บทที่ 6
การทดสอบสมมุติฐานในกรณี
SINGLE PARAMETER

การทดสอบสมมุติฐานในกรณี Single Parameter คือการทดสอบสมมุติฐานที่มุ่งสนใจทดสอบหรือตัดสินใจกับเฉพาะพารามิเตอร์เพียงตัวเดียวของกลุ่มประชากรที่สนใจ ทั้งนี้มิได้หมายความว่ากลุ่มประชากรนั้นจะมีพารามิเตอร์เพียงตัวเดียวแต่หมายความว่าเราสนใจทดสอบเฉพาะพารามิเตอร์ตัวใดตัวหนึ่งเท่านั้น ดังนั้น ถ้ากลุ่มประชากรที่สนใจมีพารามิเตอร์เกินกว่าหนึ่งตัวเราจะต้องหาหนทางควบคุมค่าของพารามิเตอร์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับสมมุติฐานเสียก่อน อาจตั้งเป็นข้อกำหนดว่าพารามิเตอร์นั้นเป็นตัวที่ทราบค่าแล้ว หรือมิเช่นนั้นก็อาจประมาณค่าของพารามิเตอร์ตัวนั้นด้วยวิธีการใด ๆ ที่เหมาะสม เช่น ประมาณด้วยวิธีของ Maximum Likelihood Technique หรือ Order Statistics เป็นต้น ตัวอย่างเช่น กลุ่มประชากรปกติเป็นกลุ่มประชากรที่มีพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ μ และ σ^2 ถ้าจะทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย μ เราจะต้องควบคุมค่าของ σ^2 เสียก่อน เช่นอาจถือว่า σ^2 เป็นพารามิเตอร์ที่ทราบค่าแล้วหรือถ้าไม่อาจถือว่า σ^2 เป็นพารามิเตอร์ที่ทราบค่าได้ก็ให้ประมาณค่าของ σ^2 ด้วยค่าประมาณที่เหมาะสม ดังนี้เป็นต้น

สำหรับการทดสอบสมมุติฐานในกรณีของ Two Parameter และ Several Parameter จะได้กล่าวถึงต่อไปในบทที่ 7 และ 8 ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีของ Single Parameter เท่านั้น โดยจะจำแนกการศึกษาออกเป็นกรณีของกลุ่มประชากรปกติและกรณีของกลุ่มประชากรแบบอื่น ๆ เท่าที่เห็นว่าจำเป็นโดยลำดับ ๆ ไป

อนึ่ง ขอย้ำให้เข้าใจร่วมกันไว้ ณ ที่นี้ว่า ในทางปฏิบัตินั้นเราไม่อาจแน่ใจหรือแม้แต่จะกำหนดให้ตัวแปรสุ่มที่กำลังศึกษาอยู่มีการแจกแจงแบบปกติได้เสมอไป ทั้งนี้ย่อมขึ้นอยู่กับสถานการณ์ของตัวแปรสุ่มเองเป็นสำคัญ รายละเอียดเกี่ยวกับสถานการณ์ของตัวแปรสุ่มชนิดต่าง ๆ ซึ่งจะใช้เป็นดัชนีชี้ทิศทางหรือแนวทางให้ทราบว่าตัวแปรสุ่มนั้น ๆ ควรมีการแจกแจงในรูปใดนั้นได้กล่าวไว้โดยละเอียดในบทที่ 3-4 ขอให้นักศึกษาย้อนกลับไปทบทวนให้ดีเสียก่อน

เพราะความรู้ทั้งมวลจากบทที่ 1-4 ล้วนเป็นรากฐานที่สำคัญที่จะต้องนำมาใช้ในบทนี้และบทต่อ ๆ ไปอย่างเข้มข้น ในที่นี้จะถือว่าภาระดังกล่าวเป็นของนักศึกษา การศึกษาในลำดับต่อไปนี้ จะเป็นการพัฒนา test สำหรับทดสอบพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบต่าง ๆ โดยจะถือว่านักศึกษาทราบดีแล้วว่าในสถานการณ์ใดพึงใช้เป็นสถานการณ์ของตัวแปรสุ่มใด และในทางปฏิบัติจะไม่มีใครมาคอยแนะนำว่าประชากรใดมี pdf เป็นแบบใด นักศึกษาจะต้องประเมินได้เองตามความรู้ที่มีอยู่

6.1 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของกลุ่มประชากรปกติ

การพัฒนาตัวทดสอบในตอนนี้จะจำแนกออกเป็น 2 กรณีคือกรณีที่ถือว่าพารามิเตอร์ที่ไม่เกี่ยวข้องกับสมมุติฐานเป็นตัวคงที่ทราบค่าแล้ว[1] กับกรณีที่ถือว่าไม่ทราบค่าหรือไม่อาจทราบค่าได้โดยจำแนกการศึกษาเป็น 2 ตอนคือ ส่วนที่ศึกษาถึงการทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย (μ) และส่วนที่เกี่ยวกับความแปรปรวน (σ^2)

6.1.1 การทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย

กรณีที่ 1 เมื่อทราบค่า σ^2

ก. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1 < \mu_0$

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ (test statistics)

การพัฒนาตัวทดสอบสามารถกระทำได้ดังนี้

สุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ จากกลุ่มประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติคือ $N(\mu, \sigma_0^2)$ [2] ดังนั้น

$$L_0 = \prod_{i}^{n} f_X(x_i; \mu_0, \sigma_0^2)$$

---

[1] โดยปกติพารามิเตอร์ μ และ σ^2 นั้นจะเป็นตัวคงที่ที่ไม่อาจทราบค่าได้ กรณีที่ถือว่าทราบค่าได้หมายถึงกรณีที่ทราบได้โดยอาศัยประสบการณ์ในอดีต เช่นผลการประมาณค่าของนักวิจัยหรือเจ้าหน้าที่ที่เกี่ยวข้องที่ประมาณเอาไว้ หรือค่าที่ได้รับจากงานสำมะโน

[2] "Subscript 0" กำกับไว้ที่พารามิเตอร์ใดชี้ให้เห็นว่าพารามิเตอร์นั้นเป็นค่าคงที่ที่ทราบค่าแล้วเช่น μ_0, σ_0^2 ถ้ายังไม่ทราบค่าจะไม่ใช้ Subscript ใด ๆ กำกับไว้หรืออาจใช้ Subscript อื่น ซึ่งในกรณีนี้จะให้ความหมายที่แปลกไปกว่าเดิมเล็กน้อย เช่นเขียน σ^2 แสดงว่า σ^2 เป็นตัวคงที่ที่ไม่ทราบค่าได้ ถ้าเขียน σ_1^2 แสดงว่า σ^2 นี้เป็นพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกับ H_1 และเป็นตัวคงที่ที่ไม่ทราบค่า

$$= \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x_1-\mu_0)^2\} \cdot \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x_2-\mu_0)^2\}$$

$$\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x_n-\mu_0)^2\}$$

$$= (\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i-\mu_0)^2\}$$

$$L_1 = \prod^n f_X(x_i; \mu_1, \sigma_0^2)$$

$$= \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x_1-\mu_1)^2\} \cdot \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp$$

$$\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x_2-\mu_2)^2\} \quad \ldots \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x_n-\mu_1)^2\}$$

$$= (\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i-\mu_1)^2\}$$

ดังนั้น ถ้า k เป็นตัวคงที่ใด ๆ โดยอาศัย NPL เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก H_0 เมื่อ $L_0/L_1 \leqslant k$

$$\frac{\rule{2cm}{0.4pt})^n \exp\{\rule{3cm}{0.4pt}}{\rule{2cm}{0.4pt})^n \exp\{\rule{3cm}{0.4pt}\sum (x_i-\mu_1)^2\}}$$

$$\Rightarrow \quad \exp\{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i-\mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i-\mu_0)^2\} \leqslant k$$

$$\exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\{\sum_i^n (x_i-\mu_1)^2-\sum_i^n (x_i-\mu_0)^2\}\} \leqslant k$$

$$\exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\{\sum_i^n x_i^2-2\mu_1\sum_i^n x_i+n\mu_1^2-\sum_i^n x_i^2+2\mu_0\sum_i^n x_i-n\mu_0^2\}\} \leqslant k$$

$$=> \ \exp \frac{1}{2\sigma_0^2}\{2(\mu_0-\mu_1)\sum^n x_i+n\mu_1^2-n\mu_0^2\} \leqslant k$$

take log ทั้งสองข้าง [1]

$$=> \quad \frac{1}{2\sigma_0^2}\{2(\mu_0-\mu_1)\sum_i^n x_i+n\mu_1^2-n\mu_0^2) \leqslant \ln k$$

ไขว้เทอมและย้ายค่าคงที่ไปอยู่ข้างขวาของอสมการเพื่อให้ด้านซ้ายเป็นตัวสถิติ

$$=> \quad (\mu_0-\mu_1)\sum_i^n x_i \leqslant (2\sigma_0^2 \ln k - n\mu_1^2+n\mu_0^2)/2$$

ตามสมมุติฐานรองชี้ว่า $\mu_1 < \mu_0$ ดังนั้น $(\mu_0-\mu_1)$ ย่อมมีผลต่างเป็นค่าบวก ดังนั้นเมื่อหารตลอดอสมการข้างบนนี้ด้วย $(\mu_0-\mu_1)$ ผลหารย่อมไม่ทำให้อสมการเปลี่ยนแปลง

ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1 < \mu_0$ เมื่อ

$$\sum_i^n x_i \leqslant \frac{2\sigma_0^2 \ln k - n\mu_1^2+n\mu_0^2}{2(\mu_0-\mu_1)} = k'$$

นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\sum_i^n x_i \leqslant k'$ [2]

---

[1] การ take log ทำให้รูปอสมการลดความซับซ้อนลงและสามารถแยกเอาตัวสถิติออกมาได้โดยง่าย

[2] (1) $\sum_i^n x_i$ ในที่นี้คือตัวสถิติ ดังนั้น $u(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \sum_i^n x_i$

(2) k' คือฟังก์ชั่นของตัวคงที่ k, σ_0^2, μ_1 และ μ_0 ดังนั้น k' ย่อมเป็นตัวคงที่ด้วย

ปัญหาต่อไปก็คือ k' มีค่าเท่าไรทั้งนี้เพราะถ้าทราบค่าของ k' ได้เราก็สามารถตัดสินใจยอมรับหรือปฏิเสธสมมุติฐานได้ การจะทราบค่าของ k' ได้เราจำเป็นต้องทราบการแจกแจงของตัวสถิติ $Y = \sum_{i}^{n} X_i$ แล้วอินทิเกรต (หรือ Sum ถ้าเป็นกรณีของตัวแปรสุ่มแบบตัดตอน) เพื่อคำนวณหาค่า k' ในลักษณะ k' จะต้องเป็นตัวคงที่ที่ทำให้พื้นที่ในเขตวิกฤติมีค่าเท่ากับ α [1] นั่นคือคำนวณหาค่า k' จากสมการของความเสี่ยงประเภทที่ 1 ดังต่อไปนี้

$$\alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0 | H_0\}$$

จากอสมการ $\sum^{n} x_i \leqslant k'$

โดยอาศัยสมการของความเสี่ยงประเภทที่ 1

$$=> \qquad \alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0 | H_0\}$$

$$= \Pr\{\sum^{n} X_i \leqslant k' | \mu = \mu_0\}$$

และ $\because$ เมื่อ $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว $\sum_{i}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma_0^2)$ และ $\dfrac{\sum_{i}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

$$=> \qquad \alpha = \Pr\{\frac{\sum_{i}^{n} X_i - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}} \leqslant \frac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}}\}$$

$$= \Pr\{Z \leqslant \frac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}}\}$$

