บทที่ 8
การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance)

8.1 การแจกแจงของ Quadratic Forms ของตัวแปรสุ่มปกติ

Quadratic Forms คือโพลีโนเมียลเอกพันธ์ดีกรีที่ 2 ของตัวแปร คำว่าโพลีโนเมียลเอกพันธ์ (Homogeneous Polynomial) หมายถึงโพลีโนเมียลที่เกิดจากการประกอบกันของตัวแปรกำลังเดียวกัน หมายความว่าองค์ประกอบเหล่านั้นมีกำลังหรือผลรวมของกำลังเท่ากัน ทั้งนี้โดยมิได้มีข้อจำกัดว่า ส.ป.ส. ของแต่ละองค์ประกอบเป็นจำนวนจริงหรือไม่ ถ้าสปส.ขององค์ประกอบเป็นจำนวนจริงเราเรียกโพลีโนเมียลนั้นว่า Real Polynomial สำหรับโพลีโนเมียลเอกพันธ์ดีกรีที่ 2 หมายถึงโพลีโนเมียลที่เกิดจากการประกอบกันของตัวแปรหรือกลุ่มตัวแปรที่มีกำลังหรือผลรวมของกำลังเท่ากับ 2 โดยตลอด เช่น

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 \text{ หรือ } 2X_1X_2 + 2X_1X_3 + \ldots + 2X_{n-1}X_n$$

ขอให้สังเกตว่าโพลีโนเมียลทั้งสองนี้ประกอบขึ้นจากเทอมต่าง ๆ ที่มีกำลัง 2 หรือผลรวมของกำลังของตัวแปรเท่ากับ 2 โดยตลอด ตัวอย่างของ Quadratic Form ที่นักสถิติคุ้นเคยมากที่สุด คือ

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

ซึ่งเมื่อลองกระจาย S^2 ออกจะพบว่า

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i}^{n} X_i^2 - \frac{(\Sigma X_i)^2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} X_iX_j\right\}\right.$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\sum_{i}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i<j}^{n} X_iX_j\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i<j}^{n} X_iX_j$$

$$= \frac{1}{n}X_1^2 + \frac{1}{n}X_2^2 + \ldots + \frac{1}{n}X_n^2 - \frac{2}{n(n-1)}X_1X_2$$

$$- \frac{2}{n(n-1)}X_1X_3 - \ldots - \frac{2}{n(n-1)}X_{n-1}X_n$$

หรือจัดให้เป็นรูปแมตริกซ $X^T AX$ ได้ดังนี้

$$S^2 = (X_1, X_2, \ldots, X_n)\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{-1}{n(n-1)} & \frac{-1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{-1}{n(n-1)} \\ \frac{-1}{n(n-1)} & \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{-1}{n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-1}{n(n-1)} & \frac{-1}{n(n-1)} & \frac{-1}{n(n-1)} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

อย่างไรก็ตาม ในลำดับต่อไปเราจะศึกษาเฉพาะกรณีที่ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติเท่านั้น ซึ่งในกรณีนี้เราจะศึกษาเน้นหนักไปใน Quadratic Form แบบต่าง ๆ ที่สำคัญคือตัวแปรสุ่ม $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ (หรือ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ แล้วแต่กรณี) และตัวแปรสุ่มอื่น ๆ ที่พัฒนาขึ้นมาจาก Sum of Square

ประโยชน์ที่เด่นชัดที่ชี้ให้เห็นถึงความจำเป็นที่ต้องศึกษาการแจกแจงของ Quadratic Form ของตัวแปรสุ่มปกติคือ

1. การแจกแจงของ Quadratic Form ของตัวแปรสุ่มปกติ เป็นที่มาของแหล่งความผันแปรต่าง ๆ ในการวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) และช่วยชี้ให้เห็นเหตุผลของวิธีทดสอบสมมุติฐานโดยอาศัย ANOVA

2. ช่วยให้สามารถพัฒนาตัวทดสอบสำหรับ Ho : $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

ขอยกตัวอย่างชี้ให้เห็นปัญหาในการศึกษาเรื่อง ANOVA ที่นักศึกษาส่วนใหญ่มักจะประสบอยู่เสมอดังนี้

สมมุติว่านักวิจัยต้องการเปรียบเทียบว่าปุ๋ยสูตรต่าง ๆ k สูตร ส่งผลกระทบต่อปริมาณการผลิตข้าวโพดพันธุ์ ก.1 แตกต่างกันหรือไม่ ทั้งนี้ผู้วิจัยควบคุมสภาพแวดล้อมต่าง ๆ ของการทดลองให้มีสภาพเดียวกันตลอด เช่น ทดลองเพาะปลูกข้าวโพดใน Green House ใช้ดินผสมแบบเดียวกันให้น้ำเท่ากัน ใช้พันธุ์ข้าวโพดจากแปลงเดิมเดียวกัน ทั้งนี้เพื่อให้ผลการทดลองเด่นชัดไม่เกิด Confounding การทดลองใช้แผน CRD โดยทดลองปลูกข้าวโพด r แปลง (แปลงมาตรฐานจำนวนหลุมปลูกเท่ากัน จำนวนต้นต่อหลุ่มเท่ากัน) เท่ากันสำหรับทุกสูตร

ให้ X_{ij} = ผลผลิตรวมของแปลงที่ i เมื่อใช้สูตรที่ j; $i = 1, 2, \ldots, r$;
$j = 1, 2, \ldots, k$

นำข้อมูลมาวิเคราะห์ ANOVA ดังตาราง

SOV	df	SS	MS	F-Ratio
Between	$k-1$	$\sum_i^r \sum_j^k (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$	$SSB/k-1$	$(SSB/k-1)/(SSW/rk-k)$
Within	$rk-k$	$\sum_i^r \sum_j^k (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2$	$SSW/rk-k$	
Total	$rk-1$	$\sum_i^r \sum_j^k (X_{ij} - \bar{X})^2$		

ปัญหาที่ปรากฏก็คือ

1. เพราะเหตุใด df จึงเท่ากับ $rk-1$ (หรือ $n-1$ ถ้าให้ $n = rk$) และ $k-1$ และ df เหล่านี้คือ df ของตัวแปรสุ่มใด

2. เพราะเหตุใดจึงสามารถคำนวณหา df ได้โดยอาศัยผลต่างเช่น df ของตัวแปรสุ่มที่แสดงความผันแปรภายใน จึงเท่ากันกับ $(rk - 1) - (k-1) = rk - k$

3. SSB, SSW และ SST มีการแจกแจงแบบใด

4. เพราะเหตุใด $\dfrac{SSB/k-1}{SSW/rk-k}$ จึงมีการแจกแจงแบบ F ที่มี df เท่ากับ $k-1$ และ $rk-k$

ความจริงปัญหาสำคัญทั้งสี่ประการมิใช่ปัญหาที่ยุ่งยากแต่ประการใด ถ้านักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องของการแจกแจงของ Quadratic Form ของตัวแปรสุ่มปกติดีพอ

ขอเริ่มต้นศึกษาด้วยทฤษฎีที่สำคัญดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 8.1 $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k$ โดยที่ $Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็น real quadratic form ของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ โดยที่ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2); i = 1, 2, \ldots, n$ และต่างก็เป็นอิสระกัน $\dfrac{Q}{\sigma^2}$, $\dfrac{Q_1}{\sigma^2}$,..., $\dfrac{Q_{k-1}}{\sigma^2}$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบ χ^2 โดยที่มี df เท่ากับ $r, r_1, \ldots, r_{k-1}$ ตามลำดับ ให้ Q_k มีค่าที่ไม่เป็นลบกล่าวคือ $Q_k \geqslant 0$ ดังนั้น

ก. $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ เป็นอิสระต่อกัน

ข. ตัวแปรสุ่ม Q_k/σ^2 จะมีการแจกแจงแบบ χ^2 df เท่ากับ $r - (r_1 + r_2 + \ldots + r_{k-1})$

ข้อสังเกต

1. ทฤษฎี 8.1 เกี่ยวข้องอยู่กับเฉพาะ Real Quadratic Form เท่านั้นและการศึกษาในลำดับต่อ ๆ ไปก็จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีของ Real Quadratic Form เท่านั้น

2. ตัวแปรสุ่ม X_i ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎี 8.1 เป็นตัวแปรสุ่มปกติ ทั้งนี้เพราะว่าจะมีเฉพาะ $\dfrac{\text{Sum Square}}{\sigma^2}$ ของตัวแปรสุ่มปกติ X_i ; $= i = 1,2,\ldots,n$ เมื่อ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ เท่านั้นที่เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ χ^2 ถ้าหากตัวแปรสุ่ม X_i มีการแจกแจงในรูปอื่น ๆ เช่น เบต้า แกมม่า ฯลฯ แล้ว $\dfrac{\text{Sum Square}}{\sigma^2}$ ของตัวแปรสุ่ม X_i จะไม่มีการแจกแจงแบบ χ^2 ในที่นี้ $Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ ล้วนเป็น Sum Square ของตัวแปรสุ่ม X_i ด้วยกันทั้งสิ้น ผลลัพธ์ที่สำคัญที่จะให้ประโยชน์ต่อไปในการพัฒนาตัวทดสอบก็คือการได้ซึ่งการแจกแจงแบบ F เพราะ $\dfrac{Q_i/r_i\sigma^2}{Q_j/r_j\sigma^2} \sim F_{r_i, r_j}$ เมื่อ r_i และ r_j เป็น df ของตัวแปรสุ่ม Q_i/σ^2 และ Q_j/σ^2 ซึ่งมีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(r_i)}$ และ $\chi^2_{(r_j)}$ ตามลำดับ

3. โดยปกติ Q_i จะไม่มีค่าติดลบทั้งนี้เพราะ Sum Square จะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ

4. $Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ เป็นอิสระต่อกันย่อมมีผลต่อ Reproductive Property ของตัวแปรสุ่ม $Q, Q_1, \ldots, Q_k$ กล่าวคือ

ถ้า $Q = \sum_{i}^{k} Q_i$

ดังนั้น $M_{Q/\sigma^2}(t) = \prod_{i}^{k} M_{Q_i/\sigma^2}(t)$

และถ้า $Q/\sigma^2 \sim \chi^2_{(r)}$

และ $Q_i/\sigma^2 \sim \chi^2_{(r_i)}$; $i = 1, 2, \ldots, k$ แล้ว

เราย่อมสามารถคำนวณหา df ของตัวแปรสุ่ม Q_i/σ^2 ใด ๆ ได้โดยง่าย

5. ผลข้อ ข. ของทฤษฎี 8.1 และข้อสังเกตที่ 4 ชี้ให้เห็นเหตุผลว่าเพราะเหตุใด เราจึงสามารถคำนวณหา df และ Sum Square ของแหล่งความแปรปรวนใน ANOVA ได้โดยการใช้หักลบ เช่น SSW = SST − SSB และ $\nu_W = \nu_T - \nu_B$ เมื่อ ν_W, ν_T และ ν_B คือ df ของตัวแปรสุ่ม χ^2 ในแหล่งความแปรปรวนภายในกลุ่ม ระหว่างกลุ่มและยอดรวมตามลำดับ

เพื่อให้มองเห็นประโยชน์ของทฤษฎี 8.1 ขอให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.1 ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติคือ $N(\mu, \sigma^2)$ สุ่มตัวอย่างขนาด $n = ab$ เมื่อ $a > 1$ และ $b > 1$ มาจากกลุ่มประชากรดังกล่าว ดังนี้

$$\begin{array}{llll} X_{11} & X_{12} \ldots & X_{1j} \ldots & X_{1b} \\ X_{21} & X_{22} \ldots & X_{2j} \ldots & X_{2b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{a1} & X_{a2} \ldots & X_{aj} \ldots & X_{ab} \end{array}$$

จงจำแนก Quadratic Form abS^2 ออกเป็นส่วน ๆ ตามแหล่งความผันแปร คือความผันแปรระหว่างแถว ความผันแปรระหว่างสดมภ์ และความผันแปรระหว่างทั้งแถวและสดมภ์พร้อมทั้งแสดงการใช้ประโยชน์ของทฤษฎี 8.1

วิธีทำ จากค่าสังเกตเราสามารถเสนอตัวสถิติที่เกี่ยวข้องได้ดังนี้

แถวที่	สดมภ์ที่ 1	2	...	j ...	b	ยอดรวม	ค่าเฉลี่ย
1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j} ...	X_{1b}	$X_{1.}$	$\bar{X}_{1.}$
2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j} ...	X_{2b}	$X_{2.}$	$\bar{X}_{2.}$
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ij} ...	X_{ib}	$X_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
.	.	.		.	.	.	.
a	X_{a1}	X_{a2}	...	X_{aj} ...	X_{ab}	$X_{a.}$	$\bar{X}_{a.}$
ยอดรวม	$X_{.1}$	$X_{.2}$	...	$X_{.j}$ ...	$X_{.b}$		
ค่าเฉลี่ย	$\bar{X}_{.1}$	$\bar{X}_{.j}$	...	$\bar{X}_{.j}$ ...	$\bar{X}_{.b}$		

โดยที่ $X_{i.} = \sum_{j}^{b} X_{ij}$; $\bar{X}_{i.} = \frac{1}{b}\sum_{j}^{b} X_{ij}$

$$X_{.j} = \sum_{i}^{a} X_{ij} \quad ; \quad \bar{X}_{.j} = \frac{1}{a}\sum_{i}^{a} X_{ij}$$

$$X_{..} = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} X_{ij}, \bar{X} = \frac{1}{ab}\sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} X_{ij}$$

ก. เมื่อถือว่ามีเฉพาะความผันแปรในระหว่างแถว

ดังนั้นจาก $abS^2 = \sum_{i}^{a}\sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X})^2$

นำค่าเฉลี่ยประจำแถวบวกเข้าและลบออกเพื่อให้ปรากฏความผันแปรระหว่างแถวในความผันแปรรวม abS^2

$$abS^2 = \sum_i^a \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.} + \bar{X}_{i.} - \bar{X})^2$$

$$= \sum_i^a \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.}) + \sum_i^a \sum_j^b (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 +$$

$$2 \sum_i^a \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.})(\bar{X}_{i.} - \bar{X})$$

$$\because \sum_i^a \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.})(\bar{X}_{i.} - \bar{X}) = \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.}) \sum_i^a (\bar{X}_{i.} - \bar{X})$$

$$= \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.})(\sum_i^a \bar{X}_{i.} - a\bar{X})$$

$$= \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.})(\frac{a}{a} \sum_i^a \bar{X}_{i.} - a\bar{X})$$

$$= \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.})(a \cdot \frac{1}{a} \sum_j^b \frac{1}{b} \sum_j^b X_{ij} - a\bar{X}) = 0$$

$$=> \frac{abS^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i^a \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i^a \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_i^a \sum_j^b (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2$$

$$=> Q/\sigma^2 = Q_1/\sigma^2 + Q_2/\sigma^2$$

พิจารณา $Q/\sigma^2 = abS^2/\sigma^2$ จะพบว่า $Q/\sigma^2 \sim \chi^2_{(ab-1)}$

พิจารณา Q_1/σ^2 จะพบว่า

$$Q_1/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i^a \sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$

$$= \sum_i^a \{ \sum_j^b (\frac{X_{ij} - \bar{X}_{i.}}{\sigma^2})^2$$

แต่ $\sum_j^b (\frac{X_{ij} - \bar{X}_{i.}}{\sigma^2})^2 \sim \chi^2_{(b-1)}$ ดังนั้นโดยวิธี ของ mgf จะพบว่า [1]

---

[1] ให้ $Y_i = \sum_j^b (\frac{X_{ij} - \bar{X}_{i.}}{\sigma^2})^2$, $M_{Y_i}(t) = (\frac{1}{1-2t})^{(b-1)/2}; i = 1, 2, \ldots, a$

$$M_{\Sigma y_i}(t) = \prod_i^a M_{Y_i}(t) = (\frac{1}{1-2t})^{(b-1)/2} \ldots (\frac{1}{1-2t})^{(b-1)/2} = (\frac{1}{1-2t})^{a(b-1)/2}$$

$$=> \sum_i^a Y_i \sim \chi^2_{a(b-1)}$$

$\sum_{i}^{a} \{ \sum_{j}^{b} (\frac{X_{ij} - \bar{X}_{i.}}{\sigma^2})^2 \} \sim \chi^2_{(b-1)}$ นั่นคือ $Q_1/\sigma^2 \sim \chi^2_{a(b-1)}$

ดังนั้น โดยอาศัยทฤษฎี 8.1 จึงพบว่า $Q_2/\sigma^2 \sim \chi^2$, df = (ab − 1) − a(b − 1) = (a − 1)

ข. เมื่อถือว่ามีความผันแปรเฉพาะในระหว่างสดมภ์

นำค่าเฉลี่ยคือ $\bar{X}_{.j}$ บวกเข้าแล้วลบออกใน abS^2 เพื่อให้ปรากฏความผันแปรระหว่างสดมภ์ในความผันแปรรวม

$$abS^2 = \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2$$

$$= \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 + \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 + 2 \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{.j}) (\bar{X}_{.j} - \bar{X})$$

พิจารณาเทอมไขว้จะพบว่า $\sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{.j}) (\bar{X}_{.j} - \bar{X}) = \sum_{i}^{a} (X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \sum_{j}^{b} (\bar{X}_{.j} - \bar{X})$

$$= \sum_{i}^{a} (X_{ij} - \bar{X}_{.j}) (\sum_{j}^{b} \bar{X}_{.j} - b\bar{X}) = \sum_{i}^{a} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})(b\bar{X} - b\bar{X}) = 0$$

ดังนั้น $abS^2/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X})^2$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$$

จะพบว่า $abS^2/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X})^2 \sim \chi^2_{(ab-1)}$ เช่นเดียวกับข้อ ก.

และ $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 = \sum_{j}^{b} \{ \sum_{i}^{a} (\frac{X_{ij} - \bar{X}_{.j}}{\sigma^2})^2\} = \sum_{j}^{b} Y_j$ แต่ $Y_j \sim \chi^2_{(a-1)}$

ดังนั้น $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 \sim \chi^2_{b(a-1)}$

และโดยอาศัยทฤษฎี 8.1 จะพบว่า $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 \sim \chi^2$ มี df เท่ากับ ab − 1 − b(a − 1) = b − 1

ค. เมื่อถือว่ามีความผันแปรในระหว่างแถวและระหว่างสดมภ์

กรณีนี้ให้นำทั้ง $\bar{X}_{i.}$ และ $\bar{X}_{.j}$ บวกเข้าและลบออกใน abS^2 แล้วกระจายเทอมออกมาเช่นเดียวกันกับข้อ ก. และ ข. ซึ่งจะขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

8.2 การเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของหลายกลุ่มประชากร (Test of Equality of Several Means)

ก. เมื่อขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน

Ho : $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_b$ vs $H_1 : \mu_j$ ไม่เท่ากันทั้งหมด

ให้ $(X_{1j}, X_{2j}, \ldots, X_{n_j j})$ เป็นกลุ่มตัวอย่างขนาด n_j จากกลุ่มประชากรปกติ $N(\mu_j, \sigma^2)$; $j = 1, 2, \ldots, b$

