บทที่ 7
การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ของ 2 กลุ่มประชากร

7.1 การทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ย

7.1.1 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของกลุ่มประชากรปกติสองกลุ่มเมื่อถือว่าทราบค่าความแปรปรวนของกลุ่มประชากรทั้งสอง

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \qquad \text{vs } H_1 : \mu_x \neq \mu_y$$

หรือ $$H_0 : \mu_x - \mu_y = 0 \text{ vs } H_1 : \mu_x - \mu_y = \Delta \neq 0$$

โดยที่ $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ และทราบค่า σ_x^2 และ σ_y^2 [1]

ในกรณีนี้การสร้าง test จำเป็นต้องใช้วิธี MLRT เพราะสมมุติฐานรองเป็น Composite Hypothesis ดังนั้น

$$\omega = \{\mu_x = \mu_y = \mu, \sigma_x^2, \sigma_y^2; -\infty < \mu < \infty, \sigma_x^2 > 0, \sigma_y^2 > 0\}$$

$$\Omega = \{\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2; -\infty < \mu_x < \infty, -\infty < \mu_y < \infty, \sigma_x^2 > 0, \sigma_y^2 > 0\}$$

สุ่มตัวอย่างจากกลุ่มประชากร X มา n หน่วย และจากกลุ่มประชากร Y มา m หน่วย

$$\Rightarrow \qquad L_\omega = \prod_i^n f_{X_i}(x_i; \mu_x = \mu, \sigma_x^2) \prod_i^m f_{Y_i}(y_i; \mu_y = \mu, \sigma_y^2)$$

---

[1] โดยปกติ μ_x, μ_y, σ_x^2, σ_y^2 หรือพารามิเตอร์อื่น ๆ เป็นค่าที่ไม่ทราบ แต่ในบางโอกาสเราถือว่าทราบค่าหรือพอทราบได้โดยอาศัยข้อมูลสนเทศในอดีตของพารามิเตอร์เหล่านั้น เช่นค่าที่มีนักวิจัยรายอื่นเคยประมาณไว้

$$= \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x}\sum_i^n (x_i - \mu)^2\right\}\left(\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\right)^m$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_y}\sum_i^m (y_i - \mu)^2\right\}$$

และ $$L_\Omega = \prod_i^n f_{X_i}(x_i; \mu_x, \sigma_x^2) \sum_i^m f_{Y_i}(y_i; \mu_y, \sigma_y^2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_i^n (x_i - \mu_x)^2\right\}\left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right)^m$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_i^m (y_i - \mu_y)^2\right\}$$

จาก L_ω และ L_Ω หา MLE ของ μ และ μ_x, μ_y ได้ดังนี้

จาก L_ω เรา take log จะได้

$$\ln L_\omega = n\ln\left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right) + m\ln\left(\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\right) - \left\{\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_i^n (x_i - \mu)^2\right\}$$
$$- \frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_i^m (y_i - \mu)^2\}$$

ดิฟเฟอเรนชิเอท $\ln L_\omega$ w.r.t μ และให้เท่ากับ 0

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\mu}\ln L_\omega = 0 + 0 + \frac{1}{\sigma_x^2}\sum_i^n (x_i - \mu) + \frac{1}{\sigma_y^2}\sum_i^m (y_i - \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma_x^2}(n\bar{x} - n\mu) + \frac{1}{\sigma_y^2}(m\bar{y} - m\mu) = 0$$

$$\left(\frac{n}{\sigma_x^2} + \frac{m}{\sigma_y^2}\right)\mu = \frac{n\bar{x}}{\sigma_x^2} + \frac{m\bar{y}}{\sigma_y^2}$$

$$(n\sigma_y^2 + m\sigma_x^2)\mu = n\bar{x}\sigma_y^2 + m\bar{y}\sigma_x^2$$

นั่นคือ

$$\hat{\mu} = (n\bar{x}\sigma_y^2 + m\bar{y}\sigma_x^2)/(n\sigma_y^2 + m\sigma_x^2)$$

หารทั้งเศษและส่วนด้วย $n\sigma_y^2$

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{x} + (m\bar{y}\sigma_x^2/n\sigma_y^2)}{1 + m\sigma_x^2/n\sigma_y^2}$$

ให้ $m\sigma_x^2/n\sigma_y^2 = c$

$$=> \quad \hat{\mu} = (\bar{x} + c\bar{y})/(1 + c)$$

สำหรับ LΩ จะพบว่า

$$\ln L\Omega = n\ln\left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right) + m\ln\left(\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\right) - \left\{\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_i^n (x_i - \mu_x)^2\right\} - \left\{\frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_i^m (y_i - \mu_y)^2\right\}$$

$\frac{\partial}{\partial \mu_x}\ln L\Omega = 0$ และ $\frac{\partial}{\partial \mu_y}\ln L\Omega = 0$ จะได้ MLE ของ μ_x และ μ_y

ตามลำดับคือ

$$=> \quad 0 + 0 + \frac{1}{\sigma_x^2}\sum_i^n (x_i - \mu_x) = 0 => \hat{\mu}_x = \frac{1}{n}\sum_i^n x_i = \bar{x}$$

และ $$0 + 0 + \frac{1}{\sigma_y^2}\sum_i^m (y_i - \mu_y) = 0 => \hat{\mu}_y = \frac{1}{m}\sum_i^m y_i = \bar{y}$$

ดังนั้น

$$\text{Sup } L\omega = \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\right)^m \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_i^n \left(x_i - \frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c}\right)^2 - \frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_i^m \left(y_i - \frac{\bar{x} + c\bar{y})^2}{1 + c}\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\right)^m \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\left\{\sum_i^n x_i^2 - 2n\bar{x}\cdot\frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c} + n\left(\frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c}\right)^2\right\}\right\} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}\left\{\sum_i^m y_i^2 - 2m\bar{y}\cdot\frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c} + m\left(\frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c}\right)^2\right\}\right\}^{1}$$

