$$L\hat{\omega} = \frac{e^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}\left(\frac{n! s_1^2 + n_2 s_2^2 + \ldots + n_k s_k^2}{n}\right)^{n/2}}$$

และสำหรับ $L\Omega$ เราสามารถคำนวณหา $L\hat{\Omega}$ ได้ดังนี้

$$L\Omega = \prod_i^k \prod_j^{n_i} f_{x_{ij}}(x_{ij}, \mu_i, \sigma_i^2)$$

$$= \prod_i^k \{(-\frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}})^{n_i} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_j^{n_i}(x_{ij}-\mu_i)^2\}\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1^{n_1}\sigma_2^{n_2}\ldots\sigma_k^{n_k}} \exp\{-\sum_i^k\{(\frac{1}{2\sigma_i^2}\sum_j^{n_i}(x_{ij}-\mu_i)^2\}\}$$

ดังนั้น MLE ของ μ_i และ σ_i^2 จึงคำนวณได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\mu_i}\ln L = 0 \Rightarrow 0 - 0 - \ldots - 0 + \frac{1}{\sigma_i^2}\sum_j^{n_i}(x_{ij}-\mu_i) - 0 = 0; i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i}\sum_j^{n_i} x_{ij} = \bar{x}_i \; ; i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_i}\ln L\Omega = 0 \Rightarrow 0 - 0 - \ldots - 0 - n_i/\sigma_i - 0 \ldots - 0$$

$$+ \frac{1}{\sigma_i^3}\sum_j^{n_i}(x_{ij}-\mu_i)^2 - 0 - \ldots - 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_j^{n_i}(x_{ij}-\mu_i)^2 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

ดังนั้น MLE ของ σ_i^2

$$\hat{\sigma}_i^2 = s_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_j^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$ [1]

$$\Rightarrow \quad L\hat{\Omega} = \prod_i^k \prod_j^{n_i} f_{x_{ij}}(x_{ij}; \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^2)$$

$$= \frac{e^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2} s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots s_k^{n_k}}$$

---

[1] $\frac{1}{n_i}\sum_j^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$ เป็น biased estimator ของ σ_i^2 ในที่นี้ใช้ $s_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_j^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$ เป็นเพียงค่าประมาณและต้องการให้มีลักษณะที่ง่ายไม่รุงรัง ที่ถูกแล้วควรใช้ $\frac{1}{n_i}\sum_j^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2 = \frac{(n_i-1)s^2}{n_i}$ จึงขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับนักศึกษาจะได้พัฒนา λ โดยอาศัย unbiased estimator ดังกล่าว

ดังนั้น เราจะปฏิเสธสมมุติฐานเมื่อ $\lambda \leqslant c$ [1] หรือปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\lambda = \frac{L\hat{\omega}}{L\hat{\Omega}} = \frac{s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots s_k^{n_k}}{\left(\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + \ldots + n_k s_k^2}{n}\right)^{n/2}} \leqslant c$$

ถ้าเราทราบ Sampling Distribution ของ λ คือ $f(\lambda)$ เราก็จะสามารถหาค่าของ c ได้ แต่เนื่องจากตัวสถิติ λ ในที่นี้ซับซ้อนมากจำเป็นต้องประมาณฟังก์ชั่น $f(\lambda)$ โดยอาศัยทฤษฎีที่ 7.1 [2]

จาก H_0 จะเห็นว่า H_0 ระบุค่า σ^2 ไว้ต่างกันย่อมทำให้เราทราบตามทฤษฎี 7.1 ว่า df = k แต่ปรากฏว่า H_0 ถือว่าความแปรปรวนมีค่าเท่ากัน ดังนั้น df จึงเท่ากับ k − 1 ดังนั้น $-2\ln\lambda \sim \chi^2_{k-1}$ จาก $\lambda \leqslant c$ เราสามารถคำนวณหาค่า c โดยอาศัยฟังก์ชั่นความเสี่ยงประเภทที่ 1 ดังนี้

$$\alpha = \Pr(\text{ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อสมมุติฐานหลักเป็นจริง})$$

$$\Rightarrow \quad \Pr\left\{ \frac{s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots s_k^{n}}{\left(\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + + n_k s_k^2)}{n}\right)^{n/2}} < c \mid H_0 \right\} = a$$

$$\Pr\left\{ -2\ln \frac{s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots s_k^{n_k}}{\left(\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + \ldots + n_k s_k^2)}{n}\right)^{n/2}} > -2\ln c = c' \right\} = a$$

$$\Pr\{\chi^2 > \chi^2_{k-1,\ 1-\alpha}\} = \alpha$$

$$\Rightarrow \quad c' = \chi^2_{k-1,1-\alpha}$$

นั่นคือปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\dfrac{s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots s_k^{n_k}}{\left(\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_k s_k^2}{n}\right)^{n/2}} > \chi^2_{k-1,1-\alpha}$