การสร้าง test สำหรับทดสอบสมมุติฐาน

Ho : $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_b$ vs $H_1 : \mu_j$ ไม่เท่ากันทั้งหมด สามารถกระทำได้ดังนี้

$\omega = \{\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_b = \mu, \sigma^2 ; -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$ หมายความว่าค่าเฉลี่ย $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_b$ ต่างก็มีค่าร่วมเท่ากับ μ ซึ่งยังไม่ทราบว่า μ มีค่าเท่าไร

$$\Omega = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_b, \sigma^2 ; -\infty < \mu_j < \infty ; j = 1, 2, \ldots, b, \sigma^2 > 0\}$$

$$L\omega = \prod_i^{n_1} f_{x_{i1}}(x_{i1} ; \mu, \sigma^2) \prod_i^{n_2} f_{x_{i2}}(x_{i2} ; \mu, \sigma^2) \ldots \prod_i^{n_j} f_{x_{ij}}(x_{ij} ; \mu, \sigma^2) \ldots$$

$$\ldots \prod_i^{n_b} f_{x_{ib}}(x_{ib} ; \mu, \sigma^2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n_1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i^{n_1} (x_{ij} - \mu)^2\right\} \ldots \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n_b} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i^{n_b} (x_{ib} - \mu)^2\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{\Sigma n_j} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i^{n_j} \sum_j^{b} (x_{ij} - \mu)^2\right\}$$

$$L\Omega = \prod_i^{n_j} \prod_j^{b} f_{x_{ij}}(x_{ij} ; \mu_j, \sigma^2)$$

$$= \prod_i^{n_1} f_{x_{i1}}(x_{i1} ; \mu_1, \sigma^2) \prod_i^{n_2} f_{x_{i2}}(x_{i2} ; \mu_2, \sigma^2) \ldots \sum_i^{n_b} f_{x_{ib}}(x_{ib} ; \mu_b, \sigma^2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n_1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i^{n_1} (x_{i1} - \mu_1)^2\right\} \ldots$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n_b} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i}^{n_b}(x_{ib}-\mu_b)^2\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{\Sigma n_j} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(x_{ij}-\mu_j)^2\right\}$$

$$n = \sum_{j}^{b} n_j$$

$$\therefore \ell n L\omega = -n\ell n\sigma - n\ell n\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(x_{ij}-\mu)^2$$

$$\ell n L\Omega = -n\,\ell\, n\sigma - n\ell n\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(x_{ij}-\mu_j)^2$$

สำหรับ ω เราจำเป็นต้องกะประมาณค่าพารามิเตอร์เพียง 2 ตัวคือ μ และ σ^2 ส่วนใน Ω เราจะต้องกะประมาณค่าพารามิเตอร์ถึง $b+1$ ตัวคือ $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu b$ และ σ^2

ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\ell n L\omega = 0 \Rightarrow -0-0+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(x_{ij}-\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}\mu = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}x_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{j}^{b}\sum_{i}^{n_j}\mu = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}x_{ij}$$

แต่ $$\sum_{j}^{b}\sum_{j}^{n_j}\mu = \sum_{i}^{b}n_j\mu = \mu\sum_{j}^{b}n_j = n\mu$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}x_{ij} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ell n L\omega = 0 \Rightarrow -n/\sigma - 0 + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(x_{ij}-\mu)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(x_{ij}-\mu)^2$$

$$=> \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j}^{n_i} \sum_{j}^{b} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

แทนค่า $\hat{\mu}$ และ $\hat{\sigma}^2$ ลงใน $L\omega$

$$=> \quad L\omega = \left(\frac{n}{2\pi \sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{b} (x_{ij} - \bar{x})^2}\right)^{n/2} e^{-n/2} ; n = \sum_{j}^{b} n_j \qquad \text{..........(1)}$$

สำหรับ $\ell n L\Omega$

$$\frac{\partial}{\sigma \mu_i} \ell n L\Omega = 0 => -0-0+ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i}^{n_j} (x_{ij} - \mu_j) = 0 ; j = 1, 2, ..., b$$

$$=> \quad n_j \mu_j = \sum_{i}^{n_j} x_{ij}$$

$$=> \quad \hat{\mu}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} x_{ij} = \frac{1}{n_j} x_{.j} = \bar{x}_{.j} ; j = 1, 2, ..., b$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ell n L\Omega = 0 => -n/\sigma + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{b} (x_{ij} - \mu_j)^2 = 0$$

$$=> \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{b} (x_{ij} - \mu_j)^2$$

$$\therefore \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{b} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2 ; n = \sum_{j}^{b} n_j$$

แทน $\hat{\mu}_j$ และ $\hat{\sigma}^2$ ลงใน $L\Omega$

$$=> \quad \hat{L}\Omega = \left(\frac{n}{2\Pi \sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{b} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2}\right)^{n/2} e^{-n/2} ; n = \sum_{j}^{b} n_j \qquad \text{..........(2)}$$

ดังนั้น โดยอาศัยวิธีของ MLRT เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก เมื่อ $\lambda = \hat{L}\omega / \hat{L}\Omega < k$

=> ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\{\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2/\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(x_{ij}-\bar{x})^2\}^{n/2}<k$[1]

$$\frac{\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2}{\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(x_{ij}-\bar{x})^2}<k^{2/n} \text{ หรือ } Q_1/Q<k' \text{ เมื่อ } k'=k^{2/n}$$

เฉพาะส่วนพบว่า

$$\begin{aligned}\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(x_{ij}-\bar{x})^2 &= \sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(x_{ij}-\bar{x}_{.j}+\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2\\ &= \sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})+\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2=Q_1+Q_2\end{aligned}$$

ดังนั้น จึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\begin{aligned}Q_1/(Q_1+Q_2) &< k'\\ \Rightarrow\quad (Q_1+Q_2)/Q_1 &> k'\\ 1+Q_2/Q_1 &> k'\\ Q_2/Q_1 &> k'-1=k''\end{aligned}$$

นั่นคือปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $Q_2/Q_1>k''$ หรือ $\frac{Q_2/\sigma^2}{Q_1/\sigma^2}>k''$

และพบว่า $Q_2/\sigma^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2 = \sum_i^{n_j}\{\sum_j^{b}(\frac{\bar{x}_{.j}-\bar{x}}{\sigma})^2\}\sim\chi^2_{(b-1)}$

(อาศัยผลจากตัวอย่าง 8.1) ในขณะเดียวกันจะพบว่า

$$Q_1/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2 = \sum_j^{b}\{\sum_i^{n_j}(\frac{x_{ij}-\bar{x}_{.j}}{\sigma})^2\}\sim\chi^2 \text{ มี df}$$

---

[1] ในที่นี้ $x_{ij}, \bar{x}, \bar{x}_{.j}$ เป็นตัวแปรสุ่ม ที่ถูกต้องแล้วควรใช้ตัวอักษรตัวใหญ่คือ $X_{ij}, \bar{X}$ และ $\bar{X}_{.j}$ แต่เนื่องจากผู้เขียนไม่ปรารถนาจะเปลี่ยนแปลงอักษรกลับไปกลับมาเพราะอาจทำให้นักศึกษาเกิดความสับสนได้ จึงยังคงใช้อักษรตัวเล็กต่อไปคือ $x_{ij}, \bar{x}$ และ $\bar{x}_{.j}$ ซึ่งโดยปกตินิยมใช้ในความหมายของ "ค่า" ของตัวแปรสุ่ม

เท่ากับ $\sum_{j}^{b} (n_j - 1) = \sum_{j}^{b} n_j - b = n - b$

และโดยนิยามของตัวแปรสุ่ม F คือ $F = \dfrac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$ เมื่อ $U \sim \chi^2_{\nu_1}$ และ $V \sim \chi^2_{\nu_2}$

ดังนั้น จากการปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\dfrac{Q_2/\sigma^2}{Q_1/\sigma^2} > k''$

=> ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $\dfrac{Q_2/(b-1)\sigma^2}{Q_1/(n-b)\,\sigma^2} > \dfrac{n-b}{b-1} k'' = k'''$

ทั้งนี้ตัวสถิติ $\dfrac{Q_2/(b-1)\sigma^2}{Q_1/(n-b)\,\sigma^2} \sim F_{(b-1,\, n-b)}$; $n = \sum_{j}^{b} n_j$

ดังนั้น เราสามารถคำนวณหาค่าของ k''' ได้จากสมการความเสี่ยง α ดังนี้

$$\alpha = \Pr\{\text{ ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก เมื่อสมมุติฐานหลักถูกต้อง }\}$$

$$= \Pr\left\{ \frac{Q_2/\sigma^2(b-1)}{Q_1/\sigma^2(n-b)} > k''' \mid \mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_b = \mu \right\}$$

แต่ $\dfrac{Q_2/\sigma^2(b-1)}{Q_1/\sigma^2(n-b)} \sim F_{b-1,\, n-b}$ แสดงว่า α คือพื้นที่ในเขตวิกฤติใต้โค้ง F

$=> \alpha = \Pr\{F > F_{1-\alpha,\, b-1,\, n-b}\}$

นั่นคือ $\Pr\{F > F_{1-\alpha,\, b-1,\, n-b}\} = \Pr\left\{ \dfrac{Q_2/\sigma^2(b-1)}{Q_1/\sigma^2(n-b)} > k''' \right\}$

$=> k''' = F_{1-\alpha,\, b-1,\, n-b}$

ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ $Ho: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_b = \mu$ ณ ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$\frac{Q_2/\sigma^2(b-1)}{Q_1/\sigma^2(n-b)} > F_{1-\alpha,\, b-1,\, n-b}$$

หรือ $$\frac{\sum^{n_j} \sum_{j}^{b} (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^{2/(b-1)}}{\sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{b} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})/(n-b)}$$

หรือ $$\frac{\sum_{j}^{b} n_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^{2/(b-1)}}{\sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{b} (x_{ij} - \bar{x}_{.j})/(n-b)} > F_{1-\alpha, b-1, n-b} ; n = \sum_{j}^{b} n_j$$

หรือ $$\frac{SSB/b-1}{SSM/n-b} = \frac{MSB}{MSW} > F_{1-\alpha, b-1, n-b} ; n = \sum_{j}^{b} n_j$$

ข. เมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากัน

กรณี $n_1 = n_2 = \ldots = n_b$ หรือ $n_j = a ; j = 1, 2, \ldots, b$ เป็นกรณีเฉพาะของกรณีในข้อ ก.