---

[1] $$\sum_i^n \left(x_i - \frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c}\right)^2 = \sum_i^n \left\{x_i^2 - 2x_i\cdot\frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c} + \left(\frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c}\right)^2\right\}$$

$$= \sum_i^n x_i^2 - 2n\bar{x}\cdot\frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c} + n\left(\frac{\bar{x} + c\bar{y}}{1 + c}\right)^2$$

และ $\quad \text{Sup } L\Omega = \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\right)^m \exp\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2\}$

$$\exp\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}\sum_i^m (y_i - \bar{x})^2\}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\right)^m \exp\{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(\sum_i^n x_i^2 - n\bar{x}^2)\}$$

$$.\exp\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}(\sum_i^m y_i^2 - m\bar{y}^2)\}$$

ดังนั้นเราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\lambda \leqslant k$ โดยที่

$$\lambda = \frac{\text{Sup } L\omega}{\text{Sup } L\Omega}$$

$$= \exp\{\frac{1}{2\sigma_x^2}\{(-\sum_i^n x_i^2 + 2n\bar{x}\cdot\frac{\bar{x}+c\bar{y}}{1+c} - n(\frac{\bar{x}+c\bar{y}}{1+c})^2$$

$$+ (\sum_i^n x_i^2 - n\bar{x}^2)\}\}\cdot$$

$$\exp\{\frac{1}{2\sigma_y^2}\{(-\sum_i^m y_i^2 + 2m\bar{y}\cdot\frac{\bar{x}+c\bar{y}}{1+c} - m(\frac{\bar{x}+c\bar{y}}{1+c})^2$$

$$+ (\sum_i^m y_i^2 - m\bar{y}^2)\}\}$$

$$= \exp\{-\frac{n}{2\sigma_x^2}(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\cdot\frac{\bar{x}+c\bar{y}}{1+c} + (\frac{\bar{x}+c\bar{y}}{1+c})^2\}$$

$$\cdot\exp\{-\frac{m}{2\sigma_y^2}(\bar{y}^2 - 2\bar{y}\cdot\frac{\bar{x}+c\bar{y}}{1+c} + (\frac{\bar{x}+c\bar{y}}{1+c})^2\}$$

$$= \exp\{-\frac{n}{2\sigma_x^2}(\bar{x} - \frac{\bar{x}-c\bar{y}}{1+c})^2\}$$

$$\exp\{-\frac{m}{2\sigma_y^2}(\bar{y} - \frac{\bar{x}+c\bar{y}}{1+c})^2\}$$

$$= \exp\{-\frac{n}{2\sigma_x^2}(\frac{\bar{x}+c\bar{x}-\bar{x}-c\bar{y}}{1+c})^2\}$$

$$\cdot\exp\{-\frac{m}{2\sigma_y^2}(\frac{\bar{y}+c\bar{y}-\bar{x}-c\bar{y}}{1+c})^2\}$$

$$= \exp\{-\frac{nc^2}{2\sigma_x^2}(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+c})^2\} \cdot \exp\{-\frac{m}{2\sigma_y^2}(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+c})^2\}^1$$

แต่ $$c = \frac{m\sigma_x^2}{n\sigma_y^2} \Rightarrow nc\sigma_y^2 = m\sigma_x^2 \text{ หรือ } \frac{n}{\sigma_x^2} = \frac{m}{c\sigma_y^2}$$

$$\lambda = \exp\{-\frac{m}{c\sigma_y^2} \cdot \frac{c^2}{2}(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+c})^2 \cdot \exp\{-\frac{m}{2\sigma_y^2}(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+c})\}$$

$$= \exp\{-\frac{mc}{2\sigma_y^2} \cdot (\frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+c})^2\} \exp\{-\frac{m}{2\sigma_y^2}(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+c})^2\}$$

$$= \exp\{-\frac{m}{2\sigma_y^2}(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+c})^2 \cdot (c+1)\}$$

$$= \exp\{-\frac{m}{2\sigma_y^2(1+c)} \cdot (\bar{x}-\bar{y})^2\}$$

นั่นคือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\lambda \leqslant k$ คือ

$$\exp\{-\frac{m}{2\sigma_y^2(1+c)} \cdot (\bar{x}-\bar{y})^2\} \leqslant k$$

$$-\frac{m}{2\sigma_y^2(1+c)}(\bar{x}-\bar{y})^2 \leqslant \ln k$$

$$(\bar{x}-\bar{y})^2 \geqslant \frac{-2\sigma_y^2(1+c)\ln k}{m}$$

$$\geqslant k'$$

หรือ $$|\bar{x}-\bar{y}| \geqslant k'$$

---

[1] $(\frac{\bar{y}-\bar{x}}{1+c})^2 = \{-\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{1+c}\}^2 = (\frac{\bar{x}-\bar{y}}{1+c})^2$

นั่นคือ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $H_0: \mu_x = \mu_y$ vs $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ เมื่อ $|\bar{x} - \bar{y}| \geq k'$ หรือเขตวิกฤติคือ $|\bar{x} - \bar{y}| \geq k'$ โดยที่ k' คือค่า ordinate หรือค่าบนแกนนอนใต้โค้งของ Sampling Distribution ของตัวแปรสุ่ม $(\bar{X} - \bar{Y})$ ในลักษณะที่ค่าของ k' สามารถปรับค่าหรือเลื่อนไปมาได้จนกระทั่งทำให้พื้นที่ในเขตวิกฤติใต้โค้งตัวแปรสุ่ม $(\bar{X} - \bar{Y})$ มีค่าเท่ากับ α ที่เรากำหนดไว้