อย่างไรก็ตาม test นี้เหมาะสมที่จะใช้เฉพาะเมื่อ $n_i \to \infty$ เท่านั้น และในการทดสอบสมมุติฐานนี้ Bartlett ได้ใช้ test statistic ที่ใช้ทดแทนกันได้และเหมาะสมกับสถานการณ์ทั่วไปของ n_i คือ ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

---

[1] โดยปกติใช้ $\lambda \leqslant k$ ในที่นี้ขอเปลี่ยนเป็นตัวคงที่ k เป็น c เพื่อป้องกันความสับสนกับ k ที่กล่าวมาแล้ว เช่น n_k, σ_k^2

[2] เมื่อ $\lambda = L\hat{\omega}/L\hat{\Omega}$ ตัวแปรสุ่ม $-2\ln\lambda$ จะมีการแจกแจง (Asymtotic Distribution) แบบ χ^2 เมื่อ $n \to \infty$ (ในที่นี้ $n_i \to \infty$) โดยมี df = จำนวนพารามิเตอร์ใน H_0 ที่จะต้องประมาณค่า

$$\frac{-2\ln m}{1+\frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i}^{k}\frac{1}{n_i-1}-\frac{1}{n-k}\right)} > \chi^2_{k-1,1-\alpha}$$

โดยที่ $$m = \frac{\prod_{i}^{k}\left(\frac{n_i s_i^2}{n_i-1}\right)^{(n_i-1)/2}}{\{(\sum_{i}^{k} n_i s_i^2/\sum_{i}^{k}(n_i-1)\}^{\Sigma(n_i-1)/2}}$$ เมื่อ $n = \Sigma n_i$

หรืออีกรูปหนึ่งคือปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\frac{1}{\varrho}\ \{\sum_{i}^{k}(n_i-1)\ln\{\sum_{i}^{k}(n_i-1)s_i^2/(n-k)\} - \sum_{i}^{k}(n_i-1)\ln s_i^2\} > \chi^2_{k-1,1-\alpha}$$

โดยที่ $$\varrho = 1+\frac{1}{3(k-1)}\ \{(\sum_{i}^{k}\frac{1}{n_i-1}) - \frac{1}{n-k}\}$$

หมายเหตุ เรามีทฤษฎีเกี่ยวกับ $-2\ln\lambda$ ซึ่งเป็นทฤษฎีเกี่ยวกับ Asymtotic Distribution ของ Generalized Likelihood Ratio ดังนี้

ทฤษฎี 7.1 ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ คือ Sampled Random Variable ที่มี joint pdf เป็น $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ เมื่อ $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ และสมมุติว่า parameter space Ω มี k มิติ (หรือ Ω คือเซทของพารามิเตอร์ที่มีพารามิเตอร์ทั้งสิ้น k ตัว) ในการทดสอบสมมุติฐาน

$$H_0 : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0, \ldots, \theta_r = \theta_r^0; \theta_{r+1}, \theta_{r+2}, \ldots, \theta_k$$

เมื่อ $\theta_1^0, \theta_2^0, \ldots, \theta_r^0$ เป็นค่าตัวเลขที่ทราบได้ (หรือค่าที่ระบุไว้) ของ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ ส่วน $\theta_{r+1}, \theta_{r+2}, \ldots, \theta_k$ ไม่ทราบค่าหรือมิได้ระบุไว้ให้

ดังนั้น $-2\ln\lambda$ จะมีการแจกแจงโน้มเข้าสู่การแจกแจงแบบ χ^2 มี df = r = จำนวนพารามิเตอร์ที่ระบุค่าไว้ใน H_0 (เมื่อ H_0 จริง) ถ้า $n \to \infty$