เมื่อ $\qquad \alpha = \Pr\{Z \leqslant \dfrac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}}\}$ แสดงว่า

---

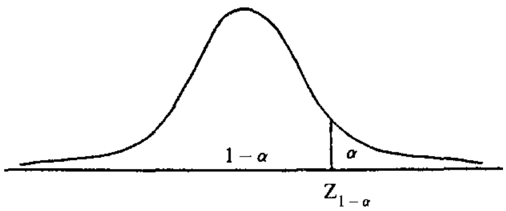
[1] k' คือค่าคงที่ (Quantile) ใด ๆ ใต้โค้งของตัวสถิติ $u(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ ที่สามารถปรับค่าไปมาได้จนกระทั่งทำให้พื้นที่ในเขตวิกฤติมีค่าเท่ากับ α หรือนัยหนึ่ง k' จะสามารถปรับค่าไปมาได้จนกระทั่งทำให้ความเสี่ยงที่จะปฏิเสธสมมุติฐานหลักทั้ง ๆ ที่สมมุติฐานหลักเป็นจริงมีค่าเท่ากับระดับความเสี่ยงสูงสุดที่ผู้วิจัยเองพอจะยอมรับได้ (Maximum Tolerable Level)

α คือค่าความน่าจะเป็นหรือพื้นที่ใต้โค้ง $f_Z(z)$

ดังนั้น $\alpha = \Pr\{Z < Z_\alpha\}$

$$=> \quad \Pr\{Z \leqslant \frac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}} = a = \Pr\{Z \leqslant Z_\alpha\}$$ [1]

ดังนั้น Z_α จึงเป็นค่า Quantile ใต้โค้งของ $f_Z(z)$ ในลักษณะที่ถ้าลากเส้นดิ่งจากจุด Z_α ไปตัดโค้งเส้นดิ่งนี้จะแบ่งพื้นที่ใต้โค้งออกเป็น 2 ส่วน ส่วนซ้ายมีค่าเท่ากับ α ส่วนขวามีค่าเท่ากับ $1 - \alpha$ และ $Z_{1-\alpha}$ จะเป็นค่า Quantile ที่ถ้าลากเส้นดิ่งจากจุด $Z_{1-\alpha}$ ไปตัดเส้นโค้ง $f_Z(z)$ เส้นดิ่งจะแบ่งพื้นที่ใต้โค้ง $f_Z(z)$ ออกเป็น 2 ส่วน ส่วนซ้ายมีค่าเท่ากับ $1 - \alpha$ ส่วนขวามีค่าเท่ากับ α ดังภาพ



ส่วน χ^2, t, F และอื่น ๆ ก็นิยามทำนองเดียวกัน และจะใช้นิยามนี้ต่อไปโดยตลอด ถ้านักศึกษาใช้ตารางที่นิยามค่า Quantile ต่างไปจากนี้ให้พยายามปรับหรือพลิกแพลงการใช้ให้สอดคล้องเหมาะสมกับพัฒนาการของตัวทดสอบ ตามนัยนี้

อนึ่ง $\Pr\{Z < \frac{k' - n\mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\} = \alpha$ แสดงว่า

$$\int_{-\infty}^{(k' - n\mu_0)/\sigma\sqrt{n}} f_Z(z)dz \doteq \alpha$$

$$\alpha = \int_{-\infty}^{Z_\alpha} f_Z(z)dz = \Pr\{Z < Z_\alpha\}$$

---

[1] ในที่นี้จะนิยามค่า $Z_\alpha, \chi^2_\alpha, t_\alpha, F_\alpha, Z_{1-\alpha}, \chi^2_{1-\alpha}, t_{1-\alpha}, F_{1-\alpha}$ ในทำนองเดียวกันในลักษณะของ Quantile คือ $\alpha = \int_{-\infty}^{q.} f_W(w)dw$

ดังนั้น $\alpha = \int_{-\infty}^{Z_\alpha} f_Z(z)dz$ และ $1 - \alpha = \int_{-\infty}^{Z_{1-\alpha}} f_Z(z)dz$

ดังนั้น $\dfrac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}} = Z_\alpha \Rightarrow k' = n\mu_0 + Z_\alpha\sigma_0\sqrt{n}$

นั่นคือ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $\sum^{n} x_i \leqslant n\mu_0 + Z_\alpha\sigma_0\sqrt{n}$ ....(1)

อนึ่ง กติกาการตัดสินใจที่ (1) สามารถแปลงรูปไปสู่รูปอื่น ๆ ได้หลายรูปดังนี้

ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $\bar{x} \leqslant \mu_0 + Z_\alpha\sigma_0/\sqrt{n}$ ....(2)

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $Z_c = \dfrac{\Sigma x_i - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}} \leqslant Z_\alpha$ ....(3)

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $Z_c = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leqslant Z_\alpha$ ....(4)

ขอให้สังเกตว่ากติกาที (2) (3) และ (4) ล้วนแปลงรูปมาจากกติกาที่ (1) กล่าวคือ เมื่อหารตลอดกติกาที่ (1) ด้วย n จะได้กติกาที่ (2) และเมื่อใช้ CLT แปลงรูปกติกาที่ (1) จะได้กติกาที่ (3) ขณะที่ใช้ CLT แปลงรูปกติกาที่ (2) จะได้กติกาที่ (4) นักศึกษาจะนำกติกาใดไปใช้ก็ได้เพราะมีผลเสมอกัน และขอให้สังเกตว่ากติกาที่ (1) และ (3) ตัดสินใจโดยอาศัยยอดรวมขณะที่กติกาที่ (2) และ (4) ตัดสินใจโดยอาศัยค่าเฉลี่ย (Sample Mean)

(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2 (β-error)

สำหรับการคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2 นั้นสามารถกระทำได้ดังนี้

$$\beta(\mu_1) = \Pr\{\text{accept } H_0|H_1\}^{1}$$

$$= \Pr\{\sum_{1}^{n} X_i \geqslant k' | \mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{\sum^{n} X_i \geqslant n\mu_0 + Z_\alpha\sigma_0\sqrt{n} | \mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{\frac{\sum_{1}^{n} X_i - n\mu_1}{\sigma_0\sqrt{n}} \geqslant \frac{n\mu_0 + Z_\alpha\sigma_0\sqrt{n} - n\mu_1}{\sigma_0\sqrt{n}}\}$$

---

[1] $\Pi(\mu_1) = 1 - \beta(\mu_1)$

$$\Rightarrow \quad \beta(\mu_1) = \Pr\{Z > \frac{n\mu_0 - n\mu_1}{\sigma_0\sqrt{n}} + Z_\alpha\}$$ [1]

หรือถ้าใช้กติกาที่ (2) เราจะสามารถคำนวณหาค่า β ได้ดังนี้

$$\beta(\mu_1) = \Pr\{\overline{X} \geqslant k' | \mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{\overline{X} \geqslant \mu_0 + Z_\alpha\sigma_0/\sqrt{n} | \mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geqslant \frac{\mu_0 + Z_\alpha\sigma_0/\sqrt{n} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\}$$

$$= \Pr\{Z > \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0\sqrt{n}} + Z_\alpha)$$

การคำนวณค่า β ให้กระทำโดยเปลี่ยนค่า μ_1 ไปเรื่อย ๆ ในลักษณะ $\mu_1 < \mu_0$ ค่าที่ได้จะเป็น β-error ณ. μ_1 มีค่าเท่ากับค่านั้น ถ้านำคู่ลำดับ $(\mu_1, \beta(\mu_1))$ ไปพล๊อตจะได้โค้ง OC

---

[1] $\beta(\mu_1) = \Pr\{\sum_i^n X_i \geqslant n\mu_0 + Z_\alpha\sigma_0 \sqrt{n} | \mu = \mu_1\}$ หมายความว่า $\beta(\mu_1)$ คือค่าความน่าจะเป็นที่ $\sum_i^n x_i$ มีค่าไม่ต่ำกว่า $n\mu_0 + Z_\alpha\sigma_0\sqrt{n}$ เมื่อ $\mu = \mu_1$ ปัญหาก็คือจะทำอย่างไรจึงจะนำ μ_1 ไปสอดแทรกเข้าไปในอสมการ $\sum_i^n x_i \geqslant n\mu_0 + Z_\alpha\sigma_0\sqrt{n}$ ได้อย่างเหมาะสมและมีความหมาย คำว่ามีความหมายนั้นหมายความว่าเมื่อนำไปใช้แล้วทำให้สามารถทราบ Sampling Dist^n ของตัวสถิติทางซ้ายของอสมการได้ ถ้านำไปใช้อย่างฉลาดแล้วย่อมทำให้ทราบ Sampling Dist^n ได้อย่างรวดเร็ว โดยปกติเราควรพยายามนำไปใช้งานในลักษณะที่ทำให้ตัวสถิติตัวใหม่มีลักษณะรูปร่างที่เราคุ้นเคย ในที่นี้เราทราบว่า $\sum_i^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma_0^2)$ ซึ่ง

$\dfrac{\sum_i^n X_i - n\mu}{\sigma_0\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ ดังนั้นเราจึงนำ $n\mu_1$ ลบตลอด และนำ $\sigma_0\sqrt{n}$ หารตลอด ซึ่งมีผลให้ $\dfrac{\sum_i^n X_i - n\mu_1}{\sigma_0\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

อนึ่งขอให้สังเกตว่าเมื่อนำ μ_1 ไปใช้หรือสอดแทรกลงในอสมการได้แล้วเครื่องหมาย " | " หรือ "given that" จะหายไป

สำหรับในกรณีของความเสี่ยงประเภทที่ 1 ที่ผ่านมาก็พิจารณาในทำนองเดียวกัน ต่างกันแต่เพียงในตอนนั้นเป็นเรื่องของการพยายามนำ μ_0 ไปสอดแทรกในอสมการ

(3) การหาขนาดตัวอย่างอุตมะ (Optimal Sample Size)

ขนาดตัวอย่างอุตมะคือขนาดตัวอย่างที่สอดคล้องกับระดับ α และ β ตามที่นักวิจัยต้องการ หรือนัยหนึ่งขนาดตัวอย่างอุตมะคือขนาดตัวอย่างที่ควบคุมขนาดความเสี่ยงทั้ง α และ β ให้อยู่ในระดับที่นักวิจัยกำหนด เหตุที่ต้องการคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะก็ด้วยเหตุผลที่สำคัญคือ ถ้าขนาดตัวอย่างไม่ใหญ่มากพอ (ซึ่งเป็นสถานการณ์ทางปฏิบัติทั่ว ๆ ไป) แล้วระดับความเสี่ยง α และ β จะผันแปรผกผันต่อกัน เช่น ถ้ากำหนดให้ α มีค่าต่ำผลสะท้อนก็คือ β มีค่าสูง ถ้าต้องการควบคุม β ให้มีค่าต่ำ α จะมีค่าสูง α และ β มักไม่อยู่ในระดับต่ำด้วยกันทั้งคู่ตามความปรารถนาของนักวิจัย ซึ่งเมื่อเป็นเช่นนี้ ถ้านักวิจัยไม่เข้าใจหรือไม่ทราบเทคนิคการคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะมักจะยินยอมให้เกิดความเสี่ยงอย่างใดอย่างหนึ่งมีค่าสูงมาก ซึ่งอาจเป็นไปเพราะความสิ้นหวังทอดอาลัยหรือมิเช่นนั้น ก็อาจเพราะไม่ทราบว่าจะทำอะไรที่ดีไปกว่านี้ได้

การคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะสามารถคำนวณหาได้โดยง่ายโดยอาศัยสมการของความเสี่ยงประเภทที่ 2 ดังนี้

$$\beta(\mu_1) = \Pr\{Z \geqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_\alpha\}$$

แสดงว่า $\beta(\mu_1)$ คือค่าความน่าจะเป็นหรือพื้นที่ใต้โค้ง N(0, 1)

ดังนั้น $\beta(\mu_1) = \Pr\{Z > Z_{1-\beta}\}$

$$\Rightarrow \quad \Pr\{Z \geqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_\alpha\} = \beta(\mu_1) = \Pr\{Z > Z_{1-\beta}\}$$

ดังนั้น
$$\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_\alpha = Z_{1-\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{\sigma_0(Z_{1-\beta} - Z_\alpha)}{\mu_0 - \mu_1}$$

ดังนั้นขนาดตัวอย่างอุตมะคือ $n = \dfrac{\sigma_0^2(Z_{1-\beta} - Z_\alpha)^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$

และด้วยเหตุที่ $Z_{\alpha} = -Z_{1-\alpha}$[1] ดังนั้นเราสามารถเสนอขนาดตัวอย่างอุตมะได้อีกรูปหนึ่งซึ่งให้ผลลัพธ์เท่ากันคือ

$$n = \frac{\sigma_0^2(Z_{1-\beta} + Z_{1-\alpha})^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

ตัวอย่าง 6.1 ฝ่ายผลิตบริษัทจำหน่ายรถยนต์โฆษณาว่ารถยนต์รุ่นล่าสุดของบริษัทสามารถวิ่งในถนนในเขตเมืองโดยสิ้นเปลืองน้ำมันเพียง 15 กม./ลิตร และจะต่างไปจากนี้เพียง 0.8 กม./ลิตร ($\sigma = 0.8$) ทั้งนี้ถือว่าระยะทาง/ลิตร มีการแจกแจงแบบปกติ

เพื่อทดสอบคำโฆษณาดังกล่าวว่าน่าเชื่อถือเพียงใดนักวิจัยทำการสุ่มตัวอย่างรถยนต์รุ่นดังกล่าว 10 คันและตั้งกติกาการตัดสินใจว่า[2] ถ้าระยะทางเฉลี่ย/ลิตร ต่ำกว่า 14.2 กม./ลิตร จะถือว่าคำโฆษณาดังกล่าวเกินความเป็นจริง

ก. อยากทราบว่ากติกาที่ตั้งขึ้นนั้นให้ความเสี่ยงประเภท 1 คิดเป็นร้อยละเท่าไร และถ้าความจริงแล้วรถยนต์รุ่นดังกล่าวกินน้ำมันเฉลี่ย 14 กม./ลิตร อยากทราบว่ากติกาที่เลือกใช้จะใช้ตัดสินใจได้ดีเพียงใด

ข. จงหากติกาการตัดสินใจ (ตัวทดสอบ) ที่เหมาะสมที่สุดสำหรับตัดสินคำโฆษณาข้างต้น และถ้าผลการสำรวจรถยนต์ 10 คัน พบว่าสิ้นเปลืองน้ำมันเฉลี่ย 14.5 กม./ลิตร ท่านจะยอมรับหรือปฏิเสธคำโฆษณาของบริษัท พร้อมทั้งคำนวณหา α และ β สำหรับ $\mu_1 = 14$

วิธีทำ จากสถานการณ์ของตัวอย่างจะพบว่าสมมุติฐานเพื่อการวิจัยควรจะเป็น รถยนต์รุ่นล่าสุดเมื่อวิ่งในเขตเมือง น่าจะสิ้นเปลืองน้ำมันน้อยมากหรือวิ่งได้ถึง 15 กม./ลิตร

$$H_0 : \mu = 15 \text{ vs } H_1 : \mu < 15$$

---

[1] เช่น $Z_{.95} = 1.645$ $Z_{.05}$ -1.645

[2] กติกาการตัดสินใจมีได้มากมายหลายกติกาสำหรับสมมุติฐานเดียวกัน ทั้งนี้แล้วแต่นักวิจัยหรือผู้เชี่ยวชาญเฉพาะสาขาจะกำหนดขึ้น โดยส่วนใหญ่แล้วการกระทำดังกล่าวยึดถือเอาประสบการณ์ ความชำนาญและความสังเกตเป็นเกณฑ์ กติกาเช่นนี้โดยปกติมักมีปัญหาในทางปฏิบัติเสมอเพราะไม่อาจควบคุม α และ β ได้ ดังนั้นในทุกครั้งที่จะใช้ผู้กำหนดกติกาจำเป็นต้องคำนวณดูเสียก่อนว่ากติกาเช่นนั้นให้ α และ β สูงเกินไปหรือไม่ ถ้าสูงเกินไปก็เปลี่ยนกติกาไปสู่กติกาใหม่จนกว่าจะให้ α และ β อยู่ในระดับที่พอยอมรับได้ เพื่อแก้ปัญหาความโกลาหลในเรื่องนี้เนย์แมนและเบียร์สันจึงพัฒนาทฤษฎี NPL ขึ้นใช้เป็นหลักในการพัฒนากติกาการตัดสินใจ ซึ่งผลการพิสูจน์พบว่า NPL ให้ Best Test

ก. นักวิจัยตั้งกติกาตัดสินใจเองว่าจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} < 14.2$

ดังนั้น
$$\alpha = \Pr\{\text{Reject } H_0|H_0\}$$
$$= \Pr\{\bar{X} < 14.2|\mu = 15\}$$

เมื่อ $n = 10, \sigma = .8$

$$\alpha = \Pr\{Z < \frac{14.2 - 15}{.8/\sqrt{10}}\}$$
$$= \Pr\{Z < -\sqrt{10}\}$$
$$= \Pr\{Z < -3.16\}$$
$$= .0027 = .27\%$$

$$\beta(\mu_1) = \Pr\{\bar{X} \geqslant 14.2|\mu = \mu_1 = 14\}$$
$$= \Pr\{Z \geqslant \frac{14.2 - 14}{.8/\sqrt{10}}\}$$
$$= \Pr\{Z > 0.79\}$$
$$= .2148 = 21.48\%$$

นั่นคือ กติกาการตัดสินใจที่ว่า "จะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} < 14.2$" เป็นกติกาที่ให้ความเสี่ยงประเภทที่ 1 เพียง 0.27% ขณะที่ให้ความเสี่ยงประเภทที่ 2 ณ ค่า $\mu = 14$ สูงถึง 21.48%

ข. กติกาที่เหมาะสมที่สุดคือกติกาที่พัฒนาขึ้นมาโดยอาศัย NPL ดังนี้

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $H_0 : \mu = 15$ vs $H_1 : \mu < 15$ เมื่อ $\bar{x} < \mu_0 + Z_\alpha\sigma_0/\sqrt{n}$ และเมื่อกำหนดให้ $\mu_0 = 15, \sigma_0 = 0.8, n = 10$

ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} < 15 + (.8/\sqrt{10})Z_\alpha = 15 + .253Z_\alpha$ และเพื่อให้สามารถเปรียบเทียบกับกติกาในข้อ ก. ได้เราจึงกำหนดให้ใช้ความเสี่ยงประเภทที่ 1 ณ ระดับเดียวกันคือ $\alpha = 0.0027$ ดังนั้น $Z_{.0027} = -3.16$

ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} < 15 + (0.253)(-3.16) = 14.2$

จากการเปรียบเทียบกติกาในข้อ ก. กับกติกาในข้อ ข. ซึ่งพัฒนาขึ้นมาโดยอาศัย NPL พบว่าเป็นกติกาเดียวกัน ดังนั้นกติกาในข้อ ก. ที่นักวิจัยกำหนดขึ้นเองจึงเป็นกติกาที่เหมาะสมที่สุดคือเป็น Best Test

ผลการบันทึกข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่างรถยนต์ 10 คันพบว่ามีอัตราเฉลี่ยของความสิ้นเปลืองน้ำมันเชื้อเพลิงเท่ากับ 14.5 กม./ลิตร ซึ่งมากกว่าค่าวิกฤติคือ $\bar{x} > 14.2$ กม./ลิตร ดังนั้น เราจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลักได้และเชื่อได้ว่าคำโฆษณาของบริษัทมิได้เกินความเป็นจริงแต่ประการใด

ตัวอย่าง 6.2 ตามตัวอย่าง 6.1 ถ้าผู้วิจัยกำหนดว่าจะใช้ Order Statistics เป็นหลักในการตัดสินใจ กล่าวคือจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $Y_{(1)} > k$ เมื่อ $Y_{(1)}$ คือความสิ้นเปลืองน้ำมันของรถคันที่กินน้ำมันมากที่สุด (วิ่งได้ระยะทางเป็น กม./น้ำมัน 1 ลิตรได้น้อยที่สุด)

ก. อยากทราบว่า k มีค่าเท่าไร

ข. กติกาการตัดสินใจมีคุณภาพดีหรือไม่เพียงใดเมื่อเทียบกับกติกาที่ได้จาก NPL ให้ใช้ $\alpha = .05$ ร่วมกันทั้งสองกติกา

วิธีทำ

ก. ให้ $x_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$; $i = 1, 2, \ldots n$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $Y_{(1)} > k$, $k = ?$

จาก

$$\begin{aligned} a &= \Pr\{\text{Reject } H_0|H_0\} \\ &= \Pr\{Y_{(1)} > k|\ \mu = \mu_0\} \\ &= \Pr\{Y_{(1)} > k|\mu = \mu_0\}\Pr\{Y_{(2)} > k|\mu_0\}\ldots\Pr\{Y_{(n)} > k|\mu_0\}^{1} \end{aligned}$$

[1] เมื่อตัวที่มีค่าต่ำสุดมีค่าสูงกว่า แสดงว่าทุกตัวจะต้องมากกว่า k ตัวอย่างเช่นในการสอบครั้งหนึ่งผลการสอบพบว่าคนที่ได้คะแนนต่ำสุดได้คะแนนสูงกว่า 60% ซึ่งมีกติกาว่าผู้ที่สอบได้คะแนนไม่ถึง 60% ถือว่าสอบตก ดังนั้นจึงเห็นว่าผู้ที่ได้คะแนนต่ำสุดสอบได้ และเมื่อเป็นเช่นนี้ผู้เข้าสอบทุกคนจึงสอบได้หมด

$$= \prod^{n} \Pr\{X_i > k|\mu = \mu_0\}$$

$$= \{\Pr\{X_i > k|\mu = \mu_0\}\}^n$$

$$=> \quad \Pr\{X_i > k|\mu = \mu_0\} = \alpha^{1/n}$$

$$\int_k^{\infty} f_X(x;\mu_0,\sigma_0^2)dx = \alpha^{1/n}$$

$$\int_k^{\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x-\mu_0)^2\}dx = \alpha^{1/n}$$