ปัญหาในทางปฏิบัติก็คือ $k = ?$

กำหนดให้ความเสี่ยงประเภทที่ 1 สูงสุดที่พอยอมได้เท่ากับ α

=> α = Pr{ปฏิเสธสมมุติฐานหลักทั้ง ๆ ที่สมมุติฐานหลักเป็นจริง}

นั่นคือ

$$\alpha = \Pr\{|\bar{X} - \bar{Y}| \geq k \mid \mu_x - \mu_y = 0\}$$

แต่ $\because X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ และ $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

ดังนั้น $\bar{X} \sim N(\mu_x, \sigma_x^2/n)$ และ $\bar{Y} \sim N(\mu_y, \sigma_y^2/m)$

และ $(\bar{X} - \bar{Y}) \sim N(\mu_x - \mu_y, \dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m})$

นั่นคือ Sampling Distribution ของตัวแปรสุ่ม $(\bar{X} - \bar{Y})$ คือ $N(\mu_x - \mu_y, \dfrac{\sigma_x^2}{n} + \dfrac{\sigma_y^2}{m})$

ดังนั้น

$$\alpha = \Pr\left\{\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}} \geq \frac{k' - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}}\right\}$$

$$=> \quad \alpha = \Pr\{|Z| \geq k'/\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}\}$$

แสดงว่า α = ในที่นี้คือค่าของพื้นที่ใต้โค้งปกติ N(0, 1)

ดังนั้น

$$\Pr\{|Z| > k'/\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}\} = \alpha = \Pr\{|Z| > Z_{1-\alpha/2}\}$$

$$=> \quad k'/\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m} = Z_{1-\alpha/2}$$

$$k' = Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

นั่นคือเราจะปฏิเสธสมมุติฐาน $H_0 : \mu_x = \mu_y$ vs $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$ ณ. ระดับนัยสำคัญ 100 α% เมื่อ

$$|\bar{x} - \bar{y}| > Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

กรณีเฉพาะที่ 1 ถ้า n = m เราจะปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ

$$|\bar{x} - \bar{y}| > Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{n}}$$

กรณีเฉพาะที่ 2 ถ้า $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_0^2$ $n \neq m$ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$|\bar{x} - \bar{y}| > Z_{1-\alpha/2}\sigma_0\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

สำหรับกรณีเฉพาะอื่น ๆ ขอเว้นไว้ให้นักศึกษาทดลองพัฒนาขึ้นเองเป็นการบ้าน

การหาความเสี่ยงประเภทที่ 2 (β-risk หรือ β-error) สามารถคำนวณได้ดังนี้

$\beta(\Delta)$ = Pr (ยอมรับสมมุติฐานหลักทั้ง ๆ ที่สมมุติฐานหลักไม่ถูกต้อง)

$$= \Pr\{|\bar{X} - \bar{Y}| \leqslant Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} \mid \Delta \neq 0\}$$

$$= \Pr\{Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} - \Delta \leqslant (\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta \leqslant Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} - \Delta\}$$

$$= \Pr\{Z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \leqslant Z \leqslant Z_{1-\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$

$$= \Pr\{Z \leqslant Z_{1-\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\} - \Pr\{Z < Z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$

สำหรับการหาขนาดตัวอย่างอุตมะที่ควบคุมระดับความเสี่ยง α และ β ให้อยู่ในระดับที่ต้องการสามารถคำนวณได้ดังนี้

จาก $$\beta(\Delta) = \Pr\{Z \leqslant Z_{1-\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\} - \Pr\{Z \leqslant Z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$

ถ้า $\Delta > 0$ หรือ $\mu_x > \mu_y$ จะมีผลให้

$$\Pr\{Z \leqslant Z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\} \to 0$$

$$=> \quad \beta(\Delta) \simeq \Pr\{Z \leqslant Z_{1-\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\} \qquad \text{..........(1)}$$

และถ้า $\Delta < 0$ หรือ $\mu_x < \mu_y$ จะมีผลให้ $\Pr\{Z \leqslant Z_{1-\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\} \to 1$

$$=> \quad \beta(\Delta) \simeq 1 - \Pr\{Z \leqslant Z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$

$$\simeq \Pr\{Z > Z_{\alpha/2} - \frac{(\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\} \qquad \because \Delta = \mu_x - \mu_y$$

$$\simeq \Pr\{Z > -Z_{1-\alpha/2} - \frac{(\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$

$$\simeq \Pr\{Z > -(Z_{1-\alpha/2} + \frac{(\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}})\}$$ [1]

$$\simeq \Pr\{Z < (Z_{1-\alpha/2} + \frac{(\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}})\} \qquad \text{..........(2)}$$

จากสมการที่ (1) และ (2) แสดงว่าเมื่อ $\Delta \neq 0$ (คือ $\Delta > 0$ และ $\Delta < 0$)

แล้ว $\beta(\Delta) = \Pr\{Z < Z_{1-\alpha/2} + \frac{|\Delta|}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$ [2]

ดังนั้น ถ้า $n = m$ เราสามารถกำหนดขนาดตัวอย่างอุตมะได้ดังนี้[3]

$$\Pr\{Z \leqslant Z_{\alpha/2} - \frac{|\Delta|}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\} = \beta(\Delta) = \Pr\{Z < Z_\beta)$$

---

[1] ขอให้นักศึกษาทดลองตรวจสอบความจริงได้ด้วยตัวเลข

[2] จะใช้สมการนี้คำนวณหาค่าความเสี่ยงประเภทที่ 2 ก็ได้ แต่ค่าที่ได้เป็นเพียงค่าประมาณ

