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ และ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ เป็นอิสระต่อกัน และ $Y = X_1 - X_2$ จะได้

$$M_Y(t) = e^{(\mu_1-\mu_2)t + (\sigma_1^2+\sigma_2^2).t^2/2}$$

$$E(Y) = \mu_1 - \mu_2$$

และ

$$V(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

ตัวอย่าง 3.5 ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบ Exponential มีพารามิเตอร์ λ และ pdf ดังนี้

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \;;\quad x \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0$$

ก. จงหา mgf ของตัวแปรสุ่ม X พร้อมทั้ง E(X) และ V(X)

ข. สุ่มตัวอย่าง (Sampled Random Variable) มา n ชุดคือ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ จงหา mgf ของ

$$Y = \sum_{i}^{n} X_i \text{ และ } Y = 2\lambda \sum_{i}^{n} X_i$$

วิธีทำ

ก. จาก $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \;;\quad x \geqslant 0$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x}\, dx \\ &= \lambda \cdot \frac{1}{\lambda - t} \qquad : \text{อาศัย Gamma Function}^{1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad M_X(t) = \frac{1}{1 - t/\lambda}$$

ดังนั้น

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{(1 - t/\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{(1 - t/\lambda)^2}$$

$$\Rightarrow \quad E(X) = M_X'(t) \Big|_{t=0}$$

$$= 1/\lambda$$

---

[1] Gamma Function นิยามดังนี้ $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$

และ $$M''_X(t) = \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{1}{(1 - t/\lambda)} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{2}{(1 - t/\lambda)^3}$$

=> $$E(X) = M''_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

ดังนั้น $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda}$$

ดังนั้น เมื่อตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบ Exponential (λ) จะมี mgf ค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวนดังนี้คือ

$$M_X(t) = \frac{1}{(1 - t/\lambda)} \quad \text{หรือ } (1 - t/\lambda)^{-1}$$

$$E(X) = V(X) = \frac{1}{\lambda}$$

ข. เนื่องจาก $X_i \sim EX(\lambda)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ และเป็นอิสระต่อกัน

และ $$Y = \sum_i^n X_i$$

ดังนั้น $$M_Y(t) = \prod_i^n M_{X_i}(t) = \frac{1}{(1 - t/\lambda)} \cdot \frac{1}{(1 - t/\lambda)} \cdots \frac{1}{(1 - t/\lambda)}$$

$$= (\frac{1}{1 - t/\lambda})^n$$

นั่นคือ mgf ของ Y เมื่อ $Y = \sum_i^n X_i$ คือ $(\frac{1}{1 - t/\lambda})^n$ หรือ $(1 - t/\lambda)^{-n}$

สำหรับ กรณี $$Y = 2\lambda \sum_i^n X_i$$

จะพบว่า

$$M_Y(t) = M_{2\lambda X_1}(t) \,.\, M_{2\lambda X_2}(t) \ldots M_{2\lambda X_n}(t)$$

$$= M_{X_1}(2\lambda t) \,.\, M_{X_2}(2\lambda t) \ldots M_{X_n}(2\lambda t)$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{2\lambda t}{\lambda})} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{2\lambda t}{\lambda})} \cdots \frac{1}{(1 - \frac{2\lambda t}{\lambda})}$$

$$= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{2n/2}$$

$$=> \qquad M_Y(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{2n/2} = (1-2t)^{-2n/2}$$

นั่นคือ mgf ของ Y เมื่อ $Y = 2\lambda \sum_{i}^{n} X_i$ คือ $M_Y(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{2n/2}$ หรือ $(1-2t)^{-2n/2}$

หมายเหตุ

1. $M_Y(t) = \left(\frac{1}{1-t/\lambda}\right)^n$ คือ mgf ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) ที่มีพารามิเตอร์เป็น λ และ n

2. $M_Y(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{2n/2}$ คือ mgf ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไคกำลังสอง (χ^2-Distribution) ที่มี Degree of Freedom เท่ากับ 2n

กรณีของตัวอย่างนี้ นำไปใช้สำหรับทดสอบข้อสมมุติฐานของพารามิเตอร์ λ สำหรับตัวแปรสุ่มแบบ Exponential

ทฤษฎี 3.3 ให้ X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่มี mgf เป็น $M_{X_1}(t)$ และ $M_{X_2}(t)$ ตามลำดับ ถ้า $M_{X_1}(t) = M_{X_2}(t)$ ในทุกค่าของ t แล้ว X_1 และ X_2 จะมีการแจกแจงเดียวกัน

ทฤษฎีนี้เรียกว่า Uniquness Theorem เป็นทฤษฎีที่จะนำมาใช้สำหรับหาการแจกแจงของตัวสถิติโดยแท้จริง

สามารถสรุปสาระสำคัญของทฤษฎีได้ง่าย ๆ ดังนี้ "เมื่อเราทราบว่า mgf ของตัวแปรสุ่มหรือฟังก์ชั่นของตัวแปรสุ่ม (Statistics) ที่กำลังศึกษามีรูปร่างลักษณะ**เช่นเดียวกันหรือคล้ายคลึงกัน**กับ mgf ของตัวแปรสุ่มที่เคยรู้จัก ก็แสดงว่าตัวแปรสุ่มที่กำลังศึกษาอยู่มีการแจกแจงเช่นเดียวกันกับตัวแปรที่เคยรู้จักนั้น"

ตัวอย่างเช่น ทราบว่า mgf ของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงแบบ $N(\mu, \sigma^2)$ คือ $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 . t^2/2}$ และพบว่า mgf ของตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2$ คือ $M_Y(t) = e^{2\mu t + 2\sigma^2 . t^2/2}$ จะเห็นว่า mgf ของ Y มีลักษณะคล้ายคลึงกันกับ mgf ของ X ต่างกันเฉพาะค่าที่คูณอยู่กับ t และ $\frac{t^2}{2}$ และทราบว่า

จาก $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 . t^2/2}$ นั้นค่า μ ที่คูณอยู่กับ t คือ E(X) และค่า σ^2 ที่คูณอยู่กับ $\frac{t^2}{2}$ คือ V(X) ดังนี้ เราก็สามารถสรุปได้ว่า $Y \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$

หรือ ทราบว่า mgf ของตัวแปร X ที่มีการแจกแจงแบบ χ^2 คือ $M_X(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$ และพบว่า mgf ของตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + X_3$ คือ $M_Y(t) = (1 - 2t)^{-6} = (1 - 2t)^{-12/2}$ จะเห็นว่า mgf ของ Y มีลักษณะคล้ายคลึงกับ mgf ของ X และทราบว่า $M_X(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$ นั่นคือ mgf ของตัวแปรสุ่ม χ^2 ที่มี df = n มีค่า E(X) = n และ V(X) = 2n เราจึงสรุปได้ว่าตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบไคกำลังสอง มี df = 12 มีค่า E(Y) = 12 และ V(Y) = 24 ดังนี้เป็นต้น

สำหรับทฤษฎี 3.3 และทฤษฎี 3.4 ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะไม่มีการพิสูจน์ เพียงแต่จะแนะนำให้เห็นประโยชน์และชักตัวอย่างมาประกอบเพื่อให้เข้าใจอย่างชัดเจนเท่านั้น

ตัวอย่าง 3.7 ในการวิเคราะห์สมการถดถอย (Regression Analysis) ของสมการ

$$Y = \alpha + \beta x$$

พบว่าตัวสถิติที่ใช้สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์ β จากวิธี Least Square คือ

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i}^{n} x_i^2}$$

โดยที่ $x_i = X_i - \bar{X}$ เมื่อ X_i เป็น Mathematical Variable มีค่าคงที่ (เพราะว่าเราสามารถกำหนดค่าได้) เพื่อที่จะหาช่วงเชื่อมั่นสำหรับประมาณค่า β เราจำเป็นต้องมีข้อตกลงเบื้องต้น คือให้ $Y \sim N(\alpha + \beta x, \sigma^2)$ จงหาการแจกแจงของตัวสถิติ $\hat{\beta}$ พร้อมทั้งหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ $\hat{\beta}$