ขอให้สังเกตว่า H_0 ในทฤษฎีนี้เสนอไว้ในลักษณะเฉพาะเจาะจง แต่สมมุติฐานเพื่อการวิจัย หรือสมมุติฐานทางสถิติโดยเฉพาะ H_0 มักไม่เสนอไว้ในรูปนี้ หากเป็นรูปอื่น ๆ เช่น

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

⋮

หรือ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ เป็นต้น

ซึ่งสมมุติฐานเหล่านี้มิได้ระบุ (specify) ว่า μ ตัวใดหรือ σ^2 ตัวใดมีค่าเป็นตัวเลขเท่ากับเท่าไร หากเสนอไว้ในรูปกลาง ๆ ว่าเท่ากัน แต่มิได้ระบุว่าที่เท่ากันนั้นเท่ากับเท่าไร

ด้วยเหตุนี้เพื่อที่เราจะได้ทราบค่า df ของ χ^2 เราจำเป็นต้องแปลงรูปสมมุติฐานเหล่านี้ให้มีพารามิเตอร์ลักษณะเดียวกันกับที่เสนอไว้ในทฤษฎี วิธีการเช่นนี้เรียกว่า Reparameterize การจัดพารามิเตอร์ใหม่ (Reparameterize) นี้จำเป็นจะต้องยึดถือความจริงตาม H_0 และนำพารามิเตอร์ทุกตัวใน ω มาจัดเรียงไว้ด้วยเพื่อให้สอดคล้องกับทฤษฎีที่ระบุพารามิเตอร์และเสนอพารามิเตอร์ทุกตัวไว้ใน H_0 กล่าวคือตามทฤษฎีเสนอ H_0 ไว้ดังนี้

$$H_0 : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0, \ldots, \theta_r = \theta_r^0; \theta_{r+1}, \theta_{r+2}, \ldots, \theta_k$$

แสดงว่าที่จำเป็นจริง ๆ แล้ว H_0 คือ

$$H_0 : \theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0, \ldots, \theta_r = \theta_r^0$$

ส่วน $\theta_{r+1}, \theta_{r+2}, \ldots, \theta_k$ มิใช่พารามิเตอร์ที่มุ่งทดสอบทุกตัว[1] แต่เป็นพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกันอยู่ตาม Distribution ของตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่างเช่น ต้องการทดสอบ $H_0 : \mu_x = \mu_y$ เมื่อ σ_x^2 และ σ_y^2 ไม่ทราบค่า ในที่นี้ σ_x^2 และ σ_y^2 เป็นพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องอยู่ตาม Distribution ของ X และ Y คือ $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

สำหรับการทดสอบสมมุติฐาน $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ โดยที่ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ เมื่อ μ_i เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า

ดังนั้น $\omega = \{\mu_i, \sigma_i^2, -\infty < \mu_i < \infty, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = \sigma^2 > 0\}$

และด้วยเหตุที่ H_0 มิได้ระบุว่า σ_1^2 เท่ากับเท่าไร σ_2^2 เท่ากับเท่าไร ... σ_k^2 เท่ากับเท่าไร บอกเพียงแต่กว้าง ๆ ว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ แสดงว่า H_0 นี้มิได้ระบุค่าของ σ^2 ไว้ เพื่อจะให้ทราบค่า df ของ χ^2 ได้ เราจำเป็นต้องหาหนทางจัด H_0 ให้ตรงกับทฤษฎีโดยมีพารามิเตอร์บางส่วนได้รับการระบุค่า และถ้าเราทราบค่าของ σ_i^2 ตัวใดตัวหนึ่งก็จะทราบทุกค่า

ดังนั้น ถ้านำ σ_k^2 ไปหาร σ_i^2; $i \neq k$ จะพบว่า

$$H_0 : \theta_1 = \sigma_1^2/\sigma_k^2 = 1, \theta_2 = \sigma_2^2/\sigma_k^2 = 1, \ldots, \theta_{k-1} = \sigma_{k-1}^2/\sigma_k^2 = 1, \theta_k = \sigma_k^2, \theta_{k+1} = \mu_1$$

$$\theta_{k+2} = \mu_2, \ldots, \theta_{2k} = \mu_k$$

$$=> H_0 : \theta_1 = 1, \theta_2 = 1, \ldots, \theta_{k-1} = 1, \theta_k, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_{2k}$$