ให้ $$\frac{X-\mu_0}{\sigma_0} = Z$$

$$\int_{(k-\mu_0)/\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}dz = \alpha^{1/n}$$

$$=> \quad \Pr\{Z > \frac{k-\mu_0}{\sigma_0}\} = \alpha^{1/n} = \Pr\{Z > Z_{(1-\alpha)^{1/n}}\}$$

$$\frac{k-\mu_0}{\sigma_0} = Z_{(1-\alpha)^{1/n}}$$

$$k = \mu_0 + \sigma_0 Z_{(1-\alpha)^{1/n}}$$

นั่นคือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก,เมื่อ $Y_{(1)} > \mu_0 + \sigma_0 Z_{(1-\alpha)^{1/n}}$

ข. จาก $$\beta = \Pr\{\text{Accept } H_0|H_1\}$$

$$= \Pr\{Y_{(1)} \leqslant \mu_0 + \sigma_0 Z_{(1-\alpha)^{1/n}}|\mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0} + Z_{(1-\alpha)^{1/n}}\}$$

เมื่อ $n = 10, \alpha = .05$ ดังนั้น $(1-\alpha)^{1/n} = (.95)^{1/10} = .9948$

$$=> \quad \beta_1(\mu_1) = \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0} + Z_{.9948}\} = \Pr\{Z \leqslant \frac{15-\mu_1}{.8} + 2.57\}$$

ขณะเดียวกันกติกาที่ได้จาก NPL ให้ความเสี่ยงประเภทที่ 2 ดังนี้

$$\beta_2(\mu_2) = \Pr\{Z \geqslant \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma_0} + Z_{.05}\} = \Pr\{Z \geqslant \frac{15-\mu_1}{.8} - 1.64\}$$

ข. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ

เมื่อสุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ มาจากกลุ่มประชากรปกติ $N(\mu, \sigma_0^2)$ ดังนั้นโดยอาศัย NPL เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\frac{L_0}{L_1} \leqslant k$$

$$=> \quad \frac{(1/\sigma_0\sqrt{2\pi})^n \exp -\{\sum^n (x_i - \mu_0)^2/2\sigma_0^2\}}{(1/\sigma_0\sqrt{2\pi})^n \exp -\{\sum^n (x_i - \mu_1)^2/2\sigma_0^2\}} \leqslant k$$

$$=> \quad \exp\{\frac{1}{2\sigma_0^2}\{\sum^n (x_i - \mu_1)^2 - \sum^n (x_i - \mu_0)^2\}\} \leqslant k$$

$$\frac{1}{2\sigma_0^2}\{\sum_i^n x_i^2 - 2\mu_1 \sum_i^n x_i + n\mu_1^2 - \sum_i^n x_i^2 + 2\mu_0 \sum_i^n x_i - n\mu_0^2\} \leqslant \ln k$$

$$=> \quad (\mu_0 - \mu_1) \sum^n x_i \leqslant (2\sigma_0^2 \ln k - n\mu_1^2 + n\mu_0^2)/2$$

แต่ $\mu_1 > \mu_0$ ตาม H_1 ดังนั้น $(\mu_0 - \mu_1)$ มีค่าติดลบ เมื่อนำ $(\mu_0 - \mu_1)$ หารอสมการตลอดจึงมีผลให้อสมการเปลี่ยนจาก $\leqslant$ เป็น $>$

$$=> \quad \sum^n x_i > \frac{2\sigma_0^2 \ln k - n\mu_1^2 + n\mu_0^2}{2(\mu_0 - \mu_1)} = k'$$

นั่นคือ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก เมื่อ $\sum^n x_i > k'$

สำหรับค่าของ k' ให้คำนวณหาจากสมการของความเสี่ยงประเภทที่ 1 ดังนี้คือ

$$a = \Pr\{\text{Reject } H_0 | H_0\}$$

$$=> \quad \alpha = \Pr\{\sum^n X_i > k' | \mu = \mu_0\}$$

เนื่องจาก $\sum^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma_0^2)$ ดังนั้นเมื่อ $\mu = \mu_0$ จะมีผลให้ $\sum^{n} X_i \sim N(n\mu_0, n\sigma_0^2)$ และโดยอาศัย CLT

$$=> \qquad \alpha = \Pr\{\frac{\sum^{n} X_i - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}} > \frac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}}\} = \Pr(Z > \frac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}}\}$$

$$=> \qquad \Pr\{Z > \frac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}} = \alpha = \Pr\{Z > Z_{1-\alpha}\}$$ [1]

$$=> \qquad \frac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}} = Z_{1-\alpha}$$

$$k' = n\mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma_0\sqrt{n}$$

ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$

ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $\sum^{n} x_i > n\mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma_0\sqrt{n}$ ....(I)

หรือเมื่อ $\qquad \bar{x} > \mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma_0/\sqrt{n}$

หรือเมื่อ $\qquad Z_c = \frac{\sum^{n} x_i - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}} > Z_{1-\alpha}$

หรือเมื่อ $\qquad Z_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > Z_{1-\alpha}$

(2) การคำนวณหาความเสี่ยงประเภทที่ 2

จากสมการ $\qquad \beta = \Pr\{\text{Accept } H_0|H_1\}$

$=> \qquad \beta(\mu_1) = \Pr\{\sum^{n} X_i \leqslant k'|\mu = \mu_1\}$ [2]

---

[1] $\Pr\{Z > \frac{k' - n\mu_0}{\sigma_0\sqrt{n}}\} = \alpha$

$$=> \qquad \int_{(k' - n\mu_0)/\sigma_0\sqrt{n}}^{\infty} f_Z(z)dz = \int_{Z_{1-\alpha}}^{\infty} f_Z(z)dz$$

[2] จะใช้กติกาใดใน 4 กติกาข้างต้นก็ได้ในที่นี้ยังคงใช้ตามผลการศึกษาครั้งแรก

$$\beta(\mu_1) = \Pr\{\sum_{i}^{n} X_i \leqslant n\mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma_0\sqrt{n} \mid \mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{\frac{\sum^{n} X_i - n\mu_1}{\sigma_0\sqrt{n}} \leqslant \frac{n\mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma_0\sqrt{n} - n\mu_1}{\sigma_0\sqrt{n}}\}$$

=> $$\beta(\mu_1) = \Pr\{Z \leqslant \frac{n\mu_0 - n\mu_1}{\sigma_0\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha}\}$$

หรือ $$\beta(\mu_1) = \Pr\{Z < \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha}\}$$

(3) การหาขนาดตัวอย่างอุตมะ

จาก สมการของความเสี่ยงประเภทที่ 2 ในข้อ (2) คือ

$$\beta(\mu_1) = \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha}\}$$

=> $$\Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha}\} = \beta(\mu_1) = \Pr\{Z \leqslant Z,\}$$

ดังนั้น $$\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha} = Z_\beta$$

$$\sqrt{n} = \sigma_0(Z_\beta - Z_{1-\alpha})/(\mu_0 - \mu_1)$$

นั่นคือ $$n = \sigma_0^2(Z_\beta - Z_{1-\alpha})^2/(\mu_0 - \mu_1)^2$$

หรือ $$n = \sigma_0^2(Z_\beta + Z_\alpha)^2/(\mu_0 - \mu_1)^2 \; ; \because Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$$

หรือ $$n = \sigma_0^2(Z_{1-\beta} + Z_{1-\alpha})^2/(\mu_0 - \mu_1)^2$$

ตัวอย่าง 6.3 บริษัทแห่งหนึ่งที่ท่านทำงานอยู่ต้องการให้ท่านตรวจสอบคุณภาพของผลิตภัณฑ์สินค้าชนิดหนึ่ง สมมุติว่าท่านสุ่มตัวอย่างผลิตภัณฑ์มา 9 หน่วยจากกลุ่มประชากร $N(\mu, 4)$ โดยมุ่งสนใจที่จะทดสอบสมมุติฐานต่อไปนี้

$$Ho : \mu = 20 \text{ vs } H, : \mu = \mu_1 = 22$$

ก. จงหาเขตวิกฤติ ณ. ระดับนัยสำคัญ 5% (หรือเขตวิกฤติขนาดพื้นที่ 5%)

ข. ถ้าตั้งกติกาการตัดสินใจว่าจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก เมื่อ $\bar{x} > 20.855$ และถ้ามีข้อจำกัดว่า

(1) ถ้าหาก H_0 จริงแต่กลับได้รับการปฏิเสธบริษัทจะสูญเสียผลประโยชน์ 200 บาท

(2) ถ้าหาก H_1 จริงแต่กลับได้รับการปฏิเสธบริษัทจะสูญเสียผลประโยชน์ 400 บาท

ข.1 จงคำนวณหาค่าคาดหวัง (Expected Loss) เมื่อ $\mu = 20$

ข.2 จงคำนวณค่าคาดหวัง เมื่อ $\mu = 22$

ข.3 จงคำนวณหาค่าคาดหวังเมื่อโอกาสที่ $\mu = 20$ และ 22 เป็นไปได้ 40% และ 60% หรือ $\Pr\{\mu = 20\} = .40$, $\Pr\{\mu = 22\} = .6$

ค. ถ้าต้องการให้เกิด $\alpha = \beta = .05$ อยากถามว่าควรจะสุ่มตัวอย่างผลิตภัณฑ์มากี่หน่วย

วิธีทำ $H_0 : \mu = 20$ vs $H_1 : \mu = \mu_1 = 22$

ก. ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} > \mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma_0/\sqrt{n}$

เมื่อ $\mu_0 = 20,\ \sigma_0^2 = 4,\ n = 9,\ Z_{.95} = 1.64$

นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ 5% เมื่อ

$$\bar{x} > 20 + (1.64)\frac{2}{3} = 21.09$$

$$\bar{x} > 21.09$$

ข. ตั้งกติกาไว้ว่าจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} > 20.855$ และ

(1) จะสูญเสียผลประโยชน์ 200 บาท ถ้าปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่เป็นจริง

(2) จะสูญเสียผลประโยชน์ 400 บาท ถ้าปฏิเสธสมมุติฐานรองที่เป็นจริง

นั่นคือ

$$\alpha = \Pr\{\text{ปฏิเสธ } H_0|H_0\}\ ;\ \alpha = ?$$

$$\beta = \Pr\{\text{ยอมรับ } H_0|H_1\} = \Pr\{\text{ปฏิเสธ } H_1|H_1\}\ ;\ \beta = ?$$

$$\alpha = \Pr\{\bar{X} > 20.855|\mu = \mu_0 = 20\}$$

$$= \Pr\{Z > \frac{20.855 - 20}{2/3}\} = \Pr\{Z > 1.283\}$$

$$= .1003 = 10.03\%$$

$$\beta(22) = \Pr\{\overline{X} < 20.855 | \mu = \mu_1 = 22)$$

$$= \Pr\{Z < \frac{20.855 - 22}{2/3}\}$$

$$= \Pr\{Z < -1.72) = .04272$$

ให้ L = ความสูญเสีย (loss) อันเนื่องมาจากการตัดสินใจ

L_{11} = ความสูญเสียอันเนื่องมาจากการตัดสินใจปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ถูกต้อง = 200 บาท