วิธีทำ

จาก
$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i}^{n} x_i^2}$$

$$= \sum_{i}^{n} w_i Y_i \quad ; \quad w_i = \frac{x_i}{\sum_{i}^{n} x_i}$$ ถือว่าเป็นตัวคงที่

แสดงว่า $\hat{\beta}$ เกิดจากการประกอบกัน (Linear Combination) ของ Y_i ; i = 1, 2, ..., n เมื่อมีข้อตกลง (Basic Assumption) ว่า $Y \sim N(\alpha + \beta x, \sigma^2)$ แสดงว่า

$$M_Y(t) = e^{(\alpha + \beta x) + \sigma^2 . t^2/2}$$

$$=> \quad M_Y(t) = \prod_i^n M_{Y_i}(w_i t) \quad \text{: ทฤษฎี 3.2}$$

$$= e^{(\alpha + \beta x_1)w_1 t + \sigma^2 .(w_1 t)^2/2} . e^{(\alpha + \beta x_2)w_2 t + \sigma^2 .(w_2 t)^2/2} \ldots$$

$$. e^{(\alpha + \beta x_n)w_n t + \sigma^2 .(w_n t)^2/2}$$

$$= e^{(\sum_i^n (\alpha + \beta x_i) w_i) + (\sum_i^n w_i^2 \sigma^2) . t^2/2}$$

จะเห็นว่า mgf ของ $\hat{\beta}$ มีลักษณะคล้ายคลึงกับ mgf ของ Y

=> $\hat{\beta}$ มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่า $E(\hat{\beta}) = \sum_i^n (\alpha + \beta x_i) w_i$ และ $V(\hat{\beta}) = \sum_i^n w_i^2 \sigma^2$

พิจารณา $E(\hat{\beta})$ และ $V(\hat{\beta})$ จะพบว่า

$$E(\hat{\beta}) = \sum_i^n (\alpha + \beta x_i) w_i$$

$$= \sum_i^n (\alpha w_i) + \sum_i^n \beta x_i w_i$$

$$= \alpha \sum_i^n w_i + \beta \sum_i^n x_i w_i$$

$$= \frac{\alpha \sum_i^n (X_i - \overline{X})}{\sum_i^n x_i^2} + \frac{\beta \sum_i^n x_i x_i}{\sum_i^n x_i^2}$$

$$= 0 + \beta \frac{\sum_i^n x_i^2}{\sum_i^n x_i^2} \qquad \because \sum_i^n (X_i - \overline{X}) = 0$$

$$= \beta$$

และ

$$V(\hat{\beta}) = \sum_{i}^{n} w_i^2\sigma^2$$

$$= \sigma^2 \sum_{i}^{n} w_i^2$$

$$= \sigma^2 \sum_{i}^{n} \left(\frac{x_i}{\sum_{i}^{n} x_i^2}\right)^2$$

$$= \frac{\sigma^2 \sum_{i}^{n} x_i^2}{\left(\sum_{i}^{n} x_i^2\right)^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sum_{i}^{n} x_i^2}$$

นั่นคือ ในการวิเคราะห์ความถดถอย ถ้าเรามีการเพิ่มข้อตกลงเบื้องต้นว่า ตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบปกติ คือ $Y \sim N(\alpha + \beta x, \sigma^2)$ และ $\hat{\beta} = \dfrac{\sum x_i Y_i}{\sum_{i}^{n} x_i^2}$ ดังนี้แล้ว จะสามารถทราบได้ว่า ตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบปกติ มี mgf ค่าคาดหมาย และค่าความแปรปรวนเป็น

$$M_{\hat{\beta}}(t) = e^{\left(\sum_{i}^{n}(\alpha+\beta x_i)w_i\right)t + \left(\sum_{i}^{n} w_i^2\sigma^2\right).t^2/2}$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i}^{n} x_i^2}$$

ซึ่งเมื่อทราบดังนี้ เราก็สามารถตรวจสอบนัยสำคัญทางสถิติเกี่ยวกับพารามิเตอร์ β พร้อมทั้งสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ β ได้ทั้งแบบประมาณด้วยค่าคงที่ (Point Estimation) และประมาณด้วยช่วงเชื่อมั่น (Interval Estimation) ได้

ตัวอย่าง 3.8 ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบแกมม่า มี pdf และ mgf ดังนี้คือ

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x} \quad ; \quad x \geqslant 0 \text{ หรือ } 0 \leqslant x \leqslant \infty$$

และ

$$M_X(t) = (1 - \frac{\lambda}{t})^{-r}$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม X_1 มีการแจกแจงแบบแกมม่า ($\lambda = 1, r = 2$) และ X_2 มีการแจกแจงแบบแกมม่า ($\lambda = 1, r = 1$) จงหา pdf ของ $Y = X_1 + X_2$

วิธีทำ

เนื่องจาก $X_1 \sim$ Gamma ($\lambda = 1, r = 2$)

$$=> \quad f_{X_1}(x) = x_1 e^{-x_1} \quad ; \quad x_1 \geqslant 0$$

ดังนั้น

$$M_{X_1}(t) = \int_0^\infty e^{tx_1}.x_1.e^{-x_1}\, dx_1$$

$$= \int_0^\infty x_1\, e^{-(1-t)x_1}\, dx_1$$

อาศัย Gamma Function $\Gamma(n) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{n-1} e^{-u}\, du$ โดยแปลงรูป $(1 - t)x_1 = u$

$$=> \quad M_{X_1}(t) = \frac{1}{(1 - t)^2} \text{ หรือ } (1 - t)^{-2}$$

เนื่องจาก $X_2 \sim$ Gamma ($\lambda = 1, r = 1$)

$$=> \quad f_{X_2}(x) = e^{-x_2} \quad ; \quad x_2 \geqslant 0$$

ดังนั้น

$$M_{X_2}(t) = \int_0^\infty e^{tx_2}\, e^{-x_2}\, dx_2$$

$$= \int_0^\infty e^{-(1-t)x_2}\, dx_2$$

$$= \frac{1}{(1 - t)} \text{ หรือ } (1 - t)^{-1}$$

ดังนั้น โดยอาศัยทฤษฎี 3.2 จะได้ว่า $M_Y(t)$ เมื่อ $Y = X_1 + X_2$ ดังนี้

$$M_Y(t) = (1 - t)^{-2} . (1 - t)^{-1} = (1 - t)^{-3}$$

จะเห็นได้ว่า mgf ของตัวแปรสุ่ม Y คือ $M_Y(t) = (1 - t)^{-3} = (1 - t/1)^{-3}$ มีลักษณะคล้ายคลึงกับ mgf ของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงแบบแกมม่าคือ $M_X(t) = (1 - t/\lambda)^{-r}$

$$=> \quad Y \sim \text{Gamma}\ (\lambda = 1, r = 3)$$

ทฤษฎี 3.4 ให้ $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มชุดหนึ่ง (Sequence of Random Variables) มี Cumulative Density Function (cdf) เป็น $F_{X_1}, F_{X_2}, ..., F_{X_n}$ และมี mgf เป็น $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), ..., M_{X_n}(t)$ ตามลำดับ และให้ F_x เป็น cdf ของตัวแปรสุ่ม X ที่มี mgf เป็น $M_X(t)$

ถ้าชุดของ cdf คือ $F_{X_1}, F_{X_2}, ..., F_{X_n}$ มีขีดจำกัดเข้าสู่ F_X แล้ว F_X ก็จะสามารถหาได้ด้วยขีดจำกัด (Limit) ของ mgf คือ $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), ..., M_{X_n}(t)$ ที่สอดคล้องกับ cdf ดังกล่าว

หรือนัยหนึ่ง ถ้า $F_{X_n} \to F_X$ จะได้ $M_{X_n}(t) \to M_X(t)$

ทฤษฎีนี้ค่อนข้างจะเข้าใจยาก ดูยุ่งเหยิงและซับซ้อน ความจริงเป็นเรื่องของ Limiting Distribution มีประโยชน์มากในหลายเรื่อง โดยเฉพาะอย่างยิ่งจะนำไปสู่การใช้พิสูจน์ทฤษฎีการโน้มเข้าสู่เกณฑ์กลาง (CLT) และการหาการแจกแจงของการแจกแจงแบบพัวซองและการแจกแจงแบบทวินาม