---

[1] ดูตัวอย่างหน้าถัดไป

แสดงว่าเมื่อ Reparameterize แล้วพบว่า H_0 ระบุค่าของพารามิเตอร์ได้ $k - 1$ ตัว ที่เหลืออีก $2k - k + 1$ ตัวมิได้ระบุค่า ดังนี้ตัวแปรสุ่ม $-2 \ln \lambda$ จะมีการแจกแจงโดยประมาณแบบ χ^2_{k-1} ขอให้สังเกตว่าเรายังถือว่า σ_k^2 เป็น Unspecified Parameter ทั้งนี้เพราะโดยความเป็นจริงแล้ว σ_k^2 เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าและมิได้ระบุค่าอยู่แล้ว แต่เหตุที่ H_0 ระบุว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ ถ้าเราทราบค่า σ_k^2 (หรือ σ_i^2 ใด ๆ $i = 1, 2, \ldots, k$) เราก็ทราบ σ_i^2 ได้ทุกค่า เห็นได้ว่า $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k-1}$ เป็นฟังก์ชั่นของ σ_k^2 โดยที่ σ_k^2 เป็นตัวที่ไม่ทราบค่า

ตัวอย่าง 7.11 จากการบันทึกปริมาณการบรรจุขวดของเครื่องบรรจุ 8 เครื่อง โดยสุ่มตัวอย่างมาเครื่องละ 10 ขวด ปรากฏค่าความแปรปรวนดังนี้

9.2 11.6 7.6 4.6 12.1 8.9 5.6 10.4

อยากทราบว่า เครื่องทั้งแปดให้ความแปรปรวนในการบรรจุขวดต่างกันหรือไม่

วิธีทำ $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_8^2 = \sigma^2$ vs $H_1 : \sigma_i^2$ อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน

ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\frac{-2 \ln m}{1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_i^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-k}\right)} > \chi^2_{k-1, 1-\alpha}$$

เมื่อ
$$m = \frac{\prod_i^k \left(\frac{n_i s_i^2}{n_i - 1}\right)^{(n_i-1)/2}}{\left(\frac{\sum_i^k n_i s_i^2}{\sum_i^k (n_i - 1)}\right)^{\Sigma(n_i-1)/2}}$$

$n_i = 10; i = 1, 2, \ldots, 8$

$$\sum_i^8 (n_i - 1) = 72$$

$$\sum_i^8 \left(\frac{n_i - 1}{2}\right) = 36$$

$$m = \frac{6.43772746 \times 10^{34}}{3.62710033 \times 10^{35}}$$

$$= .1774896439918$$

ดังนั้น $\chi_c^2 = 3.31938$

$$\chi^2_{7,.95} = 14.07$$

จะเห็นว่า $\chi_c^2 < 14.07$ ดังนั้นจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลักและเชื่อว่าความแปรปรวนในการบรรจุของเครื่องบรรจุทั้งแปดมิได้แตกต่างกัน

แบบฝึกหัด

1. ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_m$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากร Exp (λ_1) ขณะที่ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ เป็นกลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากร Exp (λ_2) สมมุติว่ากลุ่มตัวอย่างทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน

   ก. จงสร้างตัวทดสอบสำหรับสมมุติฐาน

   $Ho: \lambda_1 = \lambda_2$ vs $Hl: \lambda_1 \neq \lambda_2$

   ข. จงแสดงให้เห็นว่าตัวทดสอบสามารถเสนอได้ในรูป

   $T = \Sigma x_i/(\Sigma x_i + \Sigma y_i)$

2. สุ่มตัวอย่าง 4 หน่วยมาจากกลุ่มประชากร $N(\mu, 4)$ ปรากฏข้อมูลดังนี้คือ $(-4.4, 4.0, 2.0, -4.8)$ แล้วสุ่มตัวอย่างมา 4 หน่วยจากกลุ่มประชากร $N(\mu, 5)$ ปรากฏข้อมูลดังนี้คือ $(6.0, 1.0, 3.2, -0.4)$ จงทดสอบสมมุติฐานว่าค่าเฉลี่ยของประชากรทั้งสองกลุ่มจะต่างกันไม่เกินกว่า 1 หน่วย กล่าวคือ

   $Ho: \Delta \leqslant 1$ vs $Hl: \Delta > 1$

   และ $Ho: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $Hl: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

3. กำหนดตัวอย่างให้ 2 ชุดดังนี้คือ (1.8,2.9,1.4,1.1) และ (5.0,8.6,9.2) ซึ่งเป็นกลุ่มตัวอย่างจากกลุ่มประชากรปกติ จงทดสอบดูว่าความแปรปรวนของประชากร 2 กลุ่มแตกต่างกันหรือไม่