L_{12} = ความสูญเสียอันเนื่องมาจากการตัดสินใจปฏิเสธสมมุติฐานหลักที่ไม่ถูกต้อง = 0 บาท

L_{21} = ความสูญเสียอันเนื่องมาจากการยอมรับสมมุติฐานหลักที่ไม่ถูกต้อง = 400 บาท

L_{22} = ความสูญเสียอันเนื่องมาจากการยอมรับสมมุติฐานหลักที่ถูกต้อง = 0 บาท

นั่นคือ $\Pr\{L_{11}\} = a = .1003$

$\Pr\{L_{12}\} = 1 - a = .a997$

$\Pr\{L_{21}\} = \beta = .04272$

$\Pr\{L_{22}\} = 1 - \beta = .95728$

ข.1 ค่าคาดหวังเมื่อ $\mu = 20$ หรือเมื่อสมมุติฐานหลักถูกต้อง (H_0)

$$E(L_1) = L_{11}\Pr(L_{11}) + L_{22}\Pr(L_{22})$$
$$= 200(.1003) + 0(.95728)$$
$$= 20.06 \text{ บาท}$$

ข.2 ค่าคาดหวังเมื่อ $\mu = 22$ หรือเมื่อสมมุติฐานรองถูกต้อง (สมมุติฐานหลักไม่ถูกต้อง)

$$E(L_2) = L_{12}\Pr(L_{12}) + L_{21}\Pr(L_{21})$$
$$= 0(.8997) + 400(.04272)$$
$$= 17.088 \text{ บาท}$$

เมื่อพิจารณา $E(L_1)$ และ $E(L_2)$ จะพบว่า $E(L_2)$ มีค่าต่ำกว่าแสดงว่าเมื่อใช้กติกาการตัดสินใจว่า "จะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\bar{x} > 20.855$" สำหรับสมมุติฐาน $H_0 : \mu = 20$ vs $H_1 : \mu = 22$ เราควรจะตัดสินใจเชื่อว่า $\mu = 22$

ข.3 ค่าคาดหวังที่ $\mu = 20$ และ $\mu = 22$ มีโอกาสเป็นจริงได้ด้วยความน่าจะเป็น 0.4 และ 0.6 ตามลำดับ

เราสามารถแจงค่าความน่าจะเป็นได้ดังนี้

1. $\Pr\{\text{Reject } H_0|\mu = 20\} = .1003$, $\Pr\{\mu = 20) = .40$, Loss = 200

$\Rightarrow \Pr(\text{Reject } H_0, \mu = 20) = (.1003)(.40) = .04012$

2. $\Pr(\text{Accept } H_0|\mu = 20\} = .8997$, $\Pr\{\mu = 20)$ $.40$, Loss = 0

$\Rightarrow \Pr\{\text{Accept } H_0, \mu = 20\} = (.8997)(.40) = .35988$

3. $\Pr\{\text{Accept } H_0|\mu = 22) = .04272$, $\Pr\{\mu = 22\} = .60$, Loss = 400

$\Rightarrow \Pr\{\text{Accept } H_0, \mu = 22) = (.04272)(.60) = .025632$

4. $\Pr\{\text{Reject } H_0|\mu = 22\} = .95728$, $\Pr\{\mu = 22\} = .60$, Loss = 0

$\Rightarrow \Pr\{\text{Reject } H_0, \mu = 22\} = (.95728)(.60) = .574368$

$\therefore \quad E(L) = (.04012)(200) + 0 + (.025632)(400) + 0 = 18.28$ WV'-

นั่นคือ ถ้าโอกาสที่ค่าเฉลี่ยจะมีค่าเท่ากับ 20 และ 22 เป็น 40% และ 60% ตามลำดับ คาดว่าการตัดสินใจที่ผิดพลาดจะส่งผลสะท้อนให้บริษัทสูญเสียผลประโยชน์ประมาณ 18.28 บาท

ค. กำหนดให้ $\alpha = \beta = .05$, $n = ?$

จาก $\beta(\mu_1) = \Pr\{Z \leqslant \dfrac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha}\}$

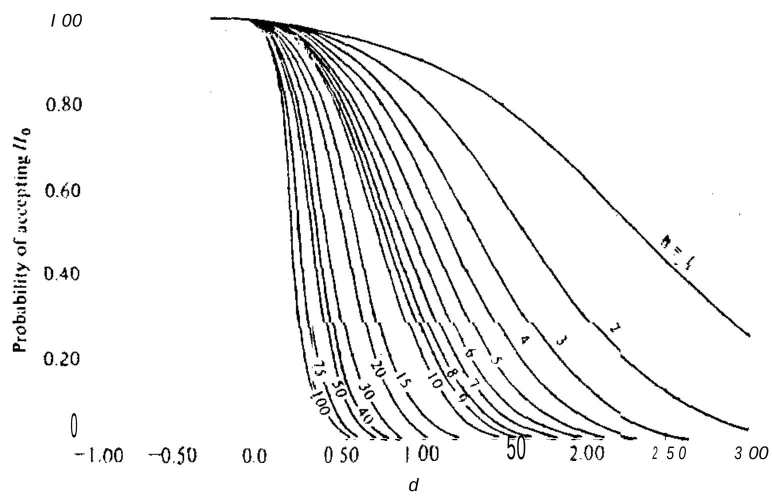
$$\Rightarrow \quad n = \frac{\sigma_0^2(Z_\beta - Z_{1-\alpha})^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

$a = \beta = .05 \Rightarrow Z_\beta = -1.64, Z_{1-\alpha} = 1.64$

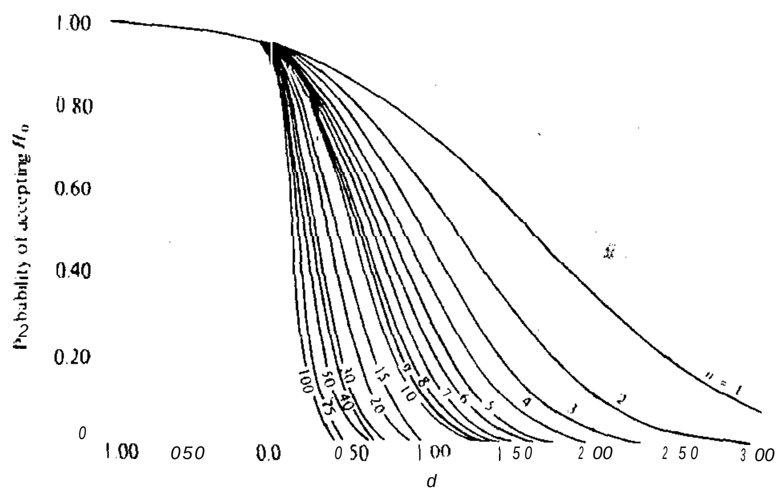
$\Rightarrow n = 4(-1.64 - 1.64)^2/(20 - 22)' = 10.76 \simeq 11$

นั่นคือ ถ้าสุ่มตัวอย่างผลิตภัณฑ์มาประมาณ 11 หน่วย เชื่อว่าการตัดสินใจจะผิดพลาด เพียง 5% หรือนัยหนึ่ง ถ้าต้องการควบคุมให้ความเสี่ยงประเภทที่ 1 และประเภทที่ 2 มีค่าเท่ากัน เท่ากับ 5% เราควรจะสุ่มตัวอย่างผลิตภัณฑ์มาตรวจสอบ 11 หน่วย

การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2 สำหรับ One Sided Normal Test ทั้งชนิดหางซ้าย ($H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu = \mu_1 < \mu_0$) และชนิดหางขวา ($H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$) สามารถคำนวณได้โดยอาศัยโค้ง OC ต่อไปนี้ (โค้ง OC สร้างขึ้นมาจากการพล็อตคู่ลำดับ (μ_1, $\beta(\mu_1)$) โดยเปลี่ยนค่าของ μ_1 ไปเรื่อย ๆ ตามค่าที่ระบุไว้ใน H_1)



ภาพ 6.1 OC curves for different values of n for the one-side normal test for a level of significance .01.



ภาพ 6.2 OC curves for different values of n for the one-sided normal test for a level of significance α .05.

ภาพ 6.1 เป็นโค้ง OC สำหรับกรณี α = .01 และขนาดตัวอย่างมีค่าตั้งแต่ n = 1 ถึง n = 100 โดยที่ d = $\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0}$ สำหรับกรณีหางซ้าย และ d = $\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}$ สำหรับกรณีหางขวา ส่วนภาพ 6.2 เป็นโค้ง OC สำหรับกรณี α = .05 ขนาดตัวอย่างตั้งแต่ n = 1 ถึง n = 100 เช่นเดียวกัน การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2 จึงกระทำได้โดยเพียงแต่เลือกโค้งที่มีขนาดตัวอย่าง n ที่ตรงกับขนาดตัวอย่างของงานที่กำลังดำเนินการอยู่แล้วคำนวณหาค่า d จากนั้นลากเส้นตรงจากจุด d ขึ้นเป็นแนวดิ่งไปตัดโค้ง OC ที่เลือกไว้ก็จะได้ค่าความน่าจะเป็นหรือค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2 ตามต้องการ

ตามตัวอย่าง 6.3 ถ้าเราต้องการคำนวณหา $\beta(22), \beta(23), \beta(24)$ จะพบว่าค่าต่าง ๆ เหล่านี้สามารถคำนวณได้ดังนี้

ก. กรณี $\alpha = .01$

เลือกโค้ง OC จากภาพ 6.1 ได้โค้งที่ n = 9

คำนวณหาค่า d สำหรับ $\mu_1 = 22$, $\mu_1 = 23$ และ $\mu_1 = 24$

(1) เมื่อ $\mu_1 = 22$ นั่นคือ $d = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} = \frac{22 - 20}{2} = 1$ ดังนั้น $\beta(22) \simeq .26$

(2) เมื่อ $\mu_1 = 23$ นั่นคือ $d = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} = \frac{23 - 20}{2} = 1.5$ ดังนั้น $\beta(23) \simeq .01$

(3) เมื่อ $\mu_1 = 24$ นั่นคือ $d = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} = \frac{24 - 20}{2} = 2$ ดังนั้น $\beta(24) \simeq 0$

ข. กรณี $\alpha = .05$

เลือกโค้ง OC จากภาพ 6.2 คือโค้งที่ n = 9

(1) เมื่อ $\mu_1 = 22$ นั่นคือ d = 1 ดังนั้น $\beta(22) \simeq .08$

(2) เมื่อ $\mu_1 = 23$ นั่นคือ d = 1.5 ดังนั้น $\beta(23) \simeq 0$

(3) เมื่อ $\mu_1 = 24$ นั่นคือ d = 2 ดังนั้น $\beta(24) \simeq 0$

ค. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

ในที่นี้จะเห็นได้ว่า H_0 เป็น Composite Hypothesis ที่เราไม่อาจจัดให้เป็นเซทของ Simple Hypothesis ได้ซึ่งมีผลให้เราไม่อาจใช้ NPL ได้โดยตรง จำเป็นต้องพัฒนาตัวทดสอบโดยอาศัย MLRT