ในที่นี้จะยังไม่กล่าวถึงตัวอย่างการใช้ประโยชน์จากทฤษฎีนี้ จะยกไปใช้ประโยชน์ในการพิสูจน์ทฤษฎีการโน้มเข้าสู่เกณฑ์กลางซึ่งจะกล่าวถึงในตอนต่อไป

3.4 การแจกแจงของตัวสถิติที่สุ่มตัวอย่างมาจากกลุ่มประชากรปกติ (Sampling Distribution from Normal Population)

การแจกแจงของตัวสถิติอันเนื่องจากการสุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากรปกติที่นิยมใช้อย่างกว้างขวางในปัจจุบันที่สำคัญ ๆ คือการแจกแจงของตัวแปรสุ่มต่อไปนี้

1. $Y = \sum_{i}^{n} a_i X_i$ เมื่อ a_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นตัวคงที่ใด ๆ

2. $Y = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} X_i$

3. $Y = \sum_{i}^{n} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$ และ $Y_i = \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$

4. $Y = \sum_{i}^{n} X_i^2$ และ $Y_i = X_i^2$

5. $S = \frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

6. $t = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{U}}$

7. $F = \frac{U/n}{V/n}$

หมายเหตุ

1. กรณีที่ 2 เป็นกรณีเฉพาะของกรณีที่ 1 เมื่อ $a_i = \frac{1}{n}$; $i = 1, 2, \ldots, n$ และกรณีที่ 4 เป็นกรณีเฉพาะของกรณีที่ 3 เมื่อ $\mu_i = 0$ และ $\sigma_i^2 = 1$

2. สำหรับกรณีที่ 6 และ 7 นั้น $U \sim \chi^2_n$ (อ่านว่า U มีการแจกแจงแบบไคกำลังสองที่มี df = n) และ $V \sim \chi^2_n$ การแจกแจงแบบ χ^2 นี้ได้มาจากกรณีที่ 3 และ 4

ในที่นี้จะแสดงการพิสูจน์เป็นรายกรณีไป เว้นแต่กรณี t และ F เท่านั้นที่จะเว้นการพิสูจน์ไว้ก่อน รอจนกว่าจะศึกษาถึงเรื่องการแปลงรูปตัวแปรสุ่ม (Transformation of Random Variable) เสียก่อน จึงค่อยพิสูจน์

ทฤษฎี 3.5 ถ้าตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงเป็น $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2), \ldots, N(\mu_n, \sigma_n^2)$ ตามลำดับแล้ว ตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_{i}^{n} a_i X_i$ จะมีการแจกแจงแบบ $N(\sum_{i}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$

พิสูจน์

เนื่องจาก $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$; $i = 1, 2, \ldots, n$

$$=> \quad M_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \sigma_i^2 . t^2/2}$$

$$M_Y(t) = M_{X_1}(a_1 t) . M_{X_2}(a_2 t) \ldots M_{X_n}(a_n t)$$

$$= e^{\mu_1(a_1 t) + \sigma^2 .(a_1 t)^2/2} . e^{\mu_2(a_2 t) + \sigma_2^2 .(a_2 t)^2/2} \ldots$$

$$. e^{\mu_n(a_n t) + \sigma^2 .(a_n t)^2/2}$$

$$= e^{(\sum_i^n a_i \mu_i) t + (\sum_i^n a_i^2 \sigma_i^2) . t^2/2}$$

=> ตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบปกติมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\sum_i^n a_i \mu_i$ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ $\sum_i^n a_i^2 \sigma_i^2$ หรือ

$$Y \sim N(\sum_i^n a_i \mu_i, \sum_i^n a_i^2 \sigma_i^2)$$

หมายเหตุ กรณีเฉพาะของทฤษฎี 3.5 ปรากฏดังนี้

1. ถ้า $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ แล้วตัวแปรสุ่ม Y จะมีการแจกแจงแบบ $N(\sum_i^n \mu_i, \sum_i^n \sigma_i^2)$

2. ถ้า $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1, \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$ และ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ แล้ว ตัวแปรสุ่ม Y จะมีการแจกแจงแบบ $N(n\mu, n\sigma^2)$

3. ถ้า $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1/n, \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$ และ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ แล้วตัวแปรสุ่ม $Y = \bar{X}$ จะมีการแจกแจงแบบ $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

4. ถ้า $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ แล้วตัวแปรสุ่ม Y จะมีการแจกแจงแบบ $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

5. ถ้า $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 0$ แล้วตัวแปรสุ่ม Y จะมีการแจกแจงแบบ $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

ตัวอย่าง 3.9 ในการทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มประชากรปกติ และทราบค่าความแปรปรวน σ^2 มีข้อสมมุติฐานดังนี้

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$$

และสามารถคำนวณได้ว่ากติกาสำหรับตัดสินใจเลือกรับข้อสมมุติฐานคือ "จะปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลัก เมื่อ $\sum_i^n X_i \geqslant k$ โดยที่ k เป็นค่าคงที่ใด ๆ ที่สามารถปรับค่าจนกระทั่งได้ค่าความเสี่ยงประเภทหนึ่ง (Type I Error) เท่ากับ α จงคำนวณหากติกาดังกล่าว

วิธีทำ

กลุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากร $N(\mu, \sigma^2)$ โดยที่ σ^2 เป็นพารามิเตอร์ที่ทราบค่า

=> จะปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลัก (H_0) เมื่อ $\sum_i^n X_i \geqslant k$ โดยที่ k สามารถปรับค่าได้จนอยู่ในลักษณะที่ทำให้ Pr (ปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลักเมื่อสมมุติฐานหลักถูกต้อง) = α

$$=> \quad \Pr\{\sum_i^n X_i \geqslant k \mid \mu = \mu_0\} = \alpha$$

ให้ $$Y = \sum_i^n X_i \text{ ดังนั้น } Y \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

ดังนั้น $$\Pr\{\sum_i^n X_i \geqslant k \mid \mu = \mu_0\} = \Pr\left\{\frac{Y - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} \geqslant \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\}$$

$$=> \quad \Pr\left\{\frac{Y - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} \geqslant \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\} = \alpha$$

$$\Pr\left\{Z \geqslant \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\} = \alpha \quad \text{(ดูตัวอย่าง 3.4)}$$

แต่ α เป็นค่าความน่าจะเป็นที่สอดคล้องกับฟังก์ชั่น $\Pr\left\{Z \geqslant \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\}$

ดังนั้น $$\alpha = \Pr\{Z \geqslant Z_{1-\alpha}\}$$

$$=> \quad \Pr\left\{Z \geqslant \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}}\right\} = \Pr\{Z \geqslant Z_{1-\alpha}\}$$

$$=> \quad \frac{k - n\mu_0}{\sqrt{n\sigma^2}} = Z_{1-\alpha}$$

$$=> \quad k = n\mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}$$

นั่นคือเราปฏิเสธข้อสมมุติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$ เมื่อ $\sum_{i}^{n} X_i \geqslant n\mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}$

ในขณะเดียวกัน

ถ้าจะใช้เขตวิกฤติเป็น $\frac{1}{n} \sum_{i}^{n} X_i \geqslant k$ หรือปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลักเมื่อ $\frac{1}{n} \sum_{i}^{n} X_i \geqslant k$

โดยกำหนดให้มีความเสี่ยงประเภทแรกเท่ากับ α เราสามารถแสดงให้เห็นว่าในทำนองเดียวกันได้ว่า

$$k = \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

หรือ

ปฏิเสธข้อสมมุติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1$ เมื่อ $\overline{X} \geqslant \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sigma/\sqrt{n}$

หรือเมื่อ

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geqslant Z_{1-\alpha}$$

ทฤษฎี 3.6 ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบ $N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว ตัวแปรสุ่ม[1] $Y = (\frac{X - \mu}{\sigma})^2$ จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(1)}$ มี pdf เป็น

