ทฤษฎี 8.2 ให้ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน

ให้ $Y = \sum_i^n X_i^2/\sigma^2$ ถ้า $\mu_i \neq 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้วตัวแปรสุ่ม Y จะมีการแจกแจงแบบ Noncentral χ^2 ที่มี df = n และ Noncentrality Parameter $= \sum_i^n \mu_i^2/\sigma^2$

หมายเหตุ ตัวแปรสุ่ม Noncentral χ^2 ที่มี df = r และ Noncentrality parameter $= \theta$ จะมี mgf ดังนี้

$$M_X(t) = \{1/(1-2t)\}^{r/2} \exp\{t\theta/(1-2t)\}$$

พิสูจน์

$$M_Y(t) = E(e^{Yt}) = E\{\exp(t\sum_i^n x^2/\sigma^2)\}$$

$$= \prod_i^n E\{\exp(tx_i^2/\sigma^2)\}$$

$$E(\exp(tX_i^2/\sigma^2)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_i^2/\sigma^2} f_{X_i}(x_i; \mu_i, \sigma^2)dx_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_i^2/\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x_i - \mu_i)^2/2\sigma^2\}\, dx_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{tx_i^2/\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu_i)^2\}\, dx_i$$

แต่ $\frac{tx_i^2}{\sigma^2} - \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2} = \frac{2tx_i^2}{2\sigma^2} - \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2}$

$$= \frac{2tx_i^2}{2\sigma^2} - \frac{x_i^2}{2\sigma^2} - \frac{\mu_i^2}{2\sigma^2} + \frac{2\mu_i x_i}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{-(1-2t)x_i^2}{2\sigma^2} + \frac{2(\mu_i x_i)}{2\sigma^2} - \frac{\mu_i^2}{2\sigma^2}$$

$\because \quad M_Y(t) = \prod_{i}^{n} M_{X_i^2/\sigma^2}(t)$

$$= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{t\Sigma\mu_i^2}{\sigma^2(1-2t)}\right\}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับ mgf. ของ $\chi^2_{(r,\theta)}$ คือ [1]

$$M(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2} e^{t\theta/(1-2t)}$$

จะเห็นได้ว่า Y มี mgf. ลักษณะเดียวกับ mgf. ของ Noncentral χ^2 ดังนั้นตัวแปรสุ่ม Y จึงมีการแจกแจงแบบ Noncentral χ^2 มี df = n และ Noncentrality Parameter เท่ากับ $\sum_{i}^{n} \mu_i^2/\sigma^2$ หรือ $Y \sim \chi^2_{((n),\sum_{i}^{n}\mu_i^2/\sigma^2)}$

พิจารณา $\quad Y = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}\left(\frac{X_{ij}}{\sigma_e}\right)^2$ จะพบว่า

$$M_Y(t) = \prod_{i}^{n_j}\prod_{j}^{b} M_{(X_{ij}/\sigma_e)^2}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\Sigma n_j/2}$$

$$\exp\left\{\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} t\mu_j^2/\sigma_e^2(1-2t)\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2} \exp\left\{t\sum_{j}^{b} n_j\mu_j^2/\sigma_e^2(1-2t)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad Y \sim \chi^2_{(n,\Sigma n_j\mu_j^2/\sigma^2)}$$

และพบว่า $\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}\left(\frac{X_{ij}}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \bar{X} + \bar{X})^2$