[3] กรณีเช่นนี้จำเป็นต้องถือว่า $n = m$ มิเช่นนั้นจะไม่สามารถคำนวณหาขนาดตัวอย่างได้เนื่องจากมีสมการเดียวแต่ต้องการทราบค่าของตัวแปร 2 ตัว

$$=> \quad Z_{1-\alpha/2} + \frac{|\Delta|}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \simeq Z_\beta$$

หรือ $$Z_{1-\alpha/2} + \frac{|\Delta|}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \simeq Z_\beta$$

$$m = n \simeq \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(Z_\beta - Z_{1-\alpha/2})^2}{\Delta^2}$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

1) $H_0 : \mu_x = \mu_y$ vs $H_1 : \mu_x > \mu_y$ หรือ $\mu_x - \mu_y = \Delta > 0$
ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\bar{x} - \bar{y} > Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

$$\beta(\Delta > 0) = \Pr\{\overline{X} - \overline{Y} \leqslant Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} \mid \Delta > 0\}$$

$$= \Pr\{Z \leqslant Z_{1-\alpha} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

2) $H_0 : \mu_x = \mu_y$ vs $H_1 : \mu_x < \mu_y$ หรือ $\mu_x - \mu_y = \Delta < 0$
ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\bar{x} - \bar{y} < Z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

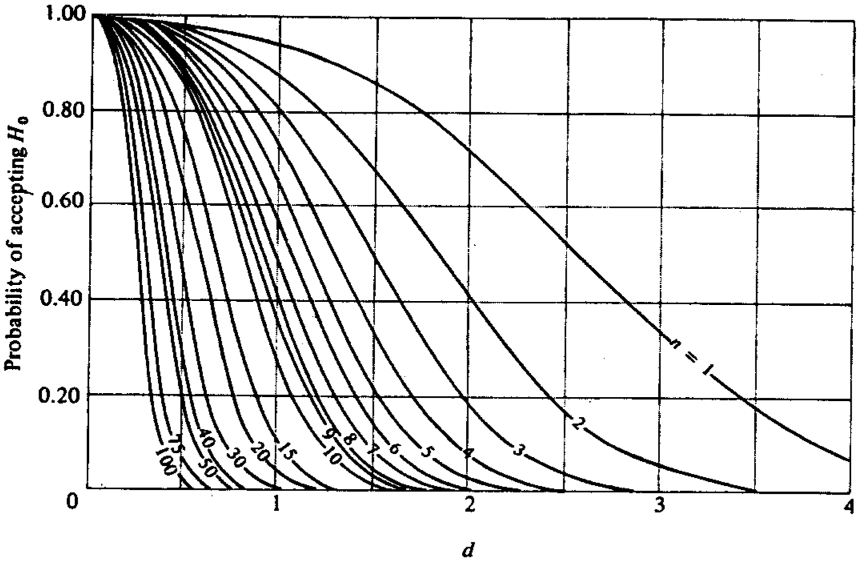
และ

$$\beta(\Delta < 0) = \Pr\{\overline{X} - \overline{Y} \geqslant Z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} \mid \Delta < 0\}$$

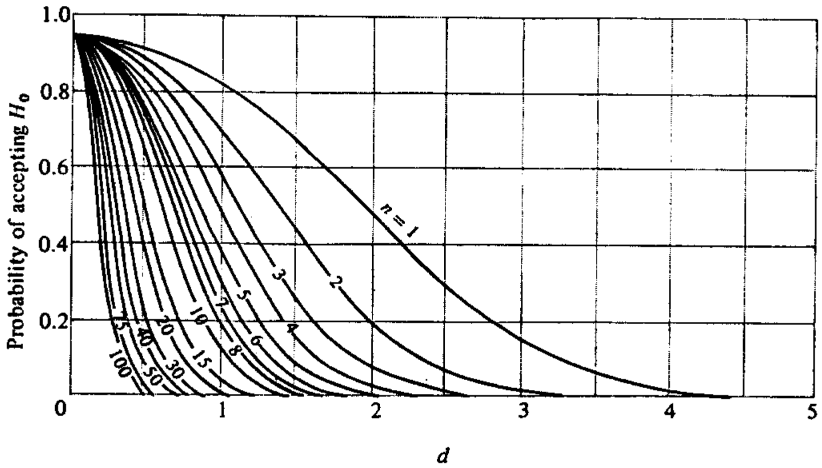
$$= \Pr\{Z \geqslant Z_\alpha - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$

อย่างไรก็ตาม การหาค่า $\beta(\Delta)$ และ $\Pi(\Delta)$ สามารถคำนวณได้โดยอาศัยโค้ง OC ในภาพ 6.1-6.4 ดังนี้

ก. กรณี Two Tail ให้ใช้โค้ง OC ตามภาพ โดยที่ $d = |\mu_x - \mu_y| / \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$