4. จงสร้างตัวทดสอบสำหรับสมมุติฐาน

   $Ho: p_1 = p_2$ vs $Hl: p_1 \neq p_2$

   $Ho: p_1 = p_2$ vs $Hl: p_1 > p_2$

   $Ho: p_1 = p_2$ vs $Hl: p_1 < p_2$

   เมื่อ $X \sim b(n_1, p_1)$ และ $Y \sim b(n_2, p_2)$

5. ปริมาณกำมะถันในน้ำมันเครื่อง 2 ชนิดที่พบจากกลุ่มตัวอย่างปรากฏดังนี้

	ปริมาณกำมะถัน				
น้ำมันเครื่อง X	2.6	3.1	3.5	3.8	4.1
น้ำมันเครื่อง Y	2.8	3.2	3.4	3.8	4.2

สมมุติปริมาณกำมะถันในน้ำมันเครื่องมีการแจกแจงแบบปกติมีความแปรปรวนร่วมกันเท่ากับ .04% อยากทราบว่าปริมาณกำมะถันในน้ำมันเครื่อง 2 ชนิดมีความแตกต่างกันหรือไม่

6. สุ่มตัวอย่างภาชนะอลูมิเนียมที่ปั๊มด้วยเครื่องจักร A มา 25 ชิ้น พบความหนาเฉลี่ยเท่ากับ .152 นิ้ว ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน .0025 นิ้ว และสุ่มภาชนะชนิดเดียวกันที่ปั๊มโดยเครื่องจักร B มา 50 ชิ้น พบความหนาเฉลี่ย .143 นิ้ว ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน .0025 นิ้ว
   ก. จงทดสอบดูว่าเครื่องจักร A และ B ผลิตภาชนะได้หนาต่างกันหรือไม่
   ข. จงอาศัยผลในข้อ ก. คำนวณหาค่าความน่าจะเป็นที่จะยอมรับสมมุติฐานหลักเมื่อ $\Delta = .002$ นิ้ว

7. ข้อมูลต่อไปนี้วิเคราะห์ได้จากกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่ม คือ

   X : $n_x = 18$ $\quad \Sigma x_i = 36$

   Y : $n_y = 22$ $\quad \Sigma y_i = 48$

   สมมุติว่า $\sigma_x = \sigma_y = .5$
   จงทดสอบสมมุติฐาน $Ho: \mu_x = \mu_y$ vs $H_1: \mu_x < \mu_y$
   พร้อมทั้งคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

   $\mu_y - \mu_x = .25$

8. ต้องการทราบว่าแบตเตอรี่ที่ผลิตโดยบริษัท A จะมีอายุการใช้งานเฉลี่ยสูงกว่าแบตเตอรี่ที่ผลิตโดยบริษัท B หรือไม่ โดยที่ประสบการณ์ในอดีตชี้ว่า $\sigma_A = \sigma_B = 10$ สัปดาห์และท่านต้องการหาความเสี่ยงที่จะสรุปว่าแบตเตอรี่ทั้งสองชนิดมีอายุเฉลี่ยเท่ากันทั้ง ๆ ที่ยี่ห้อ A มีอายุเฉลี่ยสูงกว่า B อย่างน้อย 10 สัปดาห์ ไม่เกิน 10% จงกำหนดขนาดตัวอย่างและกติกาการตัดสินใจ ทั้งนี้ให้ถืออายุการใช้งานของแบตเตอรี่เป็นตัวแปรสุ่มปกติ

9. ต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์จากการรวบรวมข้อมูลจากตัวอย่าง 2 ชุด จากกลุ่มประชากรปกติ

   X : $n_x = 5,\ \ \Sigma x_i = 50,\ \ \Sigma x_i^2 = 552$

   Y : $n_y = 7,\ \ \Sigma y_i = 84,\ \ \Sigma y_i^2 = 1,036$

   สมมุติว่าประชากร 2 กลุ่มมีความแปรปรวนเท่ากัน จงทดสอบสมมุติฐาน

   $Ho: \mu_x = \mu_y \qquad$ vs $H_1: \mu_x < \mu_y$

   และควรสุ่มตัวอย่างมากี่หน่วยจึงจะควบคุม $\beta = .05$ เมื่อ $\mu_x - \mu_y = 2$
   ทั้งนี้ให้ถือว่า s_p^2 คือตัวประมาณค่าของ σ^2