---

[1] $\chi^2_{(r,\theta)}$ คือ Noncentral χ^2 มี df = r และ Noncentrality Parameter = θ ถ้า $\theta = 0$ M(t) จะกลายเป็น $\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}$ ซึ่งก็คือ mgf ของ Central χ^2 หรือ $\chi^2_{(r)}$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij}-\overline{X})^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}\overline{X}^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij}-\overline{X})^2 + \frac{\overline{X}^2}{\sigma^2/n}$$

$$=> \quad Y = Q/\sigma^2 + Z^2$$

$$\therefore \quad M_Y(t) = M_{Q/\sigma^2}(t).M_{Z^2}(t)$$

$$M_{Q/\sigma^2}(t) = M_Y(t)/M_{Z^2}(t)$$

$$= \{(\frac{1}{1-2t})^{n/2}\exp(t\sum_{j}^{b}n_j\mu_j^2/\sigma^2(1-2t))\}/(\frac{1}{1-2t})^{1/2}$$

$$= (\frac{1}{1-2t})^{(n-1)/2}\exp\{t\sum_{j}^{b}n_j\mu_j^2/\sigma^2(1-2t)\}$$

$$=> \quad Q/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-1,\ \Sigma n_j\mu_j^2/\sigma^2)}$$

พิจารณา Q/σ^2 พบว่า

$$\frac{Q}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij}-\overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij}-\overline{X}_{.j}+\overline{X}_{.j}-\overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij}-\overline{X}_{.j})^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j}^{b}n_j(\overline{X}_{.j}-\overline{X})^2$$

$$= \frac{Q_1}{\sigma^2} + \frac{Q_2}{\sigma^2}$$

$$=> \quad M_{Q/\sigma^2}(t) = M_{Q_1/\sigma^2}(t).M_{Q_2/\sigma^2}(t)$$

$$=> \quad M_{Q_2/\sigma^2}(t) = M_{Q/\sigma^2}(t)/M_{Q_1/\sigma^2}(t)$$ [1]

$$= \frac{(\frac{1}{1-2t})^{(n-1)/2} \exp\{t\sum_{j}^{n} n_j\mu_j^2/\sigma^2(1-2t)\}}{(\frac{1}{1-2t})^{(n-b)/2}}$$

$$= (\frac{1}{1-2t})^{(b-1)/2} \exp\{t\sum_{j}^{b} n_j\mu_j^2/\sigma^2(1-2t)\}$$

$$=> \quad Q_2/\sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j}^{n_j}\sum_{j}^{b}(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2 \text{ เมื่อ } \mu_j \neq \mu \,;\, j = 1, 2, \ldots, b$$

Q_2/σ^2 มีการแจกแจงแบบ Noncentral χ^2 df $= b - 1$ มี Noncentrality Parameter เท่ากับ $\sum_{j}^{b} n_j\mu_j^2/\sigma^2$

สำหรับ SSW จะพบว่า SSW $= \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2$ เป็นฟังก์ชั่นย่อยของ X_{ij} ซึ่งมิได้เกี่ยวข้องกับกรณีที่ว่า μ_j จะต้องเท่ากับ μ ดังนั้น $\frac{SSW}{\sigma^2}$ จึงมีการแจกแจงแบบ Central χ^2 เช่นเดิมคือ $SSW/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-b}$

และจากนิยามของ F คือ $\frac{U/\nu_1}{V/\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ เมื่อ $U \sim \chi^2_{(\nu_1)}$ และ $V \sim \chi^2_{(\nu_2)}$ เรียกว่า Central F Dist^n

ดังนั้นถ้า $U \sim \chi^2_{(\nu_1,\, \theta_1)}$ และ $V \sim \chi^2_{(\nu_2,\, \theta_2)}$ แล้ว $\frac{U/\nu_1}{V/\nu_2}$ จะมีการแจกแจงแบบ Noncentral F

ด้วยเหตุนี้ เมื่อ $MSB/\sigma^2 \sim \chi^2_{(b-1,\, \Sigma n_j\mu_j^2/\sigma^2)}$ และ $\frac{MSW}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-b,\, o)}$ => $\frac{MSB/\sigma^2}{MSW/\sigma^2}$ ย่อมมีการแจกแจงแบบ Noncentral F มี df $= (b - 1, n - b)$ และมี Noncentrality Parameter $= \sum_{j}^{b} n_j\mu_j^2/\sigma^2$