ดังนั้นเราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อ

$$\frac{a \sum_{j}^{b} (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2/b-1}{\sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{.j})^2/ab-b} > F_{1-\alpha, b-1, ab-b}$$

เมื่อ

$$\bar{x}_{.j} = \frac{1}{a} \sum_{i}^{a} x_{ij} = \frac{1}{a} x_{.j} ; \bar{x} = \frac{1}{ab} \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} x_{ij}$$

$$n = \sum_{j}^{b} n_j = \sum_{j}^{b} a = ab$$

ตัวอย่าง 8.2 ให้ μ_1, μ_2, μ_3 เป็นค่าเฉลี่ยของกลุ่มประชากรปกติที่เป็นอิสระต่อกันและมีค่าความแปรปรวนร่วมกันแต่ไม่ทราบค่าสมมุติว่าให้เท่ากับ σ^2

สุ่มตัวอย่างขนาด $n_1 = 5, n_2 = 6, n_3 = 8$ จากกลุ่มประชากรทั้งสามปรากฏข้อมูลดังนี้

กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2	กลุ่มที่ 3
$X_{11} = 3$	$X_{12} = 2$	$X_{13} = 4$
$X_{21} = 0$	$X_{22} = 5$	$X_{23} = 3$
$X_{31} = -1$	$X_{32} = 1$	$X_{33} = 6$
$X_{41} = 0$	$X_{42} = 3$	$X_{43} = 8$
$X_{51} = 2$	$X_{52} = 5$	$X_{53} = 5$
	$X_{62} = 2$	$X_{63} = 1$
		$X_{73} = 0$
		$X_{83} = 1$

จงทดสอบสมมุติฐาน Ho : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ณ ระดับนัยสำคัญ 5%

$$\bar{x}_{.1} = \frac{1}{5} \sum_{i}^{5} x_{ij} = (3+0-1+0+2)/5 = 4/5 = .8$$

$$\bar{x}_{.2} = \frac{1}{6} \sum_{j}^{6} x_{i2} = (2+5+1+3+\overset{6}{\underset{i}{5}}+2) = 18/6 = 3$$

$$\bar{x}_{.3} = \frac{1}{8} (4+3+6+8+5+1+0+1) = 28/8 = 3.5$$

$$n = \sum_{j}^{3} n_j = n_1 + n_2 + n_3 = 5+6+8$$

$$\bar{x} = \frac{1}{19} \sum_{i}^{n_j} \sum_{j}^{3} x_{ij} = \frac{1}{19} \sum_{j}^{3} x_{.j}$$

$$= \frac{1}{19} \{(3+0-1+0+2) + (2+5+1+3+5+2) + (4+3+6+8+5+1+0+1)\}$$

$$= \frac{1}{19} (4+18+28) = 50/19 = 2.63^{1}$$

[1] ในกรณีของขนาดตัวอย่างเท่ากัน $\bar{x} = \frac{1}{b} \sum_{j}^{b} \bar{x}_{.j}$ เมื่อ $\bar{x}_{.j} = \frac{1}{a} \sum_{i}^{a} x_{ij}$ แต่ถ้าขนาดตัวอย่างไม่เท่ากัน $\bar{x} \neq \frac{1}{b} \sum_{j}^{b} \bar{x}_{.j}$ เมื่อ $\bar{x}_{.j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} x_{ij}$ แต่ $\bar{x} = (\sum_{j}^{b} n_j \bar{x}_{.j}) / \sum_{j}^{b} n_j$ ตามวิธีที่ใช้ในแบบสำรวจแบบแบ่งชั้นภูมิ

$$Q_2/b-1 = \frac{1}{b-1}\sum_j^b n_j(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{2}\{5(.8-2.63)^2 + 6(3-2.63)^2 + 8(3.5-2.63)^2\} = 11.65$$

$$Q_1/n-b = \frac{1}{n-b}\sum_i^{n_j}\sum_j^b (x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2 = \frac{1}{n-b}\sum_j^b\sum_i^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2$$

$$= \frac{1}{n-b}\sum_j^b\{\sum_i^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{(\Sigma x_{ij})^2}{n_j}\}$$

$$= \frac{1}{19-3}\{(9+0+1+0+4-\frac{16}{5}) + (4+25+1+9+25+4-\frac{324}{6})$$

$$+ (16+9+36+64+25+1+0+1\frac{784}{8})\}$$

$$= \frac{1}{16}(\frac{54}{5}+\frac{188}{6}+\frac{432}{8}) = 96.133/16 = 6.08$$

ดังนั้น เราจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $Ho: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ณ ระดับนัยสำคัญ 5% เมื่อ

$$F_c = \frac{Q_2/b-1}{Q_1/n-b} > F_{.95,2,16}$$

โดยที่

$$F_c = \frac{Q_2/b-1}{Q_1/n-b} = 11.65/6.08 = 1.93 \text{ และ } F_{.95,2,16} = 3.63$$

ดังนั้น เราจึงไม่อาจปฏิเสธสมมุติฐานหลัก $Ho: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ณ ระดับนัยสำคัญ 5% ได้ ทั้งนี้เพราะ F_c มิได้มากกว่า 3.63

8.3 การวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance : ANOVA)

การวิเคราะห์ความแปรปรวนคือการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่มมาจากหลายกลุ่มประชากร โดยการศึกษาดังกล่าวจะพยายามจำแนกความแปรปรวนร่วม

S^2 ออกเป็นส่วน ๆ ตามแหล่งของความผันแปร (Source of Variation) ที่เกี่ยวข้องแล้วเปรียบเทียบอัตราส่วนระหว่างความผันแปรในแหล่งต่าง ๆ เหล่านั้นว่ามีค่าคาดหมายเท่ากับ 1 หรือไม่ ในขณะที่ F-Ratio จะเป็นดัชนีที่ช่วยชี้หรือสอบย้ำให้เห็นอัตราส่วนดังกล่าวน่าจะมีค่ามากน้อยเพียงใด ถ้าหากว่าค่าจริง (Population Value) ของอัตราส่วนดังกล่าวเท่ากับ 1

การศึกษาในตอน 8.2 เป็นเรื่องที่เกี่ยวกับการทดสอบความแตกต่างกันในระหว่างค่าเฉลี่ยจริงของประชากรกลุ่มต่าง ๆ คือ $Ho : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_b$ vs $H_1 : \mu_j$ ไม่เท่ากันทั้งหมด หรืออย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน การศึกษาในส่วนนี้ความจริงแล้วคล้ายคลึงกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนเป็นอย่างยิ่ง ซึ่งการศึกษาในลำดับต่อไปนักศึกษาจะพบความจริงได้เอง อย่างไรก็ตามวิธีทั้งสองนี้มิใช่ว่าจะนับให้เป็นเรื่องเดียวกันได้ทั้งนี้เพราะ การวิเคราะห์ความแปรปรวนนั้น ผู้ศึกษาจำเป็นจะต้องกำหนดแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของค่าของตัวแปรสุ่ม โดยพยายามกำหนดให้ชัดเจนลงไปว่าตัวแปรสุ่มควรมีค่าสังเกตเป็นเท่าไรหรือนัยหนึ่ง ค่าสังเกตของตัวแปรสุ่มซึ่งควรมีค่าเท่ากันกับค่าเฉลี่ยรวมของประชากร (overall mean μ) แต่กลับไม่เท่ากับ μ เพราะเหตุใด อะไรคือแหล่งความผันแปร ในขณะที่การทดสอบสมมุติฐาน $Ho : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_b = \mu$ ในตอน 8.2 ไม่จำเป็นต้องพิจารณาเช่นนั้น

อย่างไรก็ตามในที่นี้จะกล่าวถึง ANOVA เฉพาะกรณี CRD เท่านั้น

8.3.1 One Way Classification Fixed Effect หรือ CRD : Fixed Effect

แผนการทดลองแบบ CRD กรณี Fixed Effect คือแผนการทดลองที่มุ่งเปรียบเทียบดูว่า treatment ต่าง ๆ ที่มีอยู่ทั้งสิ้นสมมุติว่ามีอยู่ b treatment นั้นส่งอิทธิพลหรือผลสะท้อนต่อความเปลี่ยนแปลงในหน่วยทดลองได้ต่างกันหรือไม่ กรณีของ Fixed Effect เป็นกรณีที่ถือว่ามีจำนวน Treatment คงที่ และแต่ละ Treatment มีอิทธิพลคงที่[1]

โดยทั่วไปแล้วความเปลี่ยนแปลงในหน่วยทดลองมักเปลี่ยนแปลงไปได้ด้วยเหตุผลหลายประการดังนี้คือ

1. อิทธิพลของ treatment (δ_j)

2. อิทธิพลภายนอก เช่น สภาพแวดล้อมขณะทดลองของหน่วยทดลอง ตลอดจน measurement error (e_{ij})

---

[1] ต่างกับ Random Effect เพราะในกรณีของ Random Effect นั้น เราถือว่ามี Treatment ประเภทเดียวกันมากมายหลายระดับ (level) จนกลายเป็น Population of Level โดยที่การทดลองจะกระทำโดยเลือก treatment มาบางระดับโดยสุ่ม เมื่อเป็นเช่นนี้อิทธิพลของ Treatment ย่อมแปรเปลี่ยนไปโดยสุ่มด้วย