10. ในการพัฒนาเทคนิคในการผลิตวินิลิดินคลอไรด์ โดยวัดเปรียบเทียบไดอิเลคตริค สเตรนจ์ (Dielectric Strength) ระหว่างวิธีเดิมกับวิธีใหม่ปรากฏข้อมูลดังนี้คือ

	Dielectric strength (Volt/mil)								
วิธีเดิม	310	318	298	316	286	316	305	299	311
วิธีใหม่	302	322	315	338	314	327	335	308	321

เมื่อถือว่าประชากร 2 กลุ่มมีความแปรปรวนร่วมกัน

ก. อยากทราบว่าปัญหาข้างต้นมีข้อยุติอย่างไร

ข. สมมุติว่าความแปรปรวนร่วมเท่ากับ 121 จงคำนวณหาขนาดตัวอย่างที่สามารถยืนยันความถูกต้องว่าวิธีผลิตใหม่สามารถเพิ่ม dielectric strength ได้ 12 Volt/mil ได้ถึง 90%

11. X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มปกติที่เป็นอิสระต่อกัน สุ่มตัวอย่างจากตัวแปรสุ่มซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ ทั้งสองมาปรากฏผลดังนี้

$X : n_x = 10, \quad \Sigma x_i = 200, \Sigma x_i^2 = 4009$

$Y : n_y = 18, \quad \Sigma y_i = 396, \Sigma y_i^2 = 8780$

จงทดสอบสมมุติฐาน

ก. $Ho : \sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

ข. $Ho : \mu_x - \mu_y = 0 \quad vs \quad H_1 : \quad \mu_x - \mu_y < 0$

12. สุ่มตัวอย่าง $n_x = 10$ และ $n_y = 10$ จากกลุ่มประชากร X และ Y พบว่า $s_x^2 = 26.5$ และ $s_y^2 = 29.15$ อยากทราบว่ากลุ่มประชากรทั้งสองมีความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่

13. ทราบว่าปริมาณดีบุกที่สะสมอยู่บนผิวแผ่นเหล็กเป็นตัวแปรสุ่มปกติ จากการทดลองวิธีผลิตแผ่นเหล็ก 2 วิธี เพื่อเปรียบเทียบดูว่าให้ปริมาณดีบุกสะสมต่างกันหรือไม่ ปรากฏข้อมูลดังนี้

วิธีที่ 1	.30	.32	.28	.36	.26	.35	.31	.31	.34	.27
วิธีที่ 2	.27	.31	.22	.36	.29	.25	.33	.31	.27	.29

จงทดสอบสมมุติฐานต่อไปนี้

ก. $Ho : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

ข. $Ho : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

ค. $Ho : \mu_1 = \mu_2 \; vs \; H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

ง. จงคำนวณหาขนาดตัวอย่างที่ทำให้ความเสี่ยงที่จะตัดสินใจว่า $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ทั้ง ๆ ที่- $\sigma_1^2 = 2.25\ \sigma_2^2$ มีเพียง 10%

14. อยากทราบว่าเครื่องวัดอุณหภูมิ (Pyrometer) 2 ชนิดสามารถวัดอุณหภูมิได้ต่างกันหรือไม่ จากการทดลองวัดความร้อนของโลหะตัวอย่าง 10 ชิ้นโดยใช้ไพโรมิเตอร์ 2 ชนิดนั้นปรากฏผลเปรียบเทียบดังนี้

	อุณหภูมิ (F°)									
โลหะชิ้นที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ไพโรมิเตอร์ A	1850	1630	1518	1980	2010	1760	1300	1415	2510	2730
ไพโรมิเตอร์ B	1890	1620	1550	1985	2030	1800	1293	1455	2530	2710

สมมุติว่าอุณหภูมิที่วัดได้มีการแจกแจงแบบปกติ

ก. ไพโรมิเตอร์ 2 ชนิดวัดอุณหภูมิได้ต่างกัน หรือไม่

ข. เมื่อถือว่า $\sigma_d \cong 20F^\circ$ และตามความเป็นจริงแล้วไพโรมิเตอร์ทั้ง 2 ชนิดวัดอุณหภูมิได้ต่างกัน 20°F อยากทราบว่าควรสุ่มตัวอย่าง โลหะมาทดลองวัดอุณหภูมิกี่ชิ้นจึงจะยืนยันความแตกต่างกันจริง ดังกล่าวได้ถึง 90%