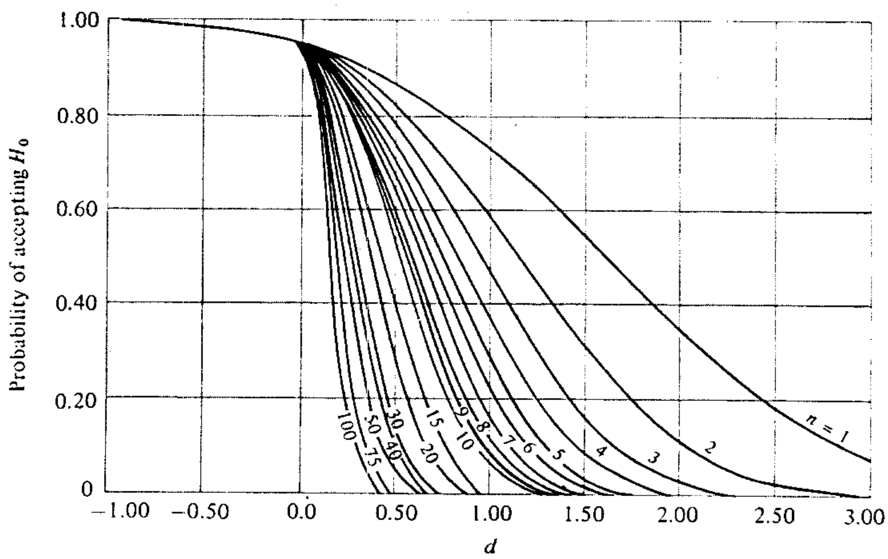


ภาพ 7.1 OC curves for different values of n for the two-sided normal test for a level of significance $\alpha = .01$.



ภาพ 7.2 OC curves for different values of n for the two-sided normal test for a level of significance $\alpha = .05$.

ข. กรณีทดสอบทางเดียวให้ใช้ $d = (\mu_x - \mu_y)/\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$ สำหรับกรณีหางขวา และใช้ $d = (\mu_y - \mu_x)/\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$ สำหรับกรณีหางซ้ายและใช้โค้งร่วมกันดังภาพ



ภาพ 7.3 OC curves for different values of n for the one-sided normal test for a level of significance $\alpha = .05$.

ขอให้สังเกตว่าในกรณีเหล่านี้จะใช้ได้เฉพาะในกรณีที่ $n = m$ เท่านั้น ถ้า $n \neq m$ ให้กะประมาณขนาดตัวอย่างขึ้นมาใหม่เพื่อใช้เลือกโค้งขนาดตัวอย่างใหม่คือ n_e โดยที่

$$n_e = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

ตัวอย่าง 7.1 เครื่องบรรจุน้ำอัดลมขนาดบรรจุ 1 ลิตร 2 เครื่องให้ค่าความแปรปรวนในปริมาณการบรรจุเท่ากันเท่ากับ 2 ซีซี ฝ่ายควบคุมคุณภาพต้องการทราบว่าเครื่องจักรทั้งสองบรรจุน้ำอัดลมได้ในปริมาณเฉลี่ยต่อขวดเท่ากันหรือไม่จึงทำการสุ่มตัวอย่างน้ำอัดลมที่บรรจุจากเครื่องทั้งสองมาอย่างละ 10 ขวด ปรากฏปริมาตรดังนี้

เครื่องที่ 1	991	993	993	998	997	997	998	989	996
เครื่องที่ 2	997	998	997	992	993	993	995	995	999

จงทดสอบความสงสัยนี้ ณ ระดับนัยสำคัญ 1%

วิธีทำ $H_0 : \mu_x = \mu_y$ vs $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$|\bar{x} - \bar{y}| > Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

$\bar{x} = 994.1,\ \bar{y} = 995.5\ ,\ Z_{.995} = 2.58$

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |994.1 - 995.5| = 1.4$$

$$Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} = 2.58\sqrt{\frac{2}{10} + \frac{2}{10}}$$

$$= 1.63$$

จะเห็นว่า $|\bar{x} - \bar{y}| < 1.63$ ดังนั้นจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลักและเชื่อว่าเครื่องบรรจุขวดทั้งสองให้ปริมาณการบรรจุได้เท่ากัน

ตัวอย่าง 7.2 ฝ่ายมาตรฐานผลิตภัณฑ์อยากทราบว่าสุราดีกรีเดียวกันที่ผลิตจาก 2 บริษัทจะมีปริมาณแอลกอฮอล์ต่างกันหรือไม่ จากผลการสุ่มตัวอย่างสุราจากบริษัท X และบริษัท Y มาบริษัทละ 25 ขวด พบว่าปริมาณแอลกอฮอล์ในสุราของบริษัท X เฉลี่ยเท่ากับ 16.8% ขณะที่ของบริษัท Y มีปริมาณเฉลี่ยเท่ากับ 18% ถ้าทราบว่า $\sigma_x = 1.2\%$ และ $\sigma_y = 1.5\%$

ก. จงทดสอบสมมุติฐานหรือข้อสงสัยของฝ่ายมาตรฐานผลิตภัณฑ์ให้ใช้ $\alpha = .05$

ข. ถ้าตามความเป็นจริงแล้วบริษัททั้งสองผลิตสุราที่มีปริมาณแอลกอฮอล์ต่างกันอยู่ถึง 2% จงหาความเสี่ยงที่จะยอมรับหรือยอมเชื่อว่าโรงงานทั้งสองผลิตสุราที่มีปริมาณแอลกอฮอล์เท่ากัน

ค. ควรสุ่มตัวอย่างมาตรวจสอบกี่หน่วยจึงจะมีผลให้ $\alpha = .01, \beta = .05$ เมื่อ $\Delta = 2\%$

วิธีทำ

ก. $H_0 : \mu_x = \mu_y$ vs $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$|\bar{x} - \bar{y}| > Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$$

$\bar{x} = 16.8\%,\ \bar{y} = 18\%,\ \sigma_x = 1.2\%,\ \sigma_y = 1.5\%,\ n = m = 25$

ดังนั้น

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |16.8 - 18|$$
$$= 1.2$$
$$Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} = 1.96\sqrt{\frac{1.44}{25} + \frac{2.25}{25}}$$
$$= 0.753$$