---

[1] $Q/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-1, \Sigma n_j\mu_j^2/\sigma^2)}$; $Q_1/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-b, 0)}$ หรือ Central χ^2

ดังนั้น $\Pi(\mu_j \neq \mu; j = 1, 2, ..., b) = \Pr\{\frac{MSB}{MSW} > F''_{1-\alpha, b-1, n-b} | \mu_j \neq \mu; j = 1, 2, ..., b\}$ เมื่อ $F''_{1-\alpha, b-1, n-b}$ คือ Quantile ของการแจกแจงแบบ Noncentral F

สำหรับการคำนวณหา Power of Test สำหรับกรณี CRD fixed effect ให้ใช้ตาราง Noncentral F หรือ "Charts of the Power Function for Analysis of Variance Test" ซึ่งสร้างโดย E.S. Pearson และ H.O. Hartley [1] ต่อไปนี้

การใช้แผนภูมิแสดง Power Function ของ ANOVA

1. $\nu_1 = k-1$ = df ของ SSB และ $\nu_2 = k(n-1)$ = df ของ SSW โดยที่ $n_1 = n_2 = ... = n_k = n$

2. α = ระดับนัยสำคัญ กลุ่มของ Power Function Curve ด้านซ้ายคือโค้งสำหรับ $\alpha = .05$ ส่วนโค้งทางขวาคือโค้งสำหรับ $\alpha = .01$

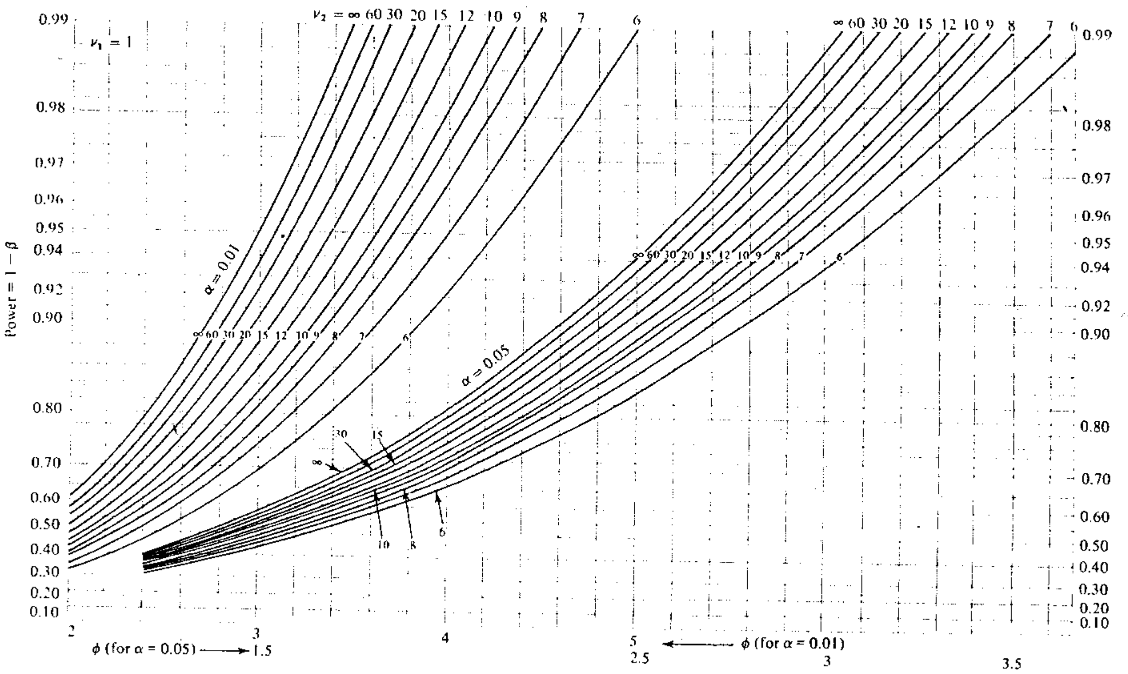
3. ϕ คือพารามิเตอร์ที่เป็นฟังก์ชั่นของ df และ Noncentrality Parameter ดังนั้น ใน CRD fixed effect model จะพบว่า

$$\phi = \frac{\sqrt{\Sigma \delta_j^2/(\nu_1 + 1)}}{\sigma_e/\sqrt{n}}$$ เมื่อ $\hat{\sigma}_e^2 = MSW; n_1 = n_2 = ... = n_k = n$