3. อิทธิพลภายในตัวหน่วยทดลองเอง

ดังนั้นเพื่อให้ได้ผลการทดลองที่กระชับชัดเจนว่าเฉพาะ treatment เท่านั้นที่มีอิทธิพลต่อหน่วยทดลอง เราจึงจำเป็นต้องควบคุมบรรยากาศของการทดลองให้รัดกุมที่สุด โดยขจัดอิทธิพลทั้งภายนอกและภายในทิ้ง ดังนั้นเพื่อขจัดอิทธิพลภายใน หน่วยทดลองต่าง ๆ จะต้องมีความเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous) เช่น ถ้าเป็นสัตว์ทดลอง จะต้องเป็นสายพันธ์เดียวกันหรือครอกเดียวกัน ถ้าเป็นวัตถุ เช่นโลหะจะต้องเป็นชนิดเดียวกัน กว้าง ยาว หนา เท่ากัน และมีคุณสมบัติทางเคมีและกายภาพเดียวกันเช่นมีความเหนียวเท่ากัน ถ้าเป็นคนต้องเป็นพี่น้องร่วมบิดามารดาและจะให้ได้ผลดีที่สุดควรเป็นฝาแฝด เป็นต้น ส่วนปัจจัยที่เป็นอิทธิพลภายนอกนั้น ผู้วิจัยพึงควบคุมให้มากที่สุดเท่าที่จะมากได้ เช่นอุณหภูมิ ความชื้น แสงสว่าง เสียง บรรยากาศภายนอกทั่ว ๆ ไป อย่างไรก็ตามปัจจัยต่าง ๆ เหล่านี้แม้จะควบคุมได้ดีเพียงใดก็มิใช่ว่าจะควบคุมได้ครบถ้วน ย่อมต้องมีบางส่วนที่ผู้วิจัยคิดไม่ถึงหรือเกิดขึ้นมาโดยเหตุบังเอิญด้วยเหตุหนึ่งเหตุใดเสมอ ด้วยเหตุผลประการดังกล่าวการทดลองจึงย่อมมี random error เจืออยู่บ้างเป็นธรรมดา ดังนั้นความเปลี่ยนแปลงในหน่วยทดลอง จึงเกิดขึ้นได้เพราะอิทธิพลของ treatment และ random error

สำหรับ random error, e_{ij} ซึ่งเป็นอิทธิพลที่ไม่อาจคุมได้นั้นเป็นปัญหาที่นักวิจัยวิตกเป็นอย่างยิ่ง เพราะถ้าคุมไว้ไม่ได้ ผลการทดลองย่อมผันผวนไปจนไม่อาจชี้ชัดลงไปได้ ถึงเหตุผลที่แท้จริงของความเปลี่ยนแปลงในหน่วยทดลอง ด้วยเหตุนี้จึงได้มีการที่จะพยายามจะควบคุมให้ได้ในลักษณะหนึ่ง วิธีหนึ่งที่นิยมใช้ก็คือควบคุมลักษณะการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม e_{ij} ซึ่งโดยทั่วไปนิยมให้มีการแจกแจงแบบปกติ เพราะการแจกแจงลักษณะนี้มีทฤษฎี CLT สนับสนุนความเหมาะสมอยู่[1] ดังนั้นเราจึงกำหนดข้อตกลงเกี่ยวกับ e_{ij} ไว้ดังนี้คือ $e_{ij} \sim NID\,(0, \sigma_e^2)$

สำหรับความเหมาะสมของข้อตกลงนี้สามารถทดสอบความเป็นจริงได้ดังนี้คือ

1. ใช้ χ^2 – test คือ goodness of fit test เพื่อทดสอบว่า e_{ij} แจกแจงแบบปกติหรือไม่

2. ใช้ Run Test สำหรับทดสอบ Randomness และใช้ตารางเลขสุ่มหรือ Random Generator เลือกหน่วยทดลองให้แก่ Treatment เพื่อให้เกิดความเป็นอิสระในการเลือกหรือจัดหน่วยทดลองให้เข้ากับ Treatment

3. ใช้ Bartlett Test สำหรับทดสอบ Ho : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_b^2 = \sigma_e^2$ หรือทดสอบว่าความแปรปรวนคงที่ในทุก ๆ treatment

---

[1] อ่าน CLT ในบทที่ 2 และการแจกแจงแบบปกติในบทที่ 4

NID = Normally Independent Distributed Random Variables

เราจะเริ่มต้นศึกษาและพัฒนาวิธีการของแผนการทดลองแบบ CRD Fixed Effect ดังต่อไปนี้

1. แบบจำลอง

ให้ $X_{ij} = \mu_j + e_{ij}$; $i = 1, 2, \ldots, n_j$; $j = 1, 2, \ldots, b$; ....(1)

โดยที่ X_{ij} คือค่าสังเกตหน่วยที่ i ที่ได้รับ treatment ที่ j

μ_j คือค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม (ค่าสังเกต) ที่ได้รับ treatment ที่ j

e_{ij} คือ Chance error ที่แสดงความผันแปรของ X_{ij} รอบ ๆ ค่าเฉลี่ย μ_j, e_{ij} อาจมีสาเหตุมาจากปัจจัยหลาย ๆ ประการเช่น measurement error การควบคุมสภาพแวดล้อมขณะทดลองไม่เหมาะสม ความแตกต่างภายในตัวหน่วยทดลองเอง ฯลฯ ทั้งนี้ จะถือเป็นข้อตกลงว่า

(1) X_{ij} เป็นตัวแปรสุ่มปกติ

(2) e_{ij} เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน คือ $e_{ij} \sim NID(0, \sigma_e^2)$

หรือ $E(e_{ij}) = 0; V(e_{ij}) = E(e_{ij})^2 - \{(E(e_{ij})\}^2 = E(e_{ij})^2 = \sigma_e^2$

และ $E(e_{st}, e_{pq}) = 0; st \neq pq$

ดังนั้น ถ้า treatment ทั้งหลายมิได้ให้ผลต่อหน่วยทดลองต่างกัน เราก็เชื่อได้ว่า ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มที่ได้รับ treatment ต่างกันจะต้องไม่ต่างกัน (ไม่มี treatment Effect) หรือคาดว่า $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_b = \mu$ เมื่อ μ คือค่าร่วมของค่าคาดหมายเหล่านั้น ในขณะเดียวกันถ้า treatment ทั้งหลายให้ผลกระทบต่อหน่วยทดลองต่างกันเราคาดว่าค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มที่ได้รับ treatment แตกต่างกันจะต้องไม่เท่ากันกล่าวคือ $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \ldots \neq \mu_b \neq \mu$ หรือนัยหนึ่งเราคาดว่าจะต้องมีค่าคาดหมายอย่างน้อย 1 คู่ที่แตกต่างกันซึ่งในกรณีเช่นนี้มีผลให้เราเชื่อว่า

$$\mu_j = \mu + \delta_j \text{ [1]}; \quad j = 1, 2, \ldots, b \qquad \text{..........(2)}$$

---

[1] δ_j มิใช่ตัวแปรสุ่ม แต่เป็นค่าคงที่ (แต่ไม่ทราบค่า) ที่แสดงให้เห็นถึงปริมาณความผันแปรที่ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตที่รับ treatment ที่ j คือ μ_j คลาดเคลื่อนไปจากค่าเฉลี่ย μ ของ μ_j ; $j = 1, 2, \ldots, b$ เอง ตัวอย่างเช่นน้ำหนักเฉลี่ยของสุกรพันธ์ดูรอคเจอร์ซี่ที่ได้รับการเลี้ยงดูด้วยสูตรอาหารต่างกันในช่วงเวลาทดลองหนึ่ง โดยปกติควรจะต้องมีน้ำหนักเท่ากับน้ำหนักประจำสายพันธ์ แต่ผลการทดลองกลับไม่เป็นเช่นนั้น เพราะจะพบว่าน้ำหนักเฉลี่ยของกลุ่มสุกรพันธุ์ดังกล่าวที่ได้รับอาหารสูตร j จะมีน้ำหนักเฉลี่ยเท่ากับ μ_j ซึ่งจะมีค่าใกล้เคียงกับน้ำหนักประจำสายพันธ์คือ μ เท่านั้น มิได้เท่ากัน ที่เป็นเช่นนี้ย่อมมีสาเหตุ สาเหตุดังกล่าวก็คือ อิทธิพลของสูตรอาหาร (δ_j) นั่นเอง ดังนั้นเราจึงถือว่า $\mu_j = \mu + \delta_j$ โดยที่ δ_j จะเป็นค่าคงที่เฉพาะสูตรอาหารที่ j

โดยที่ δ_j คือค่าคงที่ (fixed effect) ที่แสดงความคลาดเคลื่อนระหว่าง μ_j กับค่าเฉลี่ย μ (คือ $\delta_j = \mu_j - \mu$)

เมื่อ $$\mu = \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \dots + n_b\mu_b}{n_1 + n_2 + \dots + n_b} = \sum_j^b n_j\mu_j / \sum_j^b n_j \qquad \text{..........(3)}$$

หมายเหตุ สำหรับสมการที่ (3) นี้นักศึกษาสามารถเปรียบเทียบสูตรได้กับแผนสำรวจแบบแบ่งชั้นภูมิ