จะเห็นว่า $|\bar{x} - \bar{y}| > 0.753$ ดังนั้นจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักและเชื่อว่าโรงงานทั้งสองผลิตสุราที่มีปริมาณแอลกอฮอล์ต่างกันโดยเชื่อว่าบริษัท Y ผลิตสุราที่มีปริมาณแอลกอฮอล์สูงกว่า (เพราะ $|\bar{x} - \bar{y}|$ ตกอยู่ในเขตวิกฤติด้านบวก)

ข.
$$\beta(\Delta) = \Pr\{Z \leqslant Z_{1-\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$
$$- \Pr\{ \leqslant Z_{\alpha/2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$

$\Delta = 2,\ Z_{.975} = 1.96,\ Z_{.025} = -1.96,\ n = m = 25,\ \sigma_x = 1.2,\ \sigma_y = 1.5$

ดังนั้น

$$\beta(2) = \Pr\{Z \leqslant 1.96 - \frac{2}{.384}\} - \Pr\{Z < -1.96 - \frac{2}{.384}\}$$
$$= \Pr\{Z < -3.248\} - \Pr\{Z < -7.168\}$$
$$= .00120 = 0.12\%$$

หรือ
$$\Pi(2) = 1 - \beta(2) = 99.88\%$$

ค.
$$m = n \simeq \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(Z_\beta - Z_{1-\alpha/2})^2}{\Delta^2}$$

ให้ $\alpha = .01,\ \beta = .05$

ดังนั้น

$$Z_\beta = Z_{.05} = -1.64$$
$$Z_{1-\alpha/2} = Z_{.995} = 2.58$$

ดังนั้น

$$m = n \simeq \frac{(1.44 + 2.25)(-1.64 - 2.58)^2}{4}$$

$$\simeq 16.42 \simeq 16$$

ตัวอย่าง 7.3 เป็นที่น่าสงสัยว่าเครื่องเคลือบไข X จะเคลือบไขได้หนากว่าเครื่อง Y จากการสุ่มตัวอย่างกระดาษไขขนาดเดียวกันจากเครื่องทั้งสองมาเครื่องละ 25 แผ่นพบว่าปริมาณไขเฉลี่ยที่เคลือบโดยเครื่อง X และ Y มีปริมาณเท่ากับ 3.4 และ 3.1 กรัมตามลำดับและเมื่อทราบว่า $\sigma_x = \sigma_y = 0.3$

ก. จงทดสอบสมมุติฐาน ณ. ระดับนัยสำคัญ 5%

ข. ถ้าความเป็นจริงแล้วเครื่อง X เคลือบไขหนากว่าเครื่อง Y ในปริมาณ 0.2 กรัม จงคำนวณหาความเสี่ยงที่จะยอมรับสมมุติฐานหลัก

ค. ถ้าต้องการใช้ $\alpha = \beta = 0.5$ อยากทราบว่าควรสุ่มตัวอย่างมาสำรวจกี่หน่วย เมื่อ $\Delta = .09$

วิธีทำ

$$H_0 : \mu_x = \mu_y \text{ vs } H_1 : \mu_x > \mu_y$$

ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $(\bar{x} - \bar{y}) > Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$

$$\bar{x} - \bar{y} = 3.4 - 3.1 = 0.3$$

$$Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} = 1.64\sqrt{\frac{.09}{25} + \frac{.09}{25}}$$

$$= .139$$

จะเห็นว่า $(\bar{x} - \bar{y}) > .139$ ดังนั้นจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักและเชื่อว่าเครื่อง X เคลือบไขหนากว่าเครื่อง Y

ข. ให้ $\Delta = \mu_x - \mu_y = 0.2$

$$\beta(\Delta) = \Pr\{\bar{X} - \bar{Y} \leqslant Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}} \mid \Delta\}$$

$$\beta(\Delta) = \Pr\{Z \leqslant Z_{1-\alpha} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$

$$= \Pr\{Z \leq 1.64 - \frac{0.2}{.085}\}$$

$$= \Pr\{Z \leq -0.713\}$$

$$= .2389 = 23.89\%$$

ค. จากสมการ

$$\beta(\Delta) = \Pr\{Z \leq Z_{1-\alpha} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}\}$$

$$=> Z_\beta = Z_{1-\alpha} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} = Z_{1-\alpha} - Z_\beta$$

$$n = m = \frac{(Z_{1-\alpha} - Z_\beta)^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}{\Delta^2}$$

กำหนดให้ $\alpha = \beta = .05,\ \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = .09,\ \Delta = .09$

ดังนั้น $$n = m = \frac{(1.64 + 1.64)^2(.09 + .09)}{(.09)^2} = 72.88$$

$$\simeq 73$$

7.1.2 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของกลุ่มประชากรปกติสองกลุ่มเมื่อไม่ทราบค่าความแปรปรวน แต่ถือว่าประชากรทั้งสองกลุ่มมีความแปรปรวนเท่ากัน

นั่นคือ $H_0 : \mu_x = \mu_y$ vs $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$

หรือ $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$ vs $H_1 : \mu_x - \mu_y = \Delta \neq 0$

โดยที่ $X \sim N(\mu_x, \sigma^2),\ Y \sim N(\mu_y, \sigma^2)$ เมื่อ $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า โดยอาศัย MLRT จะพบว่า

$$\omega = \{\mu_x = \mu_y = \mu, \sigma^2; -\infty < \mu < \infty; \sigma^2 > 0\}$$

$$\Omega = \{\mu_x, \mu_y, \sigma^2; -\infty < \mu_x < \infty, -\infty < \mu_y < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

เมื่อสุ่มตัวอย่างจากกลุ่มประชากร X และ Y มา n และ m หน่วยตามลำดับจะปรากฏ Lω และ LΩ ดังนี้

$$L\omega = \prod_i^n f_{X_i}(x_i, \mu, \sigma^2) . \prod_i^m f_{Y_i}(y_i; \mu, \sigma^2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^m \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i^n (x_i-\mu)^2\right\}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i^m (y_i-\mu)^2\right\}$$