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-1/2y} \; ; \; y \geqslant 0$$

และมี mgf ค่าคาดหมายและค่าความแปรปรวน เป็น $(1 - 2t)^{-1}$, 1 และ 2 ตามลำดับ

พิสูจน์

$$F_Y(y) = \Pr\{(\frac{X - \mu}{\sigma})^2 \leqslant y\}$$

$$= \Pr\{-\sqrt{y} \leqslant \frac{X - \mu}{\sigma} \leqslant \sqrt{y}\}$$

---

[1] โดยปกติ $\frac{X - \mu}{\sigma}$ เมื่อ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ จะมีการแจกแจงแบบ $N(0, 1)$ เรานิยมใช้ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ ในที่นี้ใช้ Y ในความหมายเดียวกับ Z เพียงแต่เปลี่ยนชื่อเรียกของตัวแปรสุ่มไปเท่านั้น นอกนั้นมิได้ต่างกัน ในที่นี้จะใช้ cdf เทคนิค คือหา pdf จาก cdf กล่าวคือ $F'_Y(y) = f_Y(y)$

$$= \Pr\{\mu - \sigma\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \mu + \sigma\sqrt{y}\}$$

$$= \int_{\mu-\sigma\sqrt{y}}^{\mu+\sigma\sqrt{y}} f_X(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{\mu-\sigma\sqrt{y}}^{\mu+\sigma\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2.(x-\mu)^2/\sigma^2} dx$$

และโดยอาศัยความรู้เรื่อง Differentiation of Integral[1]

ดังนั้น

$$F'_Y(y) = f_Y(y) = \int_{\mu-\sigma\sqrt{y}}^{\mu+\sigma\sqrt{y}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-1/2.(x-\mu)^2/\sigma^2} dx$$

$$+ \frac{d}{dy}(\mu + \sigma\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2((\mu+\sigma\sqrt{y})-\mu)^2/\sigma^2}$$

$$- \frac{d}{dy}(\mu - \sigma\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2((\mu-\sigma\sqrt{y})-\mu)^2/\sigma^2}$$

$$= 0 + \frac{\sigma}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2\sigma^2 y/\sigma^2} - \frac{(-\sigma)}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2\sigma^2 y/\sigma^2}$$

$$= 0 + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot e^{-y/2}$$

$\Rightarrow \quad f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-1/2y} \quad ; \quad y \geqslant 0$ เรียกว่า χ^2-Distribution

นั่นคือเมื่อ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ จะพบว่า $Y = (\dfrac{X-\mu}{\sigma})^2$ จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(1)}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-1/2y} \quad ; \quad y \geqslant 0$$

---

[1] ถ้า $h(x, y) = \int_{r(y)}^{s(y)} g(x, y)dx$ โดย $r(y)$ และ $s(y)$ เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปร Y

ดังนั้น $\dfrac{\partial}{\partial y} h(x, y) = \int_{r(y)}^{s(y)} \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y)dx + \dfrac{d}{dy} s(y)\, g(s(y),y) - \dfrac{d}{dy} r(y) g(r(y),y)$

χ^2-Distribution เป็นกรณีเฉพาะของ Gamma Distribution จะกล่าวถึงอีกครั้งในบทที่ 4

พิจารณา mgf ของ Y จะพบว่า

$$M_Y(t) = \int_0^\infty e^{ty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-1/2y} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{-1/2} e^{-(1/2-t)y} dy$$

ให้ $u = (\frac{1}{2} - t)y$

$$=> \quad M_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{u^{-1/2}}{(\frac{1}{2} - t)^{-1/2}} e^{-u} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2} - t)} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2} - t)^{1/2}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})\text{; อาศัย Gamma Function}$$

$$=> \quad M_Y(t) = \frac{1}{(1 - 2t)^{1/2}} \quad ; \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$M'_Y(t) = \frac{d}{dt}(1 - 2t)^{1/2} = (1 - 2t)^{-3/2}$$

$$=> \quad E(Y) = M'_Y(t)\Big|_{t=0} = 1$$

และ

$$M''_Y(t) = \frac{d^2}{dt^2}(1 - 2t)^{-1/2} = 3(1 - 2t)^{-5/2}$$

$$=> \quad E(Y^2) = 3$$

$$=> \quad V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$= 3 - 1 = 2$$

นั่นคือ เมื่อ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ และ $Y = (\frac{X - \mu}{\sigma})^2$ แล้ว

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot y^{-1/2} e^{-1/2y} \quad ; \quad y \geq 0$$

$$M_Y(t) = \frac{1}{(1 - 2t)^{1/2}}$$

$$E(Y) = 1$$

$$V(Y) = 2$$

บทแทรก 3.1 ถ้า $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \ldots, X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$

และ $Y_1 = (\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1})^2, Y_2 = (\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2})^2, \ldots, Y_n = (\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n})^2$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม $Z = \sum_i^n Y_i = \sum_i^n (\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i})^2$ จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(n)}$ มี mgf เป็น $M_Z(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}$ มีค่าคาดหมายและความแปรปรวนเป็น $E(Z) = n$ และ $V(Z) = 2n$ ตามลำดับ

บทแทรก 3.2 ถ้า $X \sim N(0, 1)$ และ $Y = X^2$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม Y จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(1)}$ มี mgf เป็น $M_Y(t) = \frac{1}{(1-2t)^{1/2}}$ มีค่าคาดหมายและความแปรปรวนเป็น $E(Y) = 1$ และ $V(Y) = 2$ ตามลำดับ

บทแทรก 3.3 ถ้า $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 1), \ldots, X_n \sim N(0, 1)$ และ $Y_1 = X_1^2, Y_2 = X_2^2, \ldots, Y_n = X_n^2$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม $Z = \sum_i^n Y_i = \sum_i^n X_i^2$ จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(n)}$ มี mgf เป็น $M_Z(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}$ มีค่าคาดหมายและความแปรปรวนเป็น $E(Z) = n$ และ $V(Z) = 2n$ ตามลำดับ

บทแทรก 3.4 ถ้าตัวแปรสุ่ม $X_1 \sim \chi^2_{(n_1)}, X_2 \sim \chi^2_{(n_2)}, \ldots, X_r \sim \chi^2_{(n_r)}$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_i^n X_i$ จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(n_1+n_2+\ldots+n_r)}$ มี mgf เป็น $M_Y(t) = \frac{1}{(1-2t)^{(n_1+n_2+\ldots+n_r)/2}}$ มีค่าคาดหมายและความแปรปรวนเป็น $E(Y) = (n_1 + n_2 + \ldots + n_r)$ และ $V(Y) = 2(n_1 + n_2 + \ldots + n_r)$ ตามลำดับ

บทแทรกทั้งสี่นี้นักศึกษาสามารถพิสูจน์ได้เองโดยง่าย โดยอาศัยทฤษฎีที่ 3.2 และ 3.3 เฉพาะกรณีบทแทรก 3.2 และ 3.3 เป็นกรณีเฉพาะเมื่อ $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 1$ ซึ่งก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีที่ 3.6 จึงขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 3.6 และบทแทรกทั้งสี่จะนำไปใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะในการทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ λ ของ Exponential Distribution การทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ เช่น $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2$ และที่สำคัญที่สุดคือการทดสอบข้อสมมุติฐานใน ANOVA นอกจากนั้นยังใช้เป็นหลักหรือแนวทางสำหรับการทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับความเป็นอิสระ (Contingency Table) การทดสอบ Goodness of Fit และ $H_0 : p = p = \ldots = p_k$ (Several Proportion) และอื่น ๆ จะกล่าวถึงเรื่องเหล่านี้อีกครั้งในภายหลัง

ตัวอย่าง 3.10 ตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 เป็นอิสระต่อกันโดยที่ $X_1 \sim N(6, 1)$ และ $X_2 \sim N(7, 1)$ จงคำนวณหา $Pr(X_1 > X_2)$