ดังนั้น เมื่อพิจารณาสมการที่ (1) และที่ (2) โดยแทนที่ $\mu_j = \mu + \delta_j$ ในสมการที่ (1) จะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับแผนการทดลอง CRD กรณี Fixed Effect ดังนี้

$$X_{ij} = \mu_j + e_{ij} = (\mu + \delta_j) + e_{ij}\,;\ i = 1, 2, \dots, n_j\,;\ j = 1, 2, \dots, b$$

$$\Rightarrow \quad X_{ij} = \mu + \delta_j + e_{ij}\ ^{1}\,;\ i = 1, 2, \dots, n_j\,;\ j = 1, 2, \dots, b$$

ทั้งนี้จะพบว่า $\sum_j^b n_j\delta_j = \sum_j^b n_j(\mu_j - \mu) = \sum_j^b n_j\mu_j - \mu\sum_j^b n_j$

ให้ $\sum_j^b n_j = n$ และจากสมการที่ (3) พบว่า $\sum_j^b n_j\mu_j = \mu\sum_j^b n_j$

$$\Rightarrow \quad \sum_j^b n_j\delta_j = 0\ ^{2} \qquad \text{..........(4)}$$

---

[1] ถ้าเป็นกรณีเฉพาะเมื่อ $n_j = a;\ j = 1, 2, \dots, b$ ซึ่งมีผลให้

$$\mu = \sum_j^b n_j\mu_j/ab = \frac{1}{ab}\sum_j^b a\mu_j = \frac{1}{b}\sum_j^b \mu_j$$

ดังนี้ $$\sum_j^b n_j\delta_j = a\sum_j^b(\mu_j - \mu) = a\sum_j^b \mu_j - ab\mu = a\cdot\frac{b}{b}\sum_j^b \mu_j - ab\mu$$

$$= ab\mu - ab\mu = 0$$

หรือจะใช้ $$\sum_j^b \delta_j = \sum_j^b(\mu_j - \mu) = \frac{b}{b}\sum_j^b \mu_j - b\mu = b\mu - b\mu = 0$$

[2] $$X_{ij} = \mu + \delta_j + e_{ij}$$

$$\Rightarrow E(X_{ij}) = \mu + \delta_j + E(e_{ij}) = \mu + \delta_j = \mu + (\mu_j - \mu) = \mu_j\,;\ j = 1, 2, \dots, b$$

$$V(X_{ij}) = 0 + 0 + V(e_{ij}) = \sigma_e^2\,;\ i = 1, 2, \dots, n_j$$

สมการที่ (4) คือ $\sum_{j}^{b} n_j\delta_j = 0$ จะใช้เป็นดัชนีชี้ให้เห็นว่าแบบจำลองนี้เป็นแบบจำลองแบบ fixed effect

ดังนั้น สมมุติฐานหลักก็คือ treatment ทั้งหลายส่งผลสะท้อนต่อหน่วยทดลองไม่แตกต่างกัน หรือ

$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_b = \delta$ หรือ $\delta_j = \delta;\ j = 1, 2, \ldots, b$

แต่เนื่องจาก $\sum_{j}^{b} n_j\delta_j = 0 \Rightarrow \sum_{j}^{b} n_j\delta_j = \delta \sum_{j}^{b} n_j = 0 \Rightarrow \delta = 0$

ดังนั้นสมมุติฐาน สำหรับกรณี fixed effect model คือ

$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_b = 0$ หรือ $\delta_j = 0\ ;\ j = 1, 2, \ldots, b$

และเนื่องจาก $\mu_j = \mu + \delta_j \qquad ; j = 1, 2, \ldots, b$

$\Rightarrow \qquad \mu_j = \mu + 0 = \mu\ ;\ j = 1, 2, \ldots, b$

ดังนั้นสมมุติฐาน $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_b = \delta$ จึง equivalent กับสมมุติฐาน

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_b = \mu$$

2. การวิเคราะห์

การวิเคราะห์ความแปรปรวนจะปฏิบัติเช่นเดียวกันกับในตอน 8.2 กล่าวคือ

$$nS^2 = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \overline{X})^2 = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2 + \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(\overline{X}_{.j} - \overline{X})^2$$

$$= \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2 + \sum_{j}^{b} n_j(\overline{X}_{.j} - \overline{X})^2$$

$$\Rightarrow \quad SST = SSW + SSB$$

$$MST = SST/(n-1)\ ;\ MSW = SSW/(n-b),$$

$$MSB = SSB/(b-1)$$

MSW = mean of sum of square within group of same treatment หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า mean square within group

MSB = mean of sum square between group หรือที่เรียกย่อ ๆ ว่า mean square between group

พิจารณาค่าคาดหมายของ SSW และ SSB จะพบว่า

$$SSW = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \overline{X}_{\cdot j})^2 = \sum_{j}^{b}\{\sum_{i}^{n}(X_{ij} - \overline{X}_{\cdot j})^2\}$$

$$= \sum_{j}^{b}(n_j - 1)S_j^2$$

สำหรับ Expected Mean Square พิสูจน์ได้ดังนี้

เมื่อ S_j^2 คือ Sample Variance ของกลุ่มตัวอย่างจากประชากรกลุ่มที่ j; j = 1, 2, ..., b

$$=> \quad E(SSW) = E\sum_{j}^{b}(n_j - 1)S_j^2 = \sum_{j}^{b}(n_j - 1)E(S_j^2) = \sum_{j}^{b}(n_j - 1)\sigma_e^2 \ ^1$$

โดยที่ σ_e^2 คือความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม e_{ij}

$$\therefore \quad E(SSW) = \sigma_e^2\sum_{j}^{b}(n_j - 1) = \sigma_e^2(\sum_{j}^{b} n_j - b) = \sigma_e^2(n - b)$$

ดังนั้น $\sigma_e^2 = \frac{1}{n - b}E(SSW) = E\{SSW/(n - b)\} = E(MSW)$ หรือ expected mean square within group $= \sigma_e^2$ นัยหนึ่ง MSW เป็นตัวประมาณค่าที่ปราศจากอคติของ σ_e^2

สำหรับ SSB จะพบว่า

$$E(SSB) = E\sum_{j}^{b} n_j(\overline{X}_{\cdot j} - \overline{X})^2$$

$$\overline{X}_{\cdot j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i}^{n_j} X_{ij} = \frac{1}{n_j}\sum_{i}^{n_j}(\mu + \delta_j + e_{ij})$$

---

[1] ให้พิสูจน์ว่า $E(S_j^2) = \sigma_e^2$ เป็นแบบฝึกหัด

$$= \frac{n_j}{n_j}\mu + \frac{1}{n_j}\sum_{i}^{n_j}\delta_j + \frac{1}{n_j}\sum_{i}^{n_j}e_{ij}$$

$$= \mu + \delta_j + \bar{e}_{\cdot j}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{\Sigma n_j}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}X_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(\mu + \delta_j + e_{ij}) \text{ เมื่อ } n = \Sigma n_j$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j}^{b}n_j\mu + \frac{1}{n}\sum_{j}^{b}n_j\delta_j + \frac{1}{n}\sum_{j}^{n_j}\sum_{j}^{b}e_{ij}$$

$$= \frac{1}{n}\mu\sum_{j}^{b}n_j + 0 + \frac{1}{n}e_{\cdot\cdot}$$

$$= \mu + \bar{e}$$

ดังนั้น

$$\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X} = (\mu + \delta_j + \bar{e}_{\cdot j}) - (\mu + \bar{e})$$

$$= \delta_j + (\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})$$

$$=> \quad n_j(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2 = n_j\{\delta_j + (\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})\}^2$$

$$= n_j\delta_j^2 + n_j(\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})^2 + 2n_j\delta_j(\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})$$

ดังนั้น

$$E(SSB) = E\sum_{j}^{b}n_j(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2$$

$$= E\sum_{j}^{b}n_j\delta_j^2 + E\sum_{j}^{b}n_j(\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})^2 + 2E\sum_{j}^{b}n_j\delta_j(\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})$$

1) $E\sum_{j}^{b}n_j\delta_j^2 = \sum_{j}^{b}E(n_j\delta_j^2) = \sum_{j}^{b}n_j\delta_j^2$ ทั้งนี้เพราะ n_j เป็นค่าคงที่แสดงขนาดตัวอย่างชุดที่ j ขณะที่ δ_j คือค่าคงที่ที่แสดงอิทธิพลคงที่ของ treatment ที่ j

2) $$E\sum_{j}^{b}n_j(\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})^2 = E\{\sum_{j}^{b}n_j(\bar{e}_{\cdot j}^2 + \bar{e}^2 - 2\bar{e}_{\cdot j}\bar{e})\}$$

$$= \sum_{j}^{b}En_j(\bar{e}_{\cdot j}^2) + \sum_{j}^{b}n_jE(\bar{e}^2) - 2\sum_{j}^{b}n_jE(\bar{e}_{\cdot j}\bar{e})$$

$$= A + B - C$$

$$A = \sum_j^b En_j(\bar{e}^2_{\cdot j}) = \sum_j^b En_j\left(\frac{1}{n_j}\sum_i^{n_j} e_{ij}\right)^2$$

$$= \sum_j^b \frac{1}{n_j} E\left(\sum_i^{n_j} e_{ij}\right)^2$$

$$= \sum_j^b \frac{1}{n_j} \left(E\sum_i^{n_j} e^2_{ij} + E\sum_{s\neq t}^{n_j} e_{sj}e_{tj}\right)$$

แต่ $V(e_{ij}) = E\{e_{ij} - E(e_{ij})\}^2 = E(e^2_{ij} - 0) = E(e^2_{ij}) = \sigma^2_e$

ทั้งนี้มีข้อตกลงว่า $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2_e)$ และ e_{ij}'s เป็นอิสระต่อกันหรือ $Cov(e_{sj}, e_{tj}) = E(e_{st}e_{tj}) = 0;\ s \neq t$