จาก Lω เรา take log แล้วดิฟเฟอร์เรนชิเอทเทียบต่อ μ และ σ^2 จะได้ MLE ของ μ และ σ

ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L\omega = 0$$

$$=> \quad 0 + 0 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_i^n (x_i-\mu) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_i^m (y_i-\mu) = 0$$

$$=> \quad n\bar{x} + m\bar{y} - n\mu - m\mu = 0$$

$$=> \quad \hat{\mu} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L\omega = 0$$

$$=> \quad 0 - \frac{n}{\sigma} - 0 + 0 - \frac{m}{\sigma} - 0 + \frac{1}{\sigma^3}\sum_i^n (x_i-\mu)^2 + \frac{1}{\sigma^3}\sum_i^m (y_i-\mu)^2 = 0$$

$$=> \quad -\frac{n+m}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\left\{\sum_i^n (x_i-\mu)^2 + \sum_i^m (y_i-\mu^2)\right\} = 0$$

$$=> \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\left\{\sum_i^n (x_i-\mu)^2 + \sum_i^m (y_i-\mu)^2\right\}$$

แทนค่า μ ด้วย

$$\hat{\mu} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n+m}$$

$$=> \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\{\sum_i^n (x_i - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})^2 + \sum_i^m (y_i - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})^2\}$$

แทนค่า $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}^2$ ลงในที่ของ μ และ σ^2 ใน $L\omega$ จะได้ Sup $L\omega$

และจาก
$$L\Omega = (\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i^n (x_i - \mu_x)\}(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})^m$$
$$\cdot \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i^m (y_i - \mu_y)\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_x} \ln L\Omega = 0$$

$$=> \quad 0 + 0 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_i^n (x_i - \mu_x) - 0 = 0 => \hat{\mu}_x = \bar{x}$$

$$=> \quad \frac{\partial}{\partial \mu_y} \ln L\Omega = 0$$

$$=> \quad 0 + 0 - 0 + \frac{1}{\sigma}\sum_i^m (y_i - \mu_y) = 0 => \hat{\mu}_y = \bar{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L\Omega = 0$$

$$=> \quad 0 + - \frac{n}{\sigma} - 0 + 0 - \frac{m}{\sigma} + 0 + \frac{1}{\sigma^3}\sum_i^n (x_i - \mu_x)^2 + \frac{1}{\sigma^3}\sum_i^m (y_i - \mu_y)^2 = 0$$

$$-\frac{n+m}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\{\sum_i^n (x_i - \mu_x)^2 + \sum_i^m (y_i - \mu_y)^2\} = 0$$

$$=> \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n+m}\{\sum_i^n (x_i - \mu_x)^2 + \sum_i^m (y_i - \mu_y)^2\}$$

เมื่อแทนค่า μ_x และ μ_y ด้วย $\hat{\mu}_x = \bar{x}$ และ $\hat{\mu}_y = \bar{y}$ จะได้ MLE ของ $\hat{\sigma}^2$ ดังนี้

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\{\sum_i^n (x_2 - \bar{x})^2 + \sum_i^m (y_i - \bar{y})^2\}$$

แทนค่า $\hat{\mu}_x, \hat{\mu}_y$ และ $\hat{\sigma}^2$ ลงในที่ของ μ_x, μ_y และ σ^2 ใน $L\Omega$ จะได้ Sup $L\Omega$ ตามต้องการ

ดังนั้น MLR คือ $\lambda = \dfrac{\text{Sup } L\omega}{\text{Sup } L\Omega}$ และจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\lambda \leqslant k$

ในที่นี้

$$\lambda = \frac{\{(n+m)/\sum_i^n(x_i - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})^2 + \sum_i^m (y_i - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})^2\}^{(n+m)/2}}{\{(n+m)/\sum_i^n(x_i-\bar{x})^2 + \sum_i^m (y_i-\bar{y})^2\}^{n/2}\{(n+m)/\sum_i^n(x_i-\bar{x})^2 + \sum_i^m (y_i-\bar{y})^2\}^{m/2}}$$

$$= \left\{\frac{\sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 + \sum_i^m (y_i-\bar{y})^2}{\sum_i^n (x_i - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})^2 + \sum_i^m (y_i - \frac{n\bar{x}-m\bar{y}}{n+m})^2}\right\}^{(n+m)/2}$$

$$= \left\{\frac{\sum_i^n (x_i - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}) + \sum_i^m (y_i - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})}{\sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 + \sum_i^m (y_i-\bar{y})^2}\right\}^{-(n+m)/2}$$

เฉพาะเศษถ้าบวกเข้าและลบออกด้วย $\bar{x}$ ในเทอมแรก และบวกเข้าลบออกด้วย $\bar{y}$ ในเทอมหลังจะพบว่าเศษมีค่าเป็นดังนี้

$$\sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 + \sum_i^n (\bar{x} - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})^2 + \sum_i^m (y_i-\bar{y})^2 + \sum_i^m (\bar{y} - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})^2$$

ไม่มีเทอมไขว้ทั้งนี้เพราะ $\sum_i^n (x_i-\bar{x}) = 0$ และ $\sum_i^m (y_i-\bar{y}) = 0$

$$=> \quad \lambda = \{1 + \{\sum_i^n (\bar{x} - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})^2 + \sum_i^m (\bar{y} - \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m})^2\}/\{\sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 + \sum_i^m (y_i-\bar{y})^2\}\}^{-(n+m)/2}$$

$$= \{1 + \{n(\frac{m\bar{x}-m\bar{y}}{n+m})^2 + m(\frac{n\bar{y}-m\bar{x}}{n+m})^2\}/\{\sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 + \sum_i^m (y_i-\bar{y})^2\}\}^{-(n+m)/2}$$

$$= \{1+\{(\frac{nm^2}{(n+m)^2} + \frac{mn^2}{(n+m)^2})(\bar{x}-\bar{y})^2\}/\{\sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 \sum_i^m (y_i-\bar{y})^2\}\}^{-(n+m)/2}$$