วิธีทำ จาก $Pr(X_1 > X_2)$

=> สิ่งที่ต้องการคือ $Pr(X_1 - X_2 > 0) = ?$

กรณีเช่นนี้จะเห็นได้ว่า $(X_1 - X_2)$ เป็นตัวสถิติ การจะหาค่าความน่าจะเป็นที่ต้องการได้จะต้องทราบการแจกแจงของ $(X_1 - X_2)$

โดยอาศัยความรู้ในทฤษฎีที่ 3.5

$$\Rightarrow \quad Y = (X_1 - X_2) \sim N((6-7), (1+1))$$
$$\sim N(-1, 2)$$

$$\Rightarrow \quad Pr(X_1 - X_2 > 0) = Pr\left(\frac{(X_1 - X_2) - E(Y)}{\sqrt{V(Y)}} > \frac{0-(-1)}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= Pr\left(Z > \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= Pr(Z > .707)$$
$$= .242$$

ตัวอย่าง 3.11 ตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ $X_1 \sim \chi^2_{(n_1)}$ และ $Y = X_1 + X_2 \sim \chi^2_n$ ในที่นี้ $n > n_1$ จงแสดงให้เห็นว่า $X_2 \sim \chi^2_{(n-n_1)}$

วิธีทำ

เมื่อ $X_1 \sim \chi^2_{(n_1)} \Rightarrow M_{X_1}(t) = (1-2t)^{-n_1/2}$

และ

$$Y \sim \chi^2_n \Rightarrow M_Y(t) = (1-2t)^{-n/2}$$

เนื่องจาก $Y = X_1 + X_2$

ดังนั้น

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \,.\, M_{X_2}(t)$$

$$=> \quad (1-2t)^{-n/2} = (1-2t)^{-n_1/2} \,.\, M_{X_2}(t)$$

$$=> \quad M_{X_2}(t) = (1-2t)^{-n/2-(-n_1/2)}$$

$$= (1-2t)^{-(n-n_1)/2}$$

แสดงว่า $X_2 \sim \chi^2_{(n-n_1)}$

ทฤษฎี 3.7 ในการสุ่มตัวอย่างจากกลุ่มประชากรปกตินั้น ค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง $(\overline{X})$ และค่าความแปรปรวนของตัวอย่าง (S^2) จะเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันเสมอ

ทฤษฎี 3.8 ถ้า $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i^n (X_i - \overline{X})^2$ เป็นตัวสุ่มของ Sample Variance ของกลุ่มตัวอย่างขนาด n ที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากรปกติ $N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว ตัวแปรสุ่ม

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

จะมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(n-1)}$

พิสูจน์

พิจารณาตัวแปรสุ่ม $Z = \sum_i^n (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2$ ในบทแทรก 3.1

จะพบว่า $$\frac{1}{\sigma^2} \sum_i^n (X_i - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i^n (X_i - \overline{X} + \overline{X} - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} (\sum_i^n (X_i - \overline{X})^2 + \sum_i^n (\overline{X} - \mu)^2)$$

$$= (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} + n\frac{(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$$

$$= (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} + (\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2$$

$$=> \quad M_{\sum_i^n (X_i - \mu/\sigma)^2}(t) = M_{(n-1).S^2/\sigma^2}(t) \,.\, M_{(\overline{X} - \mu/\sigma/\sqrt{n})^2}(t)$$

$$=> \quad (1-2t)^{-n/2} = M_{(n-1).S^2/\sigma^2}(t).(1-2t)^{-1/2}$$

$$=> \quad M_{(n-1).S^2/\sigma^2}(t) = (1-2t)^{-(n-1)/2}$$

นั่นคือ $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ และ $E((n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}) = n-1$, $V((n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}) = 2n-2$

ตัวอย่าง 3.12 จงแสดงเหตุผลว่า เพราะเหตุใดจึงไม่นิยมใช้นิยามของ Sample Variance ว่า

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_i^n (X-\bar{X})^2$$

หรือนัยหนึ่ง

เพราะเหตุใดในการหาค่าความแปรปรวนจึงต้องใช้ $(n-1)$ ไปหาร $\sum_i^n (X_i-\bar{X})^2$ ทำไมไม่นิยมใช้ n ไปหาร $\sum_i^n (X_i-\bar{X})^2$

วิธีทำ พิจารณาตัวแปรสุ่ม S^2

ถ้านิยามให้ $S^2 = \frac{1}{n}\sum_i^n (X_i-\bar{X})^2$ เราก็จะสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับในทฤษฎี 3.8 ได้ว่า

$$n\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \text{ มี mgf เป็น } M_{n.S^2/\sigma^2}(t) = (1-2t)^{-(n-1)/2}$$

$$=> \quad E(n\frac{S^2}{\sigma^2}) = n-1$$

เมื่อพิจารณาค่าคาดหมายของ $n\frac{S^2}{\sigma^2}$ จะพบว่า

$$E(n\frac{S^2}{\sigma^2}) = n-1$$

$$=> \quad \frac{n}{\sigma^2} E(S^2) = n-1$$

$$=> \quad E(S)^2 = \frac{(n-1)}{n}\sigma^2$$

$$\neq \sigma^2$$

เทอมไขว้คือ $\sum_i^n (X_i-\bar{X})(\bar{X}-\mu) = (\bar{X}-\mu)\Sigma(X_i-\bar{X}) = 0$

แสดงว่า ถ้านิยามให้ $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ แล้ว S^2 จะเป็น Biased Estimator ของ σ^2 และในทางกลับกัน

ถ้านิยามให้ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ แล้ว จะพบว่า $E(S^2) = \sigma^2$ หรือ S^2 เป็น Unbiased Estimator ของ σ^2

ด้วยเหตุผลนี้เราจึงนิยมใช้สูตรสำหรับคำนวณหาค่าความแปรปรวนเป็น $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X_i - \overline{X})^2$

ตัวอย่าง 3.13 ให้ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ เป็น Sample Variance จงหา pdf, mgf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนของ S^2

วิธีทำ

จากทฤษฎี 3.8 พบว่าตัวแปรสุ่ม $U = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ มีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(n-1)}$

แสดงว่า $S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} U$ หรือ ตัวแปรสุ่ม S^2 เป็นพหุคูณของ U

$$=> \quad M_{S^2}(t) = M_{\sigma^2/n-1.U}(t) = M_U\left(\frac{\sigma^2}{n-1} t\right)$$

$$= \left(1 - 2\frac{\sigma^2}{n-1} t\right)^{-(n-1)/2}$$

$$= \left(1 - \frac{t}{\frac{(n-1)}{2\sigma^2}}\right)^{-(n-1)/2}$$

เห็นได้ว่า mgf ของ S^2 มีลักษณะคล้ายคลึงกับ mgf ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า[1] โดยอาศัยทฤษฎี 3.3

---

[1] ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบแกมม่า X จะมี pdf, mgf ค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$f_X(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x};\ x \geq 0,\ M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r = (1 - t/\lambda)^{-r},\ E(X) = r/\lambda,\ V(X) = r/\lambda^2$$

แสดงว่า S^2 มีการแจกแจงแบบแกมม่า มีพารามิเตอร์ $\lambda = \frac{n-1}{2\sigma^2}$ และ $r = \frac{n-1}{2}$

มี pdf ดังนี้

$$f_{s^2}(s^2) \quad = \quad \left(\frac{n-1}{2\sigma^2}\right)^{(n-1)/2} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot (s^2)^{(n-1)/2-1} e^{-(n-1)/2\sigma^2(s^2)} : s^2 \geqslant 0$$

มีค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

$$E(S^2) \quad = \quad \frac{r}{\lambda} = \left(\frac{n-1}{2}\right)/\left(\frac{n-1}{2\sigma^2}\right) = \sigma^2$$

$$V(S^2) \quad = \quad \frac{r}{\lambda^2} = \left(\frac{n-1}{2}\right)/\left(\frac{n-1}{2\sigma^2}\right)^2 = \frac{2\sigma^4}{(n-1)}$$