15. เป็นที่กล่าวว่าน้ำมันเครื่อง X มีความหนืดสูงน้ำมันเครื่อง Y จากการบันทึกข้อมูล ปรากฏความหนืดของน้ำมันเครื่องตัวอย่างดังนี้

	ความหนืด (Sec Saybolt)									
คู่ที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
น้ำมันเครื่อง X	120	130	128	170	190	210	230	250	270	290
น้ำมันเครื่อง Y	105	115	121	175	183	207	216	230	261	275

สมมุติว่าความหนืดเป็นตัวแปรสุ่มปกติ

ก. ท่านจะสรุปผลอย่างไรจากข้อมูล

ข. จงหาความน่าจะเป็นที่จะยอมรับสมมุติฐานหลักเมื่อค่าเฉลี่ยความหนืดของน้ำมันเครื่อง X สูงกว่าน้ำมันเครื่อง Y ทั้งสิ้น 8 sec Saybolt

ค. ควรสุ่มตัวอย่างมาทดลองกี่ชุดจึงจะทำให้ β ในข้อ ข. ลดลงได้ถึง 50%

สมมุติว่า σ_d = 8 sec Saybolt

16. บริษัทผู้ผลิตอุปกรณ์ในการถ่ายภาพต้องการเปรียบเทียบคุณภาพของหลอดไฟแฟลช 2 ชนิด จากตัวอย่างหลอดชนิด A ทั้งสิ้น 100 หลอด มีหลอดเสื่อมสภาพปนอยู่ 15 หลอด ขณะที่ชนิด B สุ่มมา 150 หลอด มีหลอดเสื่อมสภาพปนอยู่ 33 หลอด จงทดสอบเปรียบเทียบคุณภาพ

ข้อแนะนำ ข้อนี้คือการเปรียบเทียบอัตราส่วน $Ho : p_1 = p_2$ ซึ่งต้องอาศัยผลการพัฒนาตัวทดสอบในแบบฝึกหัดข้อ 4

17. ผู้จำหน่ายบุหรี่เชื่อว่าคนในตำบล ก. สูบบุหรี่มากกว่าในตำบล ข. จากการสำรวจปรากฏผล ดังนี้

	ตำบล ก.	ตำบล ข.
ขนาดตัวอย่าง	500	700
จำนวนผู้สูบบุหรี่	225	245

ผู้จำหน่ายบุหรี่กล่าวได้ถูกต้องหรือไม่

18. ในการทดลองเพื่อเปรียบเทียบคุณภาพวัคซีน 2 ชนิด กับคน 2 กลุ่ม ๆ ละ 250 คน ปรากฏผลดังนี้

ชนิด	จำนวนคนแพ้วัคซีน
ก.	16
ข.	8

เชื่อได้หรือไม่ว่าวัคซีน ข. มีคุณภาพสูงกว่าวัคซีน ก

20. ทราบกันดีว่าจำนวนผู้ที่เสียชีวิตจากอุบัติเหตุทางรถยนต์มีการแจกแจงแบบพัวซอง หลังจากที่ทางราชการได้มีการชักชวนประชาชาชนในวิธีป้องกันอุบัติเหตุทางรถยนต์เป็นเวลา 1 ปี ซึ่งในระหว่างนั้นได้มีการบันทึกจำนวนผู้ที่เสียชีวิตในอุบัติเหตุทางรถยนต์ไว้พร้อมกันไป ปรากฏว่ามีจำนวนผู้เสียชีวิต 218 ราย ขณะที่ปีที่แล้วก่อนหน้านั้นมีผู้เสียชีวิต 296 ราย

ก. เชื่อได้หรือไม่ว่าการชักชวนประชาชนของทางราชการมีผลดี

ข. ถ้าจำนวนผู้เสียชีวิตในปีที่มีการโฆษณาชักชวนกับปีก่อนหน้านั้นเท่ากับ 200 และ 300 คน ตามลำดับ จงคำนวณหา Power

ข้อแนะนำ ให้ใช้ Square Root Transformation แปลงตัวแปรพัวซองเป็นตัวแปรสุ่ม $N(\sqrt{\lambda t}, 1/4)$