ให้ $\frac{nm^2+mn^2}{(n+m)^2} = \frac{nm(m+n)}{(n+m)^2} = \frac{nm}{(n+m)} = c$

$$=> \quad \lambda = \left\{1 + \frac{c(\bar{x}-\bar{y})^2}{\sum_i^n (x_i-\bar{x})^2 + \sum_i^m (y_i-\bar{y})^2}\right\}^{-(n+m)/2}$$

$$= \{1 + \frac{c((\bar{x} - \bar{y}) - 0)^2}{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}\}^{-(n+m)/2}$$

$$= \{1 + \frac{c\{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)\}^2}{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}\}^{-(n+m)/2} \; ; \because \mu_x - \mu_y = 0$$

หารตลอดทั้งเศษและส่วนด้วย $V(\bar{X} - \bar{Y}) = \sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m$ แต่เราถือว่า $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ [1]

ดังนั้นจึงหารตลอดทั้งเศษและส่วนด้วย $\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) = \sigma^2(\frac{n+m}{nm}) = \sigma^2/c$

$$=> \quad \lambda = \{1 + \frac{c\;\{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)^2\}/(\sigma^2/n + \sigma^2 m)}{(n-1)s_x^2/(\sigma^2/c) + (m-1)s_y^2/(\sigma^2/c)}\}^{-(n+m)/2}$$

$$= \{1 + \frac{cZ^2}{c(n-1)s_x^2/\sigma^2 + c(m-1)s_y^2/\sigma^2}\}^{-(n+m)/2}$$

$$= \{1 + \frac{Z^2}{(n-1)s_x^2/\sigma^2 + (m-1)s_y^2/\sigma^2}\}^{-(n+m)/2}$$

แต่ $\because U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$ และมี mgf. $= M_U(t) = (\frac{1}{1-2t})^{(n-1)/2}$

$V = \frac{(m-1)S^2}{\sigma^2} \; \chi^2_{(m-1)}$ และมี mgf. $M_V(t) = (\frac{1}{1-2t})^{(m-1)/2}$

mgf ของ W $= \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)s_y^2}{\sigma^2}$ คือ $M_w(t) = (\frac{1}{1-2t})^{(n-1+m-1)/2}$

ตัวแปรสุ่ม W $= \{\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)s_y^2}{\sigma^2}\} \sim \chi^2_{n+m-2}$

และจากนิยาม $t = \frac{Z\sqrt{\nu}}{\sqrt{\chi^2}}$ โดยที่ ν คือ df ของ χ^2 ซึ่งจะใช้เป็น df ของ t ด้วย

ดังนั้น

$$\lambda = \{1 + \frac{Z^2}{\frac{n+m-2}{n+m-2}((n-1)s_x^2/\sigma^2 + (m-1)s_y^2/\sigma^2)}\}^{-(n+m)/2}$$

$$= \{1 + \frac{1}{n+m-2} \cdot \frac{Z^2(n+m-2)}{(n-1)s_x^2/\sigma^2 + (m-1)s_y^2/\sigma^2}\}^{(n+m)/2}$$

---

[1] ความเป็นจริงข้อนี้ชี้ให้เห็นว่า เพราะเหตุใดจึงจำเป็นต้องถือว่า $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ เพราะถ้าไม่กำหนดเช่นนี้ จะไม่สามารถทราบ Sampling Dist^n ของ Statistic ได้

$$= \{1 + \frac{t^2}{n + m - 2}\}^{-(n+m)/2}$$

นั่นคือ เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\lambda < k$ หรือ

$$\{1 + \frac{t^2}{n + m - 2}\}^{-(n+m)/2} < k$$

$$=> \quad 1 + \frac{t^2}{n + m - 2} > k^{-(2/(n+m))}$$

$$t^2 > (n + m - 2)(k^{-(2/(n+m))} - 1)$$

$$= k$$

หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $|t| > k$ โดยที่ k คือค่า Ordinate ใต้โค้ง t ที่สามารถปรับค่าไปมาได้จนกระทั่งทำให้พื้นที่ในเขตวิกฤติมีค่าเท่ากับ α ที่กำหนดไว้

โดยที่

$$t = \frac{Z\sqrt{n + m - 2}}{\sqrt{\chi^2_{(n+m-2)}}}$$

$$= \frac{\{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)\}/\sqrt{\sigma^2/n + \sigma^2/m}}{\sqrt{\frac{(n - 1)s_x^2}{\sigma^2} + \frac{(m - 1)s_y^2}{\sigma^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n + m - 2}}}$$

$$= \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{(n - 1)s_x^2 + (m - 1)s_y^2}{n + m - 2}}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

$$= \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

ปัญหาต่อไปคือคำนวณหาค่าของ k

จาก α = Pr{ปฏิเสธสมมุติฐานหลักทั้ง ๆ ที่สมมุติฐานหลักถูกต้อง}

=> $\alpha = Pr\{|t| > k | \mu_x = \mu_y\}$

แสดงว่า α คือพื้นที่ในเขตวิกฤติใต้โค้ง t

=> $Pr\{|t| > k\} = \alpha = Pr\{|t| > t_{n+m-2, 1-\alpha/2}\}$

=> $k = t_{n+m-2, 1-\alpha/2}$