หมายเหตุ

เมื่อมีความรู้เรื่องการแจกแจงของ S^2 และ $\overline{X}$ ตามตัวอย่างนี้และตามทฤษฎี 3.5 นักศึกษาสามารถพิสูจน์ความเป็นจริงของทฤษฎี 3.7 ได้ โดยพิสูจน์ให้เห็นว่า Covariance

$$Cov(S^2, \overline{X}) \quad = \quad E(X - \overline{X})(S^2 - \sigma^2) \quad = \quad 0$$

ตัวอย่าง 3.14 ให้ S^2 เป็นความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, ..., X_6)$ ที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากร $N(\mu, 12)$ จงคำนวณหา $Pr(2.30 < S^2 < 22.2)$

วิธีทำ

เราสามารถคำนวณหาความน่าจะเป็นคือ $Pr(2.30 < S^2 < 22.2)$ ได้ 2 วิธีคือ

ก. โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับ pdf ของ S^2 ตามตัวอย่าง 3.13 คือ

$$Pr(2.30 < S^2 < 22.2) \quad = \quad \int_{2.30}^{22.2} f_{s^2}(s^2)ds^2$$

วิธีนี้ค่อนข้าง "งุ่มง่าม" เพราะ pdf ของ S^2 ซับซ้อนรุงรัง แต่ก็สามารถคำนวณหาได้ไม่ยากนักโดยอาศัยตารางการแจกแจงแบบแกมม่า (ดูวิธีใช้ตารางในตัวอย่าง 4.31)

ข. คำนวณโดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับการแจกแจงของ $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$

ในที่นี้จะทำตามวิธี ข. ขอเว้นวิธี ก. ไว้เป็นแบบฝึกหัด

จาก $\quad Pr(2.30 < S^2 < 22.2)$

$$=> \quad Pr(2.30 < S^2 < 22.2) = Pr(2.30\frac{(n-1)}{\sigma^2} < (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} < 22.2\frac{(n-1)}{\sigma^2})$$

$\because$ $n = 6$ และ $\sigma^2 = 12$

$$=> \quad Pr(2.30 < S^2 < 22.2) = Pr((2.3)\frac{5}{12} < \chi^2_{(5)} < (22.2)\frac{5}{12})$$

$$= Pr(.958 < \chi^2_{(5)} < 9.25)$$

$$\cong .900 - .025$$

$$\cong .875$$

ประโยชน์ของการแจกแจงของตัวสถิติตามทฤษฎี 3.6 บทแทรก 3.1, 3.2, 3.3, และ 3.4 และทฤษฎี 3.8 ยังมีอีกมาก จะได้กล่าวถึงอีกครั้งในบทที่ว่าด้วยการทดสอบข้อสมมุติ สำหรับตัวอย่างข้างต้นเป็นประโยชน์ของเรื่องเหล่านี้ในการประมาณค่าตัวแปรสุ่ม S^2 แต่ในสถานการณ์ทางปฏิบัตินั้นเราไม่นิยมทำดังนี้เพราะ σ^2 จะเป็นตัวไม่ทราบค่า หมายความว่าเราจะใช้ประโยชน์ทฤษฎีนี้ไปใช้ในการประมาณค่าหรือทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับ σ^2 โดยอาศัยข้อสนเทศจากค่าของ S^2 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.15 ในการผลิตส้อมเสียง ผู้ผลิตได้สั่งเครื่องจักรชนิดใหม่เข้ามาใช้แทนเครื่องเดิม โดยคาดว่าส้อมเสียงที่ผลิตได้จะให้ความแปรปรวนของช่วงคลื่นลดลง

สุ่มตัวอย่างส้อมเสียงที่ผลิตด้วยเครื่องจักรดังกล่าวมา 20 อันพบว่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานของคลื่นเสียงเท่ากับ 0.7 รอบต่อวินาที จงกะประมาณความเบี่ยงเบนมาตรฐานจริงของช่วงคลื่นด้วยช่วงเชื่อมั่น 90%

วิธีทำ

จากตาราง χ^2 df = 19 พบว่าสำหรับสมการ

$Pr\{\chi^2_{(19)} < a\} = .05$ และ $Pr\{\chi^2_{(19)} > b\} = .05$

จะได้

$a = 10.12$ และ $b = 30.14$

$$=> \Pr\{10.12 < 19\frac{S^2}{\sigma^2} < 30.14\} = 1 - 0.05 - 0.05 = 0.90$$

$\because\ S^2 = (.7)^2 = 0.49$

$$=> \quad 10.12 < \frac{(19)(.49)}{\sigma^2} < 30.14$$

$$\frac{(19)(.49)}{30.14} < \sigma^2 < \frac{(19)(.49)}{10.12}$$

$$.309 < \sigma^2 < .919$$

$$=> \quad .56 < \sigma\ .96$$

นั่นคือ สามารถเชื่อถือได้ถึง 90% ว่าความแปรปรวนจริงของช่วงคลื่นจะตกอยู่ในช่วงคลื่นระหว่าง .56 รอบต่อวินาที ถึง .96 รอบต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.16 (พิสูจน์ทฤษฎีการโน้มเข้าสู่เกณฑ์กลาง)

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน มีการแจกแจงอย่างเดียวกัน และมีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนร่วมกันดังนี้คือ

$$E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = \mu$$

$$V(X_1) = V(X_2) = \ldots = V(X_n) = \sigma^2$$

แล้ว $$\lim_{n\to\infty} \Pr\{a \leqslant \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2} du$$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งเป็นคำพูดได้ว่า ทฤษฎีแนวโน้มเข้าสู่เกณฑ์กลางชี้ให้เห็นว่าการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ จะโน้มเข้าสู่การแจกแจงแบบปกติ N(0, 1) เมื่อ $n\to\infty$

พิสูจน์

ให้ $$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$=> \quad \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{X_2 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} + \ldots + \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

พิจารณา mgf ของ Z_i

$$=> \quad M_{Z_i}(t) = E(e^{tZ_i}) = E(1 + Z_it + \frac{Z_i^2t^2}{2!} + \frac{Z_i^3t^3}{3!} + \ldots)^{1}$$

$$= 1 + tE(Z_i) + \frac{t^2}{2!}E(Z_i^2) + \frac{t^3}{3!}E(Z_i^3) + \ldots$$

$$= 1 + 0 + \frac{t^2}{2!} \cdot \frac{1}{\sigma^2 n} E(X_i - \mu)^2 + \frac{t^3}{3!} \cdot \frac{1}{\sigma^3 n^{3/2}} E(X_i - \mu)^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2!} \cdot \frac{1}{\sigma^2 n} \cdot \sigma^2 + \frac{t^3}{3!} \cdot \frac{1}{\sigma^3 n^{3/2}} \cdot M^3$$

$$+ \frac{t^4}{4!} \cdot \frac{1}{\sigma^4 n^{4/2}} \cdot M^4 + \ldots^{2}$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3!} \cdot \frac{1}{\sigma^3 n^{3/2}} M^3 + \frac{t^4}{4!} \cdot \frac{1}{\sigma^4 n^{4/2}} \cdot M^4 + \ldots$$

$$=> \quad M_{Z_i}(t) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{M^k}{n^{k/2}}$$

ดังนั้น เราสามารถหา mgf ของ $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ได้ดังนี้

$$M_{z_n}(t) = \prod_{i}^{n} M_{Z_i}(t)$$

$$= (1 + \frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k! n^{k/2}})^n \qquad \text{ทฤษฎี 3.2}$$

$$=> \quad \ln M_{z_n}(t) = n \ln (1 + \frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k! n^{k/2}})^{3}$$

$$= n\{(\frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k! n^{k/2}}) - \frac{1}{2}(\frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k! n^{k/2}})^2 + \ldots\}$$

---

[1] เทคนิคประการหนึ่งของการหา mgf โดยเฉพาะกรณีที่ไม่ทราบ pdf ของตัวแปรสุ่มที่กำลังศึกษา สมมุติว่าเป็นตัวแปรสุ่ม X ให้ดำเนินการโดยการแจกแจงเทอม e^{tX} ออกเป็นอนุกรม โดยอาศัย Taylor's Expansion หรือ Mc Claurine's Expansion แล้วจึงค่อยหาค่าคาดหมาย