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ

ให้ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากรปกติ $N(\mu, \sigma_0^2)$ ดังนั้น Space ของพารามิเตอร์ตาม H_0 และ Space ของพารามิเตอร์ทั้งหมดคือรวมพารามิเตอร์ทั้งใน-H_0 และ H_1 จึงปรากฏดังนี้

$$\omega = \{\mu_0, \sigma_0^2\}$$ [1]

$$\Omega = \{\mu, \sigma_0^2; -\infty < \mu < \infty)$$

เมื่อพิจารณา Ω จะพบว่า μ เป็นพารามิเตอร์ที่มีค่าไม่คงที่ แต่มีค่าที่สามารถผันแปรไปได้ตลอดช่วง $(-\infty, \infty)$ เราจึงจำเป็นต้องควบคุม μ ด้วยการหาทางแทนที่ μ ด้วยตัวประมาณค่าที่เหมาะสม สำหรับ ω นั้นพารามิเตอร์ทุกตัวเป็นค่าคงที่ที่ทราบค่าหรือกำหนดค่าไว้แล้วจึงไม่มีความจำเป็นใด ๆ ที่จะต้องประมาณค่าพารามิเตอร์

$$L_\omega = \underset{\omega}{LA} = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum^n (x_i - \mu_0)^2)\right\}$$

$$L_\Omega = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i - \mu)^2\right\}$$

$$\ln L_\Omega = -n\ln\sigma_0 - n\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i - \mu)^2$$ [2]

MLE ของ μ สามารถคำนวณได้จากสมการ $\frac{\partial}{\partial\mu} \ln L_\Omega = 0$ หรือดิฟเฟอเรนชิเอท $\ln L_\Omega$ เทียบต่อ μ แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0

---

[1] การเขียน Parameter Space เราจะเขียนเป็นเซทของพารามิเตอร์ทุกตัว พารามิเตอร์ตัวใดที่ทราบค่าได้ไม่ว่าจะทราบค่าเพราะอาศัยข้อกำหนดหรือเพราะมีสมมุติฐานเอาไว้หรือว่าทราบค่าด้วยเหตุผลอื่นใดก็ตาม เราจะใส่ Subscript "0" กำกับเอาไว้เพื่อเป็นการแสดงให้ทราบว่าเราจะไม่มีความจำเป็นใด ๆ ที่จะต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวนั้นอีก ส่วนพารามิเตอร์ตัวที่ยังไม่ทราบค่าเราจะไม่ใส่ Subscript "0" แต่จะบอก Limit ไว้เพื่อให้ทราบว่าพารามิเตอร์ตัวนั้นยังคงมีค่าที่สามารถผันแปรไปได้ให้เร่งหาหนทางควบคุม เช่น กำหนดให้มีค่าเท่ากับตัวประมาณค่าที่เหมาะสมตัวใดตัวหนึ่ง

[2] การ take log ทำให้สามารถดิฟเฟอเรนชิเอทได้ง่าย

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i - \mu) = 0$$

$$\sum_i^n (x_i - \mu) = 0$$

$$=> \qquad \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_i^n x_i = \bar{x}$$

ดังนั้น เมื่อแทนที่ μ ใน L_Ω ด้วย $\hat{\mu} = \bar{x}$ จะทำให้ $L_{\hat{\Omega}}$ หรือ Sup. L_Ω ตามต้องการ

$$=> \qquad L_{\hat{\Omega}} = \left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2\right\}$$

และโดยอาศัย MLRT เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\frac{L_{\hat{\omega}}}{L_{\hat{\Omega}}} \leqslant k$ ด้วยเหตุนี้เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ เมื่อ

$$\lambda = \frac{\left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i - \mu_0)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2\right\}} \leqslant k$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2\sigma_0^2}\left\{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 - \sum_i^n (x_i - \mu_0)^2\right\}\right\} \leqslant k$$

และโดยการ take log จะพบว่า

$$\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 - \sum_i^n (x_i - \mu_0)^2 \leqslant 2\sigma_0^2 \ln k$$

$$=> \qquad \sum_i^n x_i^2 - n\bar{x}^2 - \sum_i^n x_i^2 + 2n\bar{x}\mu_0 - n\mu_0^2 \leqslant 2\sigma_0^2 \ln k$$

$$-n(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\mu_0 + \mu^2{}_0) \leqslant 2\sigma_0^2 \ln k$$

$$-n(\bar{x} - \mu_0)^2 \leqslant 2\sigma_0^2 \ln k$$

$$(\bar{x} - \mu_0)^2 > \frac{2\sigma_0^2 \ln k}{-n} = k'$$

$$=> \qquad |\bar{x} - \mu_0| > k'$$

นั่นคือ เราจะปฏิเสธสมมุติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ เมื่อ

$$|\bar{x} - \mu_0| > k'$$

สำหรับค่าของ k' สามารถคำนวณได้โดยอาศัยสมการของความเสี่ยงประเภทที่ 1 ดังนี้

$$a = \Pr\{\text{Reject } H_0|H_0\}$$

$$= \Pr\{|\bar{X} - \mu_0| > k'|\mu = \mu_0\}$$

$$=> \qquad a = \Pr\{|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}| > \frac{k'}{\sigma_0/\sqrt{n}}\} = \Pr\{|Z| > \frac{k'}{\sigma_0/\sqrt{n}}\}$$

$$\Pr\{|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}| > \frac{k'}{\sigma_0/\sqrt{n}}\} = \alpha = \Pr\{|Z| > Z_{1-\alpha/2}\}$$

นั่นคือ $$\frac{k'}{\sigma_0/\sqrt{n}} = Z_{1-\alpha/2}$$

หรือ $$k' = Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ณ ระดับนัยสำคัญ α

เมื่อ $$|\bar{x} - \mu_0| > Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \qquad \text{..........(1)}$$

และกติกาที่ (1) นี้สามารถแปลงรูปไปได้หลายลักษณะซึ่งนักศึกษาสามารถเลือกใช้ได้ตามความถนัด ดังนี้คือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$(\bar{x} - \mu_0) > Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

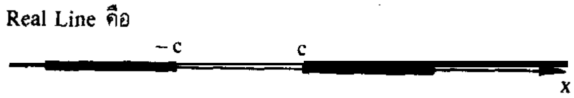
หรือ $(\bar{x} - \mu_0) < Z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ อย่างใดอย่างหนึ่ง [1] ....(2)

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$|Z_c| = |\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}| > Z_{1-\alpha/2} \qquad \text{..........(3)}$$

---

[1] สมการ $|x| = c$ แสดงว่า $x = c$ หรือ $-x = c$ ดังนั้น $|x| > c$ ย่อมแสดงว่า $x > c$ หรือ $-x > c$ ซึ่งก็คือ $x < -c$ ดังนั้น เซทของอสมการ $|x| > c$ ใน Real Line คือ



หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > Z_{1-\alpha/2}$$

หรือ $$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}$$ อย่างใดอย่างหนึ่ง ....(4)

หมายเหตุ การคำนวณหาค่า k′ สำหรับสมมุติฐานนี้สามารถกระทำได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

$$\alpha = \Pr\{|\bar{X} - \mu_0| > k' | \mu = \mu_0\}$$

$$=> \alpha = \Pr\{(\bar{X} - \mu_0) > k' | \mu = \mu_0\} + \Pr\{(\bar{X} - \mu_0) < k'' | \mu = \mu_0\}$$

และเพื่อความสะดวกเราควรแบ่งพื้นที่ในเขตวิกฤติออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน

ดังนั้น $2\Pr\{(\bar{X} - \mu_0) > k' | \mu = \mu_0\} = \alpha = 2\Pr\{(\bar{X} - \mu_0) < k'' | \mu = \mu_0\}$

จาก $$2\Pr\{(\bar{X} - \mu_0) > k' | \mu = \mu_0\} = \alpha$$

$$=> \Pr\{(\bar{X} - \mu_0) > k' | \mu = \mu_0\} = \alpha/2$$

$$\Pr\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{k'}{\sigma_0/\sqrt{n}}\} = \alpha/2 = \Pr\{Z < Z_{1-\alpha/2}\}$$

$$=> \frac{k'}{\sigma_0/\sqrt{n}} = Z_{1-\alpha/2}$$

ดังนั้น $$k' = Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

ขณะเดียวกัน $$2\Pr\{(\bar{X} - \mu_0) < k'' | \mu = \mu_0\} = \alpha$$

$$\Pr\{(\bar{X} - \mu_0) < k'' | \mu = \mu_0\} = \alpha/2$$

$$\Pr\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{k''}{\sigma_0/\sqrt{n}}\} = \alpha/2 = \Pr\{Z < Z_{\alpha/2}\}$$

$$=> \frac{k''}{\sigma_0/\sqrt{n}} = Z_{\alpha/2}$$

ดังนั้น $$k'' = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

นั่นคือ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $(\bar{x} - \mu_0) > Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ หรือ $(\bar{x} - \mu_0) < Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

จาก $\qquad \beta = \Pr\{\text{Accept } H_0|H_1\}$

$$\Rightarrow \qquad \beta(\mu_1) = \Pr\{|\bar{X} - \mu_0| \leqslant k' | \mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{|\bar{X} - \mu_0| \leqslant Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{-Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leqslant \bar{X} - \mu \leqslant Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_1\}$$

$\because$ แต่เนื่องจาก $-Z_{1-\alpha/2} = Z_{\alpha/2}$

$$\Rightarrow \qquad \beta(\mu_1) = \Pr\{\mu_0 + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \leqslant \bar{X} \leqslant \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{\alpha/2} \leqslant \frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\}$$

$$= \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\} - \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z,,\}$$

(3) **การคำนวณหาขนาดตัวอย่างอุตมะ** (Optimum Sample Size)

จาก $\qquad \beta(\mu_1) = \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\} - \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{\alpha/2}\}$

ถ้า $\mu_1 > \mu_0$ แล้ว $\Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{\alpha/2}\} \to 0$

เพราะ $\dfrac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{\alpha/2}$ เป็นปริมาณที่ติดลบที่น้อยกว่า $Z_{\alpha/2}$

$$=> \qquad \beta(\mu_1) \simeq \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\} \text{ เมื่อ } \mu_1 > \mu_0$$

และถ้า $\mu_1 < \mu_0$ แล้ว $\Pr\{Z \leqslant \dfrac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\} \to 1$

เพราะ $\dfrac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}$ เป็นปริมาณบวกที่มากกว่า $Z_{1-\alpha/2}$

$$=> \qquad \beta(\mu_1) \simeq 1 - \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{\alpha/2}\} \text{ เมื่อ } \mu_1 < \mu_0$$

$$= 1 - \Pr\{Z \leqslant -(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} - Z_{\alpha/2})\}$$

$$= \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} - Z_{\alpha/2}\}$$

$$= \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} - Z_{\alpha/2}\}$$ [1]

$$\because \qquad -Z_{\alpha/2} = Z_{1-\alpha/2}$$

$$=> \qquad \beta(\mu_1) = \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\} \text{ เมื่อ } \mu_1 < \mu_0$$