ดังนั้น $$\sum_j^b En_j(\bar{e}_{\cdot j})^2 = \sum_j^b \frac{1}{n_j}\sum_i^{n_j} E(e_{ij})^2 + \frac{1}{n_j}\sum_{s\neq t}^{n_j} E(e_{sj}e_{tj})$$

$$= \sum_j^b \frac{1}{n_j}\sum_i^{n_j} \sigma^2_e + 0 = \sum_j^b \frac{1}{n_j} n_j\sigma^2_e$$

$$= \sum_j^b \sigma^2_e = b\sigma^2_e$$

$$B = \sum_j^b n_jE(\bar{e})^2 = \sum_j^b n_jE\left(\frac{1}{n}\sum_i^{n_j}\sum_j^b e_{ij}\right)^2 = \sum_j^b n_j \frac{1}{n^2} E\left(\sum_i^{n_j}\sum_j^b e_{ij}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_j^b n_jE\left(\sum_i^{n_j}\sum_j^b e^2_{ij} + \sum\sum_{st\neq pq}^{n_j\,b} e_{st}e_{pq}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_j^b n_j\left(\sum_i^{n_j}\sum_j^b \sigma^2_e\right) + 0$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_i^{n_j} n_j\left(\sum_j^b n_j\sigma^2_e\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_j^b n_j\left(\sigma^2_e\sum_j^b n_j\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_j^b n_j(n\sigma^2_e) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2_e\sum_j^b n_j = \sigma^2_e$$

$$C = 2\sum_j^b n_jE(\bar{e}_{\cdot j}\bar{e}) = 2\sum_j^b n_jE\left\{\frac{1}{n_j}\sum_i^{n_j} e_{ij}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_i^{n_j}\sum_j^b e_{ij}\right)\}$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{j}^{b} n_j \frac{1}{n_j} E\{(e_{1j} + e_{2j} + \ldots + e_{n_j j})$$

$$\cdot (e_{11} + e_{21} + \ldots + e_{n_i 1} + \ldots + e_{n_j b})\}$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{j}^{b} E(\sum_{i}^{n_j} e_{ij}^2 + \sum_{st \neq pq}^{n_j}\sum^{b} e_{st}e_{pq})$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{j}^{b} (\sum_{i}^{n_j} Ee_{ij}^2) + 0$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{j}^{b}\sum_{i}^{n_j} \sigma_e^2 = \frac{2}{n} \sum_{j}^{b} n_j\sigma_e^2 = \frac{2}{n} \sigma_e^2 \sum_{j}^{b} n_j = 2\sigma_e^2$$

$$=> E\{ \sum_{j}^{b} n_j(\bar{e}_{.j} - \bar{e})^2 = A + B - C$$

$$= b\sigma_e^2 + \sigma_e^2 - 2\sigma_e^2$$

$$= (b - 1)\sigma_e^2$$

$$3)\ 2E(\sum_{j}^{b} \delta_j n_j(\bar{e}_{.j} - \bar{e}) = 2 \sum_{j}^{b} \delta_j n_j E(\bar{e}_{.j} - \bar{e})$$

$$= 2 \sum_{j}^{b} \delta_j n_j E(\frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} e_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} e_{ij})$$

$$= 2 \sum_{j}^{b} \delta_j n_j\{ \frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} E(e_{ij}) - \frac{1}{n} \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} E(e_{ij})\}$$

$= 0$ ทั้งนี้เพราะ $E(e_{ij}) = 0$

$$=> \quad E(SSB) = E\sum_{j}^{b} n_j(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 = 1) + 2) + 3)$$

$$= \sum_{j}^{b} n_j\delta_j^2 + (b - 1)\sigma_e^2 + 0$$

$$=> \frac{1}{b-1} E(SSB) = \frac{1}{b-1} \sum_{j}^{b} n_j\delta_j^2 + \sigma_e^2$$

$$E\{SSB/(b - 1)\} = E(MSB)$$

$$= \sigma_e^2 + \frac{1}{b-1} \sum_{j}^{n_j} n_j\delta_j^2$$

$$= \sigma_e^2 + \frac{1}{b-1} \sum_{j}^{b} n_j(\mu_j - \mu)^2$$

หรือ expected mean square between group $= \sigma_e^2 + \frac{1}{b-1}\sum_j^b n_j(\mu_j - \mu)^2$

ดังนั้น ตาราง ANOVA สำหรับ CRD กรณี fixed effect สำหรับ $H_0 : \delta_j = 0; j = 1, 2, \ldots, b$ หรือนัยหนึ่ง $H_0 : \mu_j = \mu; j = 1, 2, \ldots, b$ จึงปรากฏดังนี้

SOV	df	SS	MS	Expected mean square (EMS)
Between	$b-1$	SSB	SSB/b−1	$\sigma_e^2 + \frac{1}{b-1}\sum_j^b n_j(\mu_j - \mu)^2$
Within	$n-b$	SSW	SSW/n−b	σ_e^2
Total	$n-1$	SST		

หมายเหตุ Computation Formula สำหรับ SSB และ SST ปรากฏดังนี้

เมื่อ $n = \sum_j^b n_j, n - 1 = \sum_j^b n_j - 1, n - b = \sum_j^b (n_j - 1)$, CT = Correction Factor

$$SSB = \sum_j^b n_j(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 = \sum_j^b n_j(\bar{X}_{.j}^2 + \bar{X}^2 - 2\bar{X}\bar{X}_{.j})$$

$$= \sum_j^b n_j\left(\frac{1}{n_j}\sum_i^{n_j} X_{ij}\right)^2 + \bar{X}^2\sum_j^b n_j - 2\bar{X}\sum_j^b n_j\bar{X}_{.j}$$

$$= \sum_j^b X_{.j}^2/n_j - n\bar{X}^2$$

$$= \sum_j^b X_{.j}^2/n_j - \frac{1}{n}\left(\sum_i^{n_j}\sum_j^b X_{ij}\right)^2 = \sum_j^b X_{.j}^2/n_j - CF$$

$$SST = \sum_i^{n_j}\sum_j^b (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_i^{n_j}\sum_j^b X_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i\sum_j^b X_{ij}\right)^2$$

$$= \sum_i^{n_j}\sum_j^b X_{ij}^2 - CF$$

$$SSW = \sum_i^{n_j}\sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 = \sum_j^b\left\{\sum_i^{n_j}(X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2\right\}$$

$$= \sum_{j}^{b}\{\sum_{i}^{n_j} X_{ij}^2 - n_j\bar{X}_{\cdot j}^2\} = \sum_{j}^{b}\{\sum_{i}^{n_j} X_{ij}^2 - \frac{1}{n_j}(\sum_{i}^{n_j} X_{ij})^2\}$$

$$= \sum_{j}^{b}\sum_{i}^{n_j} X_{ij}^2 - \sum_{j}^{b} \frac{1}{n_{\cdot j}} X_{\cdot j}^2$$

$$= SST - SSB$$

จากความรู้ในตอนก่อนเราจะปฏิเสธ $H_0 : \mu_j = \mu; j = 1, 2, \ldots, b$ หรือ $H_0 : \delta_j = 0; j = 1, 2, \ldots, b$ เมื่อ $F_c > F_{tab}$

$$F_c = \frac{\sum_{j}^{b} n_j(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2/\sigma_e^2(b-1)}{\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2/\sigma_e^2(n-b)} = \frac{Q_2/\sigma_e^2(b-1)}{Q_1/\sigma_e^2(n-b)}$$

$$= (MSB/\sigma_e^2)/(MSW/\sigma_e^2) = MSB/MSW$$

แต่เนื่องจาก $Q_2/\sigma^2 \sim \chi^2_{(b-1)}$ และ $Q_1/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-b)}$ ดังนั้น $F_{tab} = F_{1-\alpha, b-1, n-b}$

ณ ที่นี้ขอให้นักศึกษาพิจารณาอัตราส่วนระหว่าง EMS คือ

$$\frac{E(MSB)}{E(MSW)} = \frac{1}{\sigma_e^2}\{\sigma_e^2 + \frac{1}{b-1}\sum_{j}^{b} n_j(\mu_j - \mu)^2\}$$

จะพบความจริงว่า ถ้า H_0 เป็นจริง คือ $\mu_j = \mu$ หรือ $\delta_j = 0; j = 1, 2, \ldots, b$ แล้วย่อมมีผลให้ $\mu_j - \mu = 0$ ซึ่งสะท้อนให้พบความจริงประการสำคัญคือ $E(MSB/MSW) = 1$ [1]

หรือนัยหนึ่ง ถ้า $E(MSB/MSW) = 1$ เราย่อมเชื่อได้ว่า $\mu_j = \mu$ หรือ $\delta_j = 0; j = 1, 2, \ldots b$

---

[1] จากนิยาม $E(\hat{\theta}) = \theta$ แสดงว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณค่า (estimator) ที่ปราศจากอคติของพารามิเตอร์ θ

ดังนั้น $E(MSB/MSW) = 1$ แสดงว่า MSB/MSW เป็นตัวประมาณค่าของ 1 หรือ 1 คือค่าจริงที่ประมาณได้ด้วย MSB/MSW แต่ $MSB/MSW = (MSB/\sigma^2)/(MSW/\sigma^2) = F_c$ แสดงว่า ถ้า $H_0 : \mu_j = \mu; j = 1, 2, \ldots, b$ เป็นจริงแล้ว $MSB/MSW = F_c$ จะต้องเท่ากับ 1 หรือ ถ้าพบว่า $F_c = 1$ ก็แสดงว่า H_0 เป็นจริง แต่ถ้า $MSB/MSW > 1$ ก็แสดงว่า H_1 เป็นจริง