[2] M^k คือ Central Moment ที่ k M^2 = Central Moment ที่ 2 = σ^2

[3] จาก Mc Claurine's Expansion จะพบว่า

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots \quad \text{ในกรณีนี้ให้} \quad u = \frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k! n^{k/2}}$$

โดยอาศัยทฤษฎี 3.4

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln M_{Z_n}(t) = \frac{t^2}{2}$$

หรือ

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2}$$

แต่ $e^{t^2/2}$ เป็น mgf ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติเมื่อ $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ อาศัยความรู้ตามทฤษฎี 3.4 เราจึงสามารถสรุปได้ว่า

เมื่อ $n\to\infty$ ตัวแปรสุ่ม $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ จะมีการแจกแจงโน้มเข้าสู่ N(0, 1)

ทฤษฎี 3.9 ถ้าตัวแปรสุ่ม U และ Z เป็นอิสระต่อกันโดยที่ $U \sim \chi^2_{(n)}$ และ $Z \sim N(0, 1)$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม

$$t = \frac{Z}{\sqrt{U/n}} = \frac{Z\sqrt{n}}{\sqrt{U}}$$

จะมีการแจกแจงแบบ t ที่มี df = n

ทฤษฎีเกี่ยวกับ t และ F ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปนี้จะยังไม่พิสูจน์ให้เห็นในที่นี้เพราะจำเป็นต้องอาศัยเทคนิคการแปลงรูปของตัวแปรสุ่มซึ่งยังไม่ได้กล่าวถึง แต่จะยกตัวอย่างประกอบให้เห็นประโยชน์เพื่อสามารถนำไปใช้จริงได้

ขอให้สังเกตว่าตัวแปรสุ่ม t เป็นตัวแปรที่เกิดขึ้นจากอัตราส่วนเปรียบเทียบระหว่างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ N(0, 1) และรากที่สองของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ χ^2 df = n หารด้วย df และขอให้สังเกตเพิ่มเติมว่า χ^2 นี้โดยปกติก็คือตัวแปรสุ่มที่เกิดจากสุ่มตัวอย่างมาจากกลุ่มประชากรปกตินั่นเอง

ตัวอย่าง 3.17 เมื่อ $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} X_i$ และ $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ เป็นตัวแปรสุ่มของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากร $N(\mu, \sigma^2)$ จงแสดงให้ว่าตัวแปรสุ่ม $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ มีการแจกแจงแบบ t มี df = n − 1

วิธีทำ

จาก $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$

หารตลอดทั้งเศษและส่วนด้วย σ

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{S/\sigma}$$

$$= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{n-1}{n-1}\frac{S}{\sigma}}}$$

$$= \frac{Z.\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}}}$$

$$= \frac{Z\sqrt{n-1}}{\sqrt{U}} \qquad \because \; (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = U \sim \chi^2_{(n-1)}$$

$$= t \qquad (\text{ทฤษฎี } 3.9)$$

แสดงว่าตัวแปรสุ่ม $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ มีการแจกแจงแบบ t มี $df = n - 1$

หมายเหตุ ในทางปฏิบัติเราจะนำ $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ ไปใช้ ทั้งในการประมาณค่าพารามิเตอร์ μ และทดสอบข้อสมมุติฐานเกี่ยวกับ μ โดยเฉพาะกรณีของกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ (หรือมีข้อตกลงเบื้องต้นกันไว้ว่ากลุ่มประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ) ในการทดสอบข้อสมมุติฐานเราจะใช้ t-test สำหรับกรณีที่ไม่ทราบค่า σ^2 ซึ่งเป็นความแปรปรวนจริงของกลุ่มประชากร อนึ่งตัวสถิติ t นี้พัฒนามาจากแนวคิดของ Gosset[1] ที่เน้นถึงการอนุมานทางสถิติด้วยกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก $(n < 30)$ การใช้ t จึงมีประโยชน์อย่างมากเพราะต้องกับสถานการณ์จริง แต่ทั้งนี้มิได้หมายความว่าเมื่อ $n > 30$ แล้วจะใช้ t ไม่ได้

อนึ่ง ขอให้สังเกตเกี่ยวกับ df ของ t ไว้ด้วยว่า df ของ t ก็คือ df ของ χ^2 ที่เกี่ยวข้อง และถ้ามองให้ลึกลงไปจะพบว่า df ของ χ^2 ก็คือค่าคงที่ที่นำไปหาร $\sum_{i}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ตามนิยามของ S^2 นั่นเอง

---

[1] Gosset ใช้นามแฝงว่า Student เราจึงเรียก t-Distribution ว่า Student's t-Distribution

ถ้านิยามว่า $S^2 = \frac{1}{n-2}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$ เช่นในกรณีของการวิเคราะห์ความถดถอย df ของ t ก็เท่ากับ n − 2 ถ้านิยามว่า $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ซึ่งเป็นกรณีที่นิยมใช้ในทางทฤษฎี df ของ t ก็เท่ากับ n เรื่องนี้นักศึกษาสามารถพิสูจน์ได้เองโดยง่าย

ตัวอย่าง 3.18 กสิกรเจ้าของฟาร์มห่านปรารถนาจะตรวจสอบดูว่าอาหารชนิดใหม่จะมีผลต่อความเปลี่ยนแปลงในด้านน้ำหนักของห่านหรือไม่ กล่าวคือโดยปกติเมื่อห่านอายุประมาณ 1 ปีจะมีน้ำหนักเฉลี่ยประมาณ 6 กิโลกรัม

สุ่มห่านจากในฝูงที่เลี้ยงตามปกติ (อาหารสูตรเดิม) อายุ 9 เดือนมา 5 ตัว แล้วทดลองเลี้ยงด้วยอาหารสูตรใหม่ เมื่อครบ 3 เดือน ปรากฏว่าห่านที่ทดลองเลี้ยงมีน้ำหนักเฉลี่ย 7 กิโลกรัม มีความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ของน้ำหนัก) เท่ากับ 2 กิโลกรัม และสมมุติว่าน้ำหนักของห่านที่เลี้ยงโดยอาหารสูตร ใหม่นี้มีการแจกแจงแบบปกติ

ท่านจงช่วยกสิกรผู้นั้นหาข้อยุติว่าอาหารสูตรใหม่มีผลต่อความเปลี่ยนแปลงในน้ำหนักของห่านโดยใช้ระดับนัยสำคัญ 5%

วิธีทำ

จากโจทย์พบว่า $\bar{X} = 7,\ S = 2,\ n = 5$

$H_0 : \mu = 6$ vs $H_1 : \mu \neq 6$

จากตาราง t พบว่า

$$\Pr\{t > 2.78\} = 0.025 \qquad \Pr\{t < -2.78\} = 0.025$$

$$=> \qquad \Pr\{-2.78 < t < 2.78\} = .95$$

$$=> \qquad \Pr\{-2.78 < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < 2.78\} = .95$$

พบว่า $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{7 - 6}{2/\sqrt{5}} = 1.118$

เห็นได้ว่า $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = 1.118$ อยู่ภายในช่วง (−2.78, 2.78) แสดงว่าเราไม่อาจปฏิเสธข้อสมมุติฐาน $H_0 : \mu = 6$ ได้

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าอาหารสูตรใหม่มิได้มีผลต่อความเปลี่ยนแปลงในน้ำหนักของห่านแต่ประการใด (ณ. ระดับความเสี่ยงประเภทที่ 1 หรือระดับนัยสำคัญ 5%)

ทฤษฎี 3.10 ถ้าตัวแปรสุ่ม U และ V เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ $U \sim \chi^2_{(m)}$ และ $V \sim \chi^2_{(n)}$ แล้วตัวแปรสุ่ม

$$Y = \frac{U/m}{V/n}$$

จะมีการแจกแจงแบบ F มี df = (m, n) เรียกว่า Snedecor's Distribution หรือ Snedecor's F-Distribution