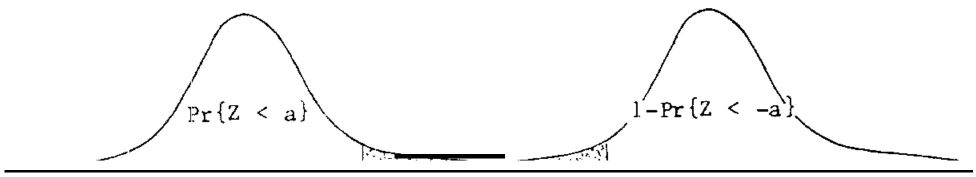
นั่นคือ $\qquad \beta(\mu_1) \simeq \Pr\{Z \leqslant \dfrac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\} = \Pr\{Z \leqslant -\dfrac{(\mu_1 - \mu_0)}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\}$

เมื่อ $\mu_1 > \mu$

และ $\qquad \beta(\mu_1) \simeq \Pr\{Z \leqslant \dfrac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\}$ เมื่อ $\mu_1 < \mu_0$

---

[1] $1 - \Pr\{Z \leqslant -a\} = \Pr\{Z \leqslant a\}$ ขอให้เปรียบเทียบพื้นที่ใต้โค้งจากภาพต่อไปนี้



ดังนั้นเมื่อ $\mu_1 < \mu_0$ และ $\mu_1 > \mu_0$ (หรือ $\mu_1 \neq \mu_0$) เราจึงผสม 2 สมการนี้เข้าด้วยกันได้ดังนี้

$$\beta(\mu_1) \simeq \Pr\{Z \leqslant \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\} \quad \text{เมื่อ } \mu_1 \neq \mu_0$$

$$\Rightarrow \Pr\{Z \leqslant \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\} = \beta(\mu_1) = \Pr\{Z \leqslant Z_\beta\}$$

$$\Rightarrow \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2} \simeq Z_\beta$$

$$\sqrt{n} = \frac{\sigma_0(Z_\beta - Z_{1-\alpha/2})}{|\mu_1 - \mathrm{WI}} \cong \frac{\sigma_0(-Z_{1-\beta} - Z_{1-\alpha/2})}{|\mu_1 - \mu_0|}$$

$$n \simeq \frac{\sigma_0^2(-Z_{1-\beta} - Z_{1-\alpha/2})^2}{|\mu_1 - \mu_0|^2} \cong \frac{\sigma_0^2(Z_{1-\beta} + Z_{1-\alpha/2})^2}{|\mu_1 - \mu_0|^2}$$

นั่นคือ ขนาดตัวอย่างอุตมะที่ควบคุมระดับความเสี่ยง α และ β ให้อยู่ในระดับที่นักวิจัยกำหนดไว้สำหรับทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu_1 \neq \mu_0$

$$n \simeq \frac{\sigma_0^2(Z_{1-\beta} + Z_{1-\alpha/2})^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

ตัวอย่าง 6.4 ในการผลิตท่อประปาขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 3 ซม. ถ้าพบว่าเส้นผ่าศูนย์กลางโดยเฉลี่ยของท่อที่ผลิตได้มีค่าเท่ากับ 3.000 ซม. และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.025 ซม. จะถือว่ากระบวนการผลิตยังคงเป็นปกติ (Under Control)

เพื่อตรวจสอบว่ากระบวนการผลิตยังคงเป็นปกติหรือไม่ ฝ่ายควบคุมคุณภาพทำการสุ่มตัวอย่างท่อประปามา 30 ท่อแล้วดำเนินการตรวจสอบคุณภาพ ถ้าต้องการทดสอบ ณ ระดับนัยสำคัญ 1%

ก. อยากทราบควรใช้กติกาใดในการตัดสินใจ

ข. ถ้าพบว่าค่าเฉลี่ยเส้นผ่าศูนย์กลางท่อจากกลุ่มตัวอย่างมีค่าเท่ากับ 2.895 ซม. ท่านจะยืนยันว่ากระบวนการผลิตนี้เป็นปกติได้หรือไม่

ค. ถ้าต้องการให้ $\alpha = \beta = .01$ อยากทราบว่าควรสุ่มตัวอย่างท่อประปามาตรวจสอบเท่าไร

ง. จงคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2 ถ้าความจริงแล้วท่อที่ผลิตได้มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 3.005 ซม.

วิธีทำ $H_0 : \mu = 3.0000$ vs $H_1 : \mu \neq 3.0000$

กติกาการตัดสินใจที่เหมาะสมคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$|\bar{x} - \mu_0| > Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

ก. กำหนดให้ $\alpha = 0.01$, $\sigma_0 = 0.025$, $n = 30$ ดังนั้น $Z_{1-\alpha/2} = Z_{.995} = 2.58$
ดังนั้น เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$|\bar{x} - 3.000| > \frac{2.58(0.025)}{\sqrt{30}} = 0.01178$$

ข. จากกลุ่มตัวอย่างพบว่า $\bar{x} = 2.895$ ดังนั้น $|\bar{x} - 3.000| = 0.105$

จึงเห็นได้ว่า $|\bar{x} - 3.000| > 0.01178$ ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักและเชื่อว่ากระบวนการผลิตทำงานผิดปกติ

ค. ขนาดตัวอย่างอุตมะคือ

$$n \simeq \frac{\sigma_0^2(Z_{1-\beta} + Z_{1-\alpha/2})^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

กำหนดให้ $\alpha = \beta = 0.01$ ดังนั้น

$$n \simeq \frac{\sigma_0^2(Z_{0.990} + Z_{0.995})^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

$$\simeq \frac{(0.025)^2(2.33 + 2.58)^2}{(\mu_1 - 3.000)^2}$$

$$\simeq \frac{0.0151}{(\mu_1 - 3.000)^2}$$

ถ้า $\mu_1 = 3.05$ ดังนั้น

$$n \simeq \frac{0.0151}{(3.05 - 3.00)^2} = \frac{0.0151}{0.0025} = 481.47 \simeq 482$$

นั่นคือ ถ้า $\mu_1 = 3.05$ และเราต้องการให้การตัดสินใจมีความผิดพลาดทั้งสองประเภทเพียง 1% แล้วเราควรสุ่มท่อมาตรวจสอบคุณภาพประมาณ 482 ท่อ

ง. ถ้า $\mu_1 = 3.005$ ดังนั้น

$$\beta(\mu_1) = \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha/2}\} - \Pr\{Z \leqslant \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} + Z_{\alpha/2}\}$$

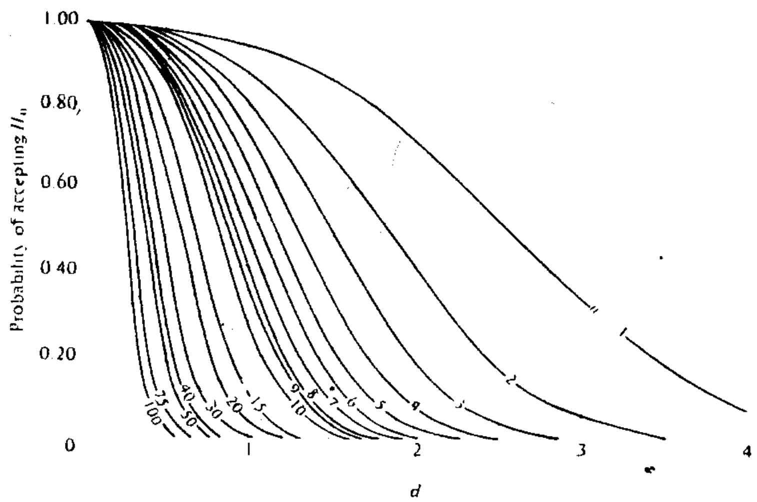
$$=> \quad \beta(3.005) = \Pr\{Z \leqslant \frac{3.000 - 3.005}{0.025/\sqrt{30}} + 2.58\} - \Pr\{Z \leqslant \frac{3.000 - 3.005}{0.025/\sqrt{30}} - 2.58\}$$

$$= \Pr\{Z \leqslant 2.38) - \Pr\{Z \leqslant -2.38)$$

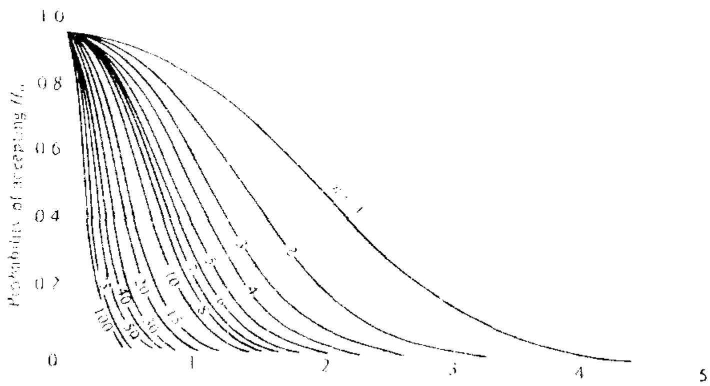
$$= 0.9765 - 0.0235 = 0.953$$

นั่นคือ ถ้าตามความเป็นจริงแล้ว $\mu_1 = 3.005$ ซ.ม. แต่เรากลับตัดสินใจเชื่อว่า $\mu_1 = 3$ ซ.ม. การตัดสินใจเช่นนี้จะก่อให้เกิดความเสี่ยงสูงถึง 95.3%

ค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2 และ Power of Test สามารถคำนวณได้โดยอาศัยภาพ 6.3 และ 6.4 ต่อไปนี้



ภาพ 6.3 OC curves for different values of n for the two-sided normal test for a level of significance α = .01



ภาพ 6.4 OC curves for different values of n for the two-sided normal test for a level of significance $\alpha = .05$.
[Reporduced with permission from "Operating Characteristics for the Common Statistical Tests of Significance" by Charles L. Ferris, Frank E Grubbs, and Chalmers L. Weaver, Annals of Mathematical Statistics, June 1946].