ถ้า H_1 เป็นจริง กล่าวคือ ถ้า $\mu_j \neq \mu$ หรือ $\delta_j \neq 0; j = 1, 2, \ldots, b$ แล้ว

$$E(MSB/MSW) = 1 + \frac{1}{\sigma_e^2(b-1)} \sum_j^b n_j(\mu_j - \mu)^2 > 1$$

หรือนัยหนึ่ง ถ้า $E(MSB/MSW) > 1$ เราย่อมเชื่อได้ว่า $\mu_j \neq \mu$ หรือ $\delta_j \neq 0 ; j = 1, 2, \ldots, b$

ดังนั้นค่า $F = \dfrac{MSB/\sigma^2}{MSW/\sigma^2} = \dfrac{MSB}{MSW}$ จึงเป็นค่าที่ชี้ให้เห็นว่า H_0 ถูกต้องหรือไม่ เหมาะสมเพียงใดโดยชี้ว่าอัตราส่วนระหว่าง mean square จะมีค่าแตกต่างไปจาก 1 มากน้อยเพียงใด เมื่ออัตราส่วนระหว่าง MS ดังกล่าวมีค่าเท่ากับ 1 ถ้า H_0 จริง

สำหรับกรณีของ CRD fixed Effect นี้จะพบความจริงเพิ่มเติมดังนี้

(1) การแจกแจงของ $\bar{X}_{\cdot j}$

พิจารณา $\bar{X}_{\cdot j}$ จะพบว่า $E(\bar{X}_{\cdot j}) = E\{ \dfrac{1}{n_j} \sum_i^{n_j} (\mu + \delta_j + e_{ij})\} = \mu + \delta_j$

และ $V(\bar{X}_{\cdot j}) = \dfrac{1}{n_j^2} (0 + 0 + n_j\sigma_e^2) = \sigma_e^2/n_j$

$=> \bar{X}_{\cdot j} \sim N(\mu + \delta_j, \sigma_e^2/n_j) ; j = 1, 2, \ldots, b$

ถ้า H_0 เป็นจริงคือ $\delta_j = 0; j = 1, 2, \ldots, b$

$=> \bar{X}_{\cdot j} \sim N(\mu, \sigma_e^2/n_j)$ ทั้งนี้ $\hat{\mu} = \bar{X}$

ดังนั้น $\sum_j^b (\dfrac{\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}}{\sigma_e^2/n_j})^2 = \dfrac{1}{\sigma_e^2} \sum_j^b n_j(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2 = SSB/\sigma_e^2 \sim \chi^2_{(b-1)}$

(2) การแจกแจงของ X_{ij}

จาก $X_{ij} = \mu + \delta_j + e_{ij}$ จะพบว่า $E(X_{ij}) = \mu$ และ

$V(X_{ij}) = 0 + 0 + \sigma_e^2 = \sigma_e^2 => X_{ij} \sim N(\mu, \sigma_e^2)$

ดังนั้น $\sum_i^{n_j}\sum_j^b (\dfrac{X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j}}{\sigma_e^2})^2 = SSW/\sigma_e^2 \sim \chi^2_{(n-b)}$

ดังนั้น α = Pr{ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อสมมุติฐานหลักถูกต้อง}

α = Pr{ปฏิเสธ $H_0|\delta_j = 0; 1, 2, \ldots, b$}

= $Pr\{SSB/SSW > k|\delta_j = 0; = 1, 2\ldots, b\}$

$$= \quad \Pr\{(SSB/\sigma_e^2(b-1))/(SSW/\sigma_e^2(n-b)) > \frac{n-b}{b-1} \cdot k\}$$

$$= \quad \Pr\{MSB/\sigma_e^2/MSW/\sigma_e^2 > k'\}$$

แต่ $\dfrac{MSB/\sigma_e^2}{MSW/\sigma_e^2} \sim F_{b-1,n-b}$ ดังนั้น $\alpha = \Pr\{F > F_{1-\alpha,b-1,n-b}\}$

นั่นคือ $k'' = F_{1-\alpha,b-1,n-b}$

เราจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ MSB/MSW $> F_{1-\alpha,b-1,n-b}$

(3) การคำนวณหา Power of Test ของ F-Test

$\Pi(\mu_j \neq \mu; j = 1, 2, \ldots, b) = \Pr\{$ปฏิเสธสมมุติฐานหลักเมื่อสมมุติฐานรองเป็นจริง$\}$

$= \Pr\{\dfrac{MSB/\sigma_e^2}{MSW/\sigma_e^2} > F_{1-\alpha,b-1,n-b} | \mu_j \neq \mu$ หรือ $\delta_j \neq 0; j = 1, 2, \ldots, b\}$

แต่เมื่อพิจารณา MSB/σ_e^2 จะพบว่า $MSB/\sigma_e^2 = \dfrac{1}{\sigma_e^2} \sum_j^b n_j(\overline{X}_{\cdot j} - \overline{X})^2$

จะมีการแจกแจง เป็นแบบ $\chi^2_{(b-1)}$ เฉพาะเมื่อ $\mu_j = \mu$ หรือ $\delta_j = 0; j = 1, 2, \ldots, b$ เท่านั้น[1]

ดังนั้น เมื่อ $\mu_j \neq \mu$ หรือ $\delta_j \neq 0; j = 1, 2, \ldots, b$ ตาม H_1 แล้ว $\dfrac{MSB}{\sigma_e^2}$ ย่อมไม่มีการแจกแจงแบบ $\chi^2_{(b-1)}$ อีกต่อไป ด้วยเหตุนี้การหา Power of Test จึงไม่อาจใช้การแจกแจงแบบ F เข้าช่วย

สำหรับกรณี เมื่อ $\mu_j \neq \mu; j = 1, 2, \ldots, b$ นี้เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า MSB/σ_e^2 มีการแจกแจงแบบ Noncentral χ^2

---

[1] เมื่อ $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ หรือ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ เมื่อ $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_b = \mu$

$\Rightarrow \quad \sum_i^n (\dfrac{X_i - \mu}{\sigma})^2 = \sum_i^n (\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 + n(\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma})^2 = \dfrac{nS^2}{\sigma^2} + \dfrac{n(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma^2}$ เมื่อนิยามว่า $S^2 = \dfrac{1}{n} \sum_i^n (X_i - \overline{X})^2$

$\because \quad \sum_i^n (\dfrac{X_i - \mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2_{(n)}$; $\dfrac{n(\overline{X} - \mu)^2}{\sigma} = (\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2 \sim \chi^2_{(1)}$ และ S^2 เป็นอิสระกับ $\overline{X}$

ดังนั้น $\quad \dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

แต่ $\quad nS^2/\sigma^2 = \sum_i^n (\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$ เฉพาะเมื่อ $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

ดังนั้น $\quad \dfrac{1}{\sigma^2} \sum_j^b n_j(\overline{X}_{\cdot j} - \overline{X})^2 \sim \chi^2_{(b-1)}$ เฉพาะเมื่อ $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ หรือนัยหนึ่ง เมื่อ $\mu_j = \mu; j = 1, 2, \ldots, b$ เท่านั้น

$$= \frac{t\mu_i^2}{\sigma^2(1-2t)} - \frac{1-2t}{2\sigma^2}(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t})^2 \, ^1$$

ดังนั้น ถ้า $t < \frac{1}{2}$

$$E\{\exp(tx_i^2/\sigma^2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{\frac{t\mu_i^2}{\sigma^2(1-2t)} - \frac{(1-2t)}{2\sigma^2}(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t})^2\}dx_i$$

$$= \exp\{\frac{t\mu_i^2}{\sigma^2(1-2t)}\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(1-2t)}{2\sigma^2}(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t})^2\}dx_i$$

เมื่อนำ $\sqrt{1-2t}/\sqrt{1-2t}$ คูณ Integrand ตลอด จะเห็นได้ว่า integrand คือฟังก์ชั่นของการแจกแจงปกติคือ $N(\frac{\mu_i}{1-2t}, \frac{\sigma^2}{1-2t})$ ซึ่งมี mgf. $= \exp\{(\frac{\mu_i}{1-2t})t + \{\frac{\sigma^2}{1-2t} \cdot \frac{t^2}{2}\}\}$ ดังนั้น

$$E\{\exp(tx_i^2/\sigma^2)\} = \exp\{\frac{t\mu_i^2}{\sigma^2(1-2t)}\} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \exp\{\frac{t\mu_i^2}{\sigma^2(1-2t)}\}$$

---

[1] พิจารณา $(x_i - \mu_i)^2$ จะพบว่า $(x_i - \mu_i)^2 = x_i^2 + \mu_i^2 - 2x_i\mu_i$

$$=> \quad -\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2} = \frac{-x_i^2}{2\sigma^2} + \frac{2\mu_i x_i}{2\sigma^2} - \frac{\mu_i^2}{2\sigma^2}$$

$$=> \quad -\frac{(1-2t)}{2\sigma^2}(x_i - \mu_i/1-2t)^2 = \frac{-(1-2t)x_i^2}{2\sigma^2} + \frac{2\mu_i x_i}{2\sigma^2} - \frac{\mu_i^2}{2\sigma^2(1-2t)} \qquad \text{..........(1)}$$

แต่ $\quad \frac{\mu_i^2}{2\sigma^2(1-2t)} - \frac{t\mu_i^2}{\sigma^2(1-2t)} = \frac{(1-2t)\mu_i^2}{2\sigma^2(1-2t)} = \frac{\mu_i^2}{2\sigma^2}$

นำ $\quad \frac{t\mu_i^2}{\sigma^2(1-2t)}$ บวกเข้าทั้งด้านซ้ายและขวาของสมการที่ (1)

$$=> \quad -\frac{(1-2t)}{2\sigma^2}(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t})^2 + \frac{t\mu_i^2}{\sigma^2(1-2t)} = \frac{-(1-2t)x_i^2}{2\sigma^2} + \frac{2\mu_i x_i}{2\sigma^2} - \frac{\mu_i^2}{2\sigma^2}$$