ข้อสังเกต ขอให้สังเกตว่าในเรื่องของ F นั้นเป็นเรื่องของอัตราส่วนระหว่าง U/m และ V/n กรณีที่จะนำไปใช้ในทางปฏิบัติจริงคือกรณีของบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.5 ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากรปกติ $N(\mu_X, \sigma^2)$ และ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากรปกติ $N(\mu_Y, \sigma^2)$ และถ้ากลุ่มตัวอย่างทั้งสองนี้เป็นอิสระต่อกันแล้ว ตัวสถิติ

$$\frac{1}{m-1}\sum_i^m\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 \Big/ \frac{1}{n-1}\sum_i^n\left(\frac{Y_i - \overline{Y}}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sum_i^m (X_i - \overline{X})^2/m-1}{\sum_i^n (Y_i - \overline{Y})^2/n-1} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

จะมีการแจกแจงแบบ F มี df เท่ากับ m − 1 และ n − 1

บทแทรก 3.6

$$F_{1-\alpha;m,n} = \frac{1}{F_{\alpha;n,m}} \quad \text{หรือ} \quad F_{\alpha;n,m} = \frac{1}{F_{1-\alpha;m,n}}$$

พิสูจน์

$$\because \quad \Pr\left\{\frac{U/m}{V/n} \geqslant F_{1-\alpha;m,n}\right\} = \Pr\left\{\frac{V/n}{U/m} \leqslant \frac{1}{F_{1-\alpha;m,n}}\right\} = \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

แต่ $\dfrac{V/n}{U/m} \sim F_{(n,m)}$

$$\Rightarrow \quad \Pr\left\{\frac{V/n}{U/m} \leqslant F_{\alpha;n,m}\right\} = \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\Rightarrow \Pr\left\{\frac{V/n}{U/m} \leqslant \frac{1}{F_{1-\alpha;m,n}}\right\} = \alpha = \Pr\left\{\frac{V/n}{U/m} \leqslant F_{\alpha;n,m}\right\}$$

$$=> \qquad \frac{1}{F_{1-\alpha;m,n}} \quad 3 \quad F_{\alpha;n,m}$$

และ
$$F_{1-\alpha;m,n} = \frac{1}{F_{\alpha;n,m}}$$

หมายเหตุ บทแทรก 3.5 ใช้สำหรับประมาณค่าหรือทดสอบข้อสมมุติฐาน $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ ขอให้สังเกตว่า $\frac{1}{m-1}\sum_{i}^{m}\frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(m-1)}$ เพราะ $\frac{1}{m-1}\sum_{i}^{m}\frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\sigma^2}(m-1)S_X^2 = \frac{(m-1)S_X^2}{(m-1)\sigma^2} = \frac{1}{m-1}\chi^2_{(m-1)}$ และ $\frac{1}{n-1}\sum_{i}^{n}\frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\chi^2_{(n-1)}$

ส่วนบทแทรกที่ 3.6 ใช้สำหรับงานด้านพีชคณิต โดยเฉพาะอย่างยิ่งใช้สำหรับหาค่าเปอร์เซนต์ไทล์ (หรือ F_{tab}) ของ F กรณีที่ตารางนั้นเสนอค่าพื้นที่ใต้โค้งไว้เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง เช่น เสนอเพียงเฉพาะค่า α หรือ $1 - \alpha$ ถ้าเผอิญตารางที่เสนอพื้นที่ไว้ในรูป α แต่เราจำเป็นต้องหาค่า F_{tab} หรือเปอร์เซนต์ไทล์สำหรับพื้นที่ $1 - \alpha$ เราก็สามารถแปลงรูปของ F ที่มีอยู่นั้นให้เข้าสู่รูปที่สามารถใช้กับตารางนั้น ๆ ได้

ตัวอย่าง 3.19 สมมุติปริมาณดีบุกที่สะสมอยู่บนพื้นผิวของเหล็กแผ่น (วัดปริมาณเป็นปอนด์) มีการแจกแจงแบบปกติ ทำการทดลองเปรียบเทียบเครื่องผลิตเหล็กแผ่น 2 เครื่องว่าจะมีความผันผวนในปริมาณดีบุกสะสมในแผ่นเหล็กต่างกันหรือไม่ ปรากฏข้อมูลดังนี้

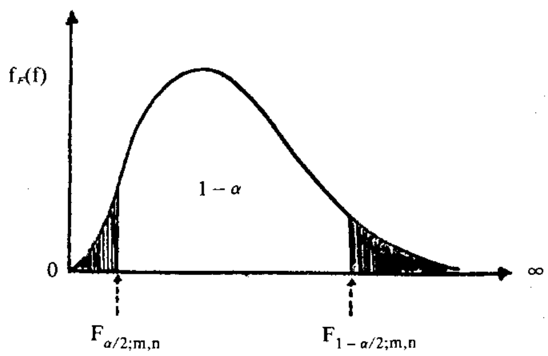
เครื่องที่ 1 (X)	.30	.32	.28	.36	.26	.35	.31	.31	.34	.27
เครื่องที่ 2 (Y)	.27	.31	.22	.36	.29	.25	.33	.31	.27	.29

จงทดสอบข้อสมมุติฐาน $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ vs $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ ใหใช้ระดับนัยสำคัญ 5%

วิธีทำ เราจะปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลักก็ต่อเมื่อ

$$\Pr\{F_{\alpha/2;m,n} \geqslant \frac{S_X^2}{S_Y^2} \geqslant F_{1-\alpha/2;m,n}\} = \alpha$$

ดังภาพ



หรือนัยหนึ่ง

จะปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} \geqslant F_{1-\alpha;m,n} \text{ หรือ } \frac{S_X^2}{S_Y^2} \leqslant F_{\alpha;m,n}$$

ในที่นี้พบว่า $m = n = 10 - 1 = 9, \quad \alpha = .05$

$$S_X^2 = .00113, \quad S_Y^2 = .00162$$

$$F_{.975;9,9} = 4.03, \quad F_{.025;9,9} = .248$$

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} = .6975$$

จะพบว่า $(\frac{S_X^2}{S_Y^2} = .6975) > (F_{.975;9,9} = 4.03)$

แสดงว่าเราปฏิเสธข้อสมมุติฐานหลักนี้ และยอมรับว่า เครื่องจักรทั้งสองมีความผันผวนในการให้ปริมาณดีบุกสะสมบนผิวแผ่นเหล็กแตกต่างกัน

ตัวอย่าง 3.20 ตัวแปรสุ่ม F มีการแจกแจงแบบ F มี df เท่ากับ 15 และ 20

ก. จงหา $F_{.95;15,20}$

ข. จงหา $F_{.05;15,20}$

ค. จงหา $F_{.01;20,15}$

ง. จงหา $Pr(F_{15,20} \geqslant 1.37)$

วิธีทำ **จากตาราง (ตารางที่ใช้นำเสนอพื้นที่ใต้โค้งเฉพาะค่า $1 - \alpha$)**

ก. $F_{.95;15,20} = 2.20$

ข. $F_{.05;15,20} = \dfrac{1}{F_{.95;20,15}} = \dfrac{1}{2.33} = 0.429$

ค. $F_{.01;20,15} = \dfrac{1}{F_{.99;15,20}} = \dfrac{1}{3.09} = 0.334$

ง. $Pr\{F_{15,20} \geqslant 1.37\} = 1 - Pr\{F_{15,20} \leqslant 1.37)\} = .25$

ข้อสังเกต ตัวอย่างข้อ ข. และ ค. เป็นการนำบทแทรก 3.6 มาใช้หาค่าเปอร์เซนต์ไทล์ที่สอดคล้องกับค่าความน่าจะเป็นและ df ที่กำหนดให้ เหตุที่แปลงรูปไปเพราะตารางที่ใช้เสนอค่าความน่าจะเป็นในรูป $1 - \alpha$ สำหรับตัวอย่าง ง. ค่า 1.37 เรียกว่าเปอร์เซนต์ไทล์ ส่วนค่า .25 คือค่าพื้นที่ใต้โค้งของ F หรือค่าความน่าจะเป็น