ภาพ 6.3 เป็นโค้ง OC สำหรับกรณี $\alpha = 0.01$ ส่วนภาพ 6.4 เป็นโค้ง OC สำหรับกรณี $\alpha = 0.05$ ขนาดตัวอย่างตั้งแต่ n = 1 ถึง n = 100 โดยที่ $d = \left| \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0} \right|$ การหาค่า $\beta(\mu_1)$ สามารถกระทำได้เช่นเดียวกับกรณี One tailed Test

ตามตัวอย่างข้างต้นเราสามารถคำนวณหา $\beta(3.005)$ จากโค้ง OC ได้ดังนี้

$$\mu_1 = 3.005 \quad \text{ดังนั้น} \left| \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0} \right| = \left| \frac{3.000 - 3.005}{0.025} \right| = 0.2$$

จากภาพ 6.3 ณ โค้งที่ n = 30 เมื่อลากเส้นดิ่งจากค่า d = 0.2 ไปตัดโค้งที่ n = 30 จะพบว่า $\beta(3.005) \simeq 0.95$

กรณีที่ 2 เมื่อไม่ทราบค่า σ^2

ก. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$

(1) การพัฒนาตัวทดสอบ

สุ่มตัวอย่าง $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ จากกลุ่มประชากรปกติ $N(\mu, \sigma^2)$

ดังนั้น $\quad \omega = \{\mu_0, \sigma^2; \sigma^2 > 0\}$

$$\Omega = \{\mu, \sigma^2; -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

ดังนั้น $L_\omega = \prod^n f_X(x_i; \mu_0, \sigma^2|\omega)$

$L_\Omega = \prod^n f_X(x_i; \mu, \sigma^2|\Omega)$

=> $L_\omega = (\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i^n (x_i - \mu_0)^2\}$ และ

$L\Omega = (\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i^n (x_i - \mu)^2\}$

เมื่อพิจารณา L_ω จะพบว่า

=> $\ln L_\omega = -n\ln\sigma - n\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum^n (x_i - \mu_0)^2$

$\frac{\partial}{\partial\sigma} \ln L_\omega = \frac{-n}{\theta} - o + \frac{1}{\sigma^3}\sum_i^n (x_i - \mu_0)^2 = 0$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i^n (x_i - \mu_0)^2$

แทนที่ σ^2 ใน L_ω ด้วย $\hat{\sigma}^2$

ดังนั้น $L\hat{A}_\omega = (\frac{n}{2\pi\,\Sigma(x_i - \mu_0)^2})^{n/2} e^{-n/2}$

เมื่อพิจารณา L_Ω จะพบว่า

=> $\ln L_\Omega = -n\ln\sigma - n\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i^n (x_i - \mu)^2$

$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L_\Omega = -o-o+ \frac{1}{\sigma^2}\sum^n (x_i - \mu) = 0$

=> $\hat{\mu} = \bar{x}$

$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L_\Omega = -\frac{n}{\theta} - 0 + \frac{1}{\sigma^3}\sum^n (x_i - \mu)^2 = 0$

$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum^n (x_i - \mu)^2$

เมื่อแทนที่ μ ด้วย $\hat{\mu} = \bar{x}$ จึงพบว่า $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2$

$L\hat{A}_\Omega = (\frac{n}{2\pi\,\Sigma(x_i - \bar{x})^2})^{n/2} e^{-n/2}$

ดังนั้น โดยอาศัยวิธีการ MLRT เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักถ้า $\lambda = \frac{L_{\hat{\omega}}}{L_{\hat{\Omega}}} \leqslant k$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \frac{\left(\frac{n}{2\pi\,\Sigma(x_i - \mu_0)^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}}{\left(\frac{n}{2\pi\,\Sigma(x_i - \bar{x})^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}} \leqslant k$$

$$\left\{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma(x_i - \mu_0)^2}\right\}^{n/2} \leqslant k$$

$$\Rightarrow \qquad \left\{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma(x_i - \mu_0)^2}\right\} \leqslant k^{2/n}$$

$$\frac{\overset{n}{\Sigma}(x_i \quad \bar{x})^2}{\overset{n}{\Sigma}\;(x_i \;\; \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)^2} \leqslant k^{2/n}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma\;(x_i - \bar{x})^2 + n\,(\bar{x} - \mu_0)^2} \leqslant k^{2/n}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\overset{n}{\Sigma}\,(x_i - \bar{x})^2}} \leqslant k^{2/n}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 + \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\overset{n}{\Sigma}(x_i - \bar{x})^2} \geqslant k^{-2/n}$$

นั่นคือ

$$\frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\overset{n}{\Sigma}(x_i - \bar{x})^2} \geqslant k^{-2/n} - 1$$

---

[1] $\sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)^2 = \sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i}^{n}(\bar{x} - \mu_0)^2 + 2(\bar{x} - \mu_0)\sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})$

$= \sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2$

เทอมไขว้มีค่าเท่ากับ 0 เพราะว่า $\overset{n}{\Sigma}(x_i - \bar{x}) = 0$

$$=> \quad \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{(n-1)s^2} = \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{(n-1)s^{2/n}} > k^{-2/n} - 1$$

$$=> \quad \left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right)^2 > (n-1)(k^{-2/n} - 1) = k'$$

นั่นคือปฏิเสธ H_0 เมื่อ

$$\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > k' \quad \text{หรือ} \quad |t_c| > k'$$ [1]

การคำนวณหาค่า k' ให้อาศัยสมการของความเสี่ยงประเภทที่ 1 ดังนี้

$$\alpha = \Pr\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > k' \mid \mu = \mu_1\}$$

$$= \Pr\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_1}{S/\sqrt{n}}\right| > k'\}$$

$\because \quad \frac{\bar{X} - \mu_1}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$ ดังนั้น

$$\Pr\{\left|\frac{\bar{X} - \mu_1}{S/\sqrt{n}}\right| > k'\} = \alpha = \Pr\{|t| > t_{n-1,1-\alpha/2}\}$$

$$=> \quad k' = t_{n-1,1-\alpha/2}$$

นั่นคือเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$|t_c| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_1}{s/\sqrt{n}}\right| > t_{n-1,1-\alpha/2} \quad \text{..........(1)}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_1}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1,1-\alpha/2} \quad \text{หรือเมื่อ}$$

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_1}{s/\sqrt{n}} < t_{n-1,1-\alpha/2} \quad \text{อย่างใดอย่างหนึ่ง} \quad \text{..........(2)}$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$|\bar{x} - \mu_1| > t_{n-1,1-\alpha/2}.s/\sqrt{n} \quad \text{......*. (3)}$$

---

[1] ดูตัวอย่าง 3.17 หน้า 79

(2) การคำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2

สำหรับความเสี่ยงประเภทที่ 2 ของ t-test จำเป็นต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับ Noncentral t -dist[n]

การแจกแจงแบบ Noncentral t นิยามได้ดังนี้

นิยาม 6.1 ถ้าตัวแปรสุ่ม $W \sim N(\delta, 1)$ เมื่อ δ คือค่าคงที่ใด ๆ และตัวแปรสุ่ม $V \sim \chi^2_\nu$ แล้ว ตัวแปรสุ่ม T คือ

$$T = W/\sqrt{V/\nu}$$

จะมีการแจกแจงแบบ Noncentral t มี df $= \nu$ และ Noncentrality Parameter $= \delta$ และถ้า $\delta = 0$ ตัวแปรสุ่ม T จะมีการแจกแจงแบบ t มี df $= n - 1$ เรียกว่า Central t

โดยอาศัยนิยาม 6.1 เราสามารถคำนวณหา $\beta(\mu_1)$ ได้ดังนี้

$$\beta(\mu_1) = \Pr\{|\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1,1-\alpha/2}|\mu = \mu_1\}$$

$$=> \quad \beta(\mu_1) = \Pr\{|\frac{\overline{X} - \mu_1}{S/\sqrt{n}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\frac{\sigma_0}{\sigma} < t_{n-1,1-\alpha/2}\}$$

$$= \Pr\{|(\frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})/\frac{S}{\sigma}| < t_{n-1,1-\alpha/2}\}$$

$$= \Pr\{|(Z + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} / \sqrt{\frac{n-1}{n-1} \cdot \frac{S^2}{\sigma^2}}| < t_{n-1,1-\alpha/2}\}$$

$$= \Pr\{|W/\sqrt{\frac{V}{n-1}}| < t_{n-1,1-\alpha/2}\}$$

พิจารณาตัวแปรสุ่ม $W = Z + (\mu_1 - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ จะพบว่า (พิสูจน์ได้โดยอาศัย mgf) $W \sim N(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}, 1)$ และ $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ ดังนั้น

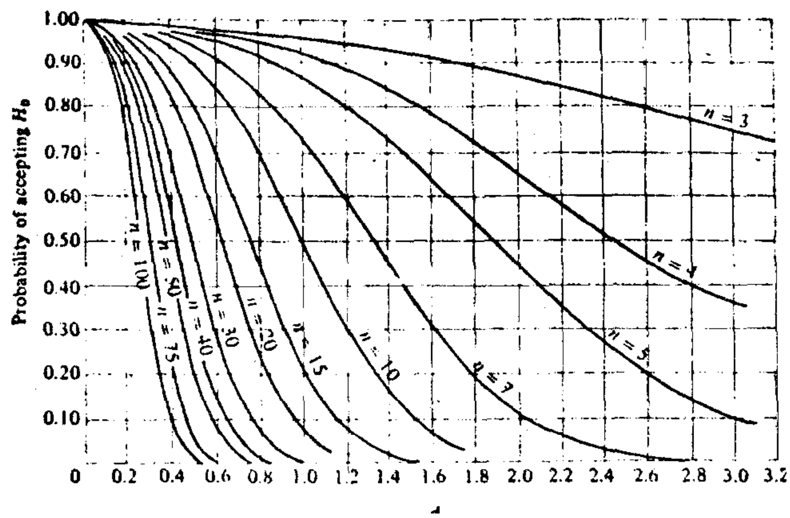
$$W/\sqrt{\frac{V}{n-1}} \sim t_{(n-1, \mu_1-\mu_0/\sigma/\sqrt{n})}$$

=> เราคำนวณหาค่า $\beta(\mu_1)$ ได้จากสมการ

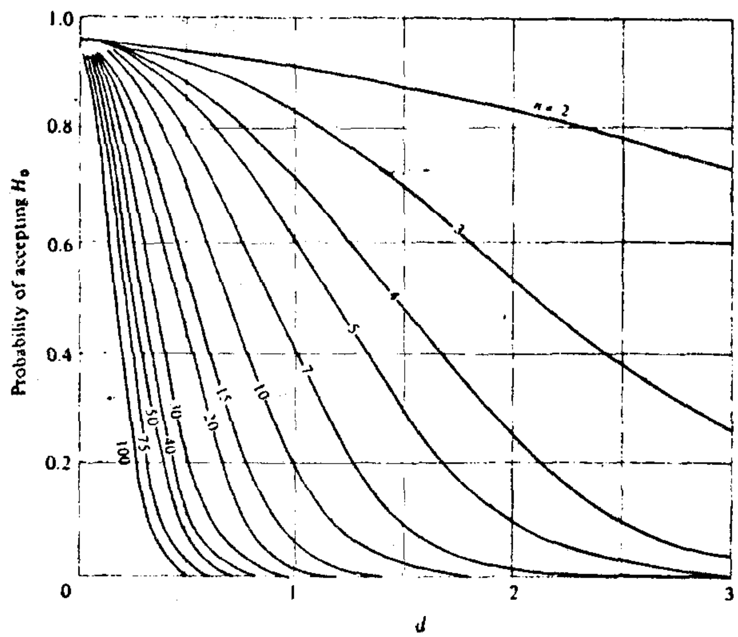
$$\beta(\mu_1) = \Pr\{|Z + \frac{\mu_1 + \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} / \sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}| < t_{n-1,1-\alpha/2}\}$$

ทั้งนี้คำนวณโดยอาศัยตาราง Noncentral t ณ $df = n - 1$ แต่เปลี่ยนค่า Noncentrality Parameter ไปตามค่าของ μ_1 ที่ $\mu_1 \neq \mu_0$

อย่างไรก็ตามการคำนวณหาความเสี่ยง β และ Power สามารถคำนวณได้โดยง่าย โดยอาศัยโค้ง OC ต่อไปนี้ โดยที่ $d = \left|\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}\right|$ หรือ $d = \left|\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0}\right|$



ภาพ 6.5 OC curves for different values of n for the two-sided t test for a level of significance $\alpha = .01$.



ภาพ 6.6 OC curves for different values of n for the two-sided t test for a level of significance $\alpha = .05$.