และ $\delta_j = \mu_j - \mu$ และถ้าไม่กำหนดเป็นอย่างอื่นให้ถือว่า $\delta_j = \bar{x}_{.j} - \bar{x}$

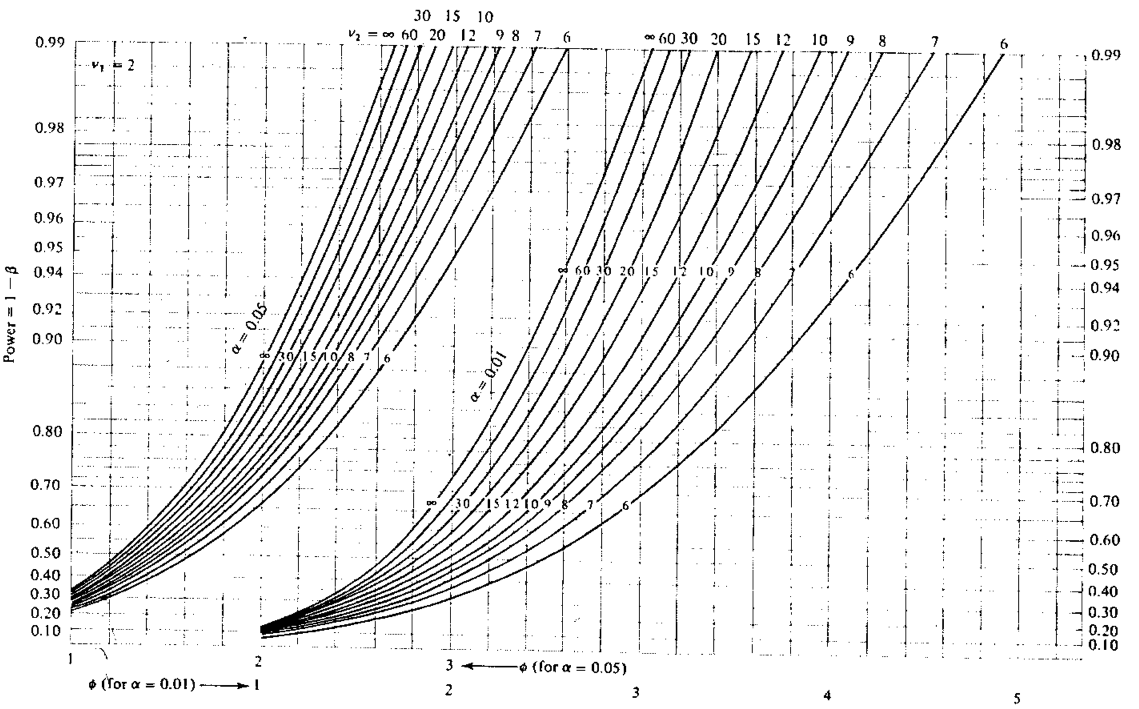
4. การใช้ตารางให้คำนวณหาค่า ϕ ขึ้นมาก่อนแล้วเลือกโค้งของ Power Function จากภาพ โดยใช้โค้งที่มี df ν_1 และ ν_2 ตรงกับงานที่กำลังวิเคราะห์อยู่ ค่า Π หรือ $1-\beta$ อ่านได้จากแกนตั้งที่มีค่าตัวเลขปรากฏอยู่

[1] Isaac N. Gibra, Op Cit p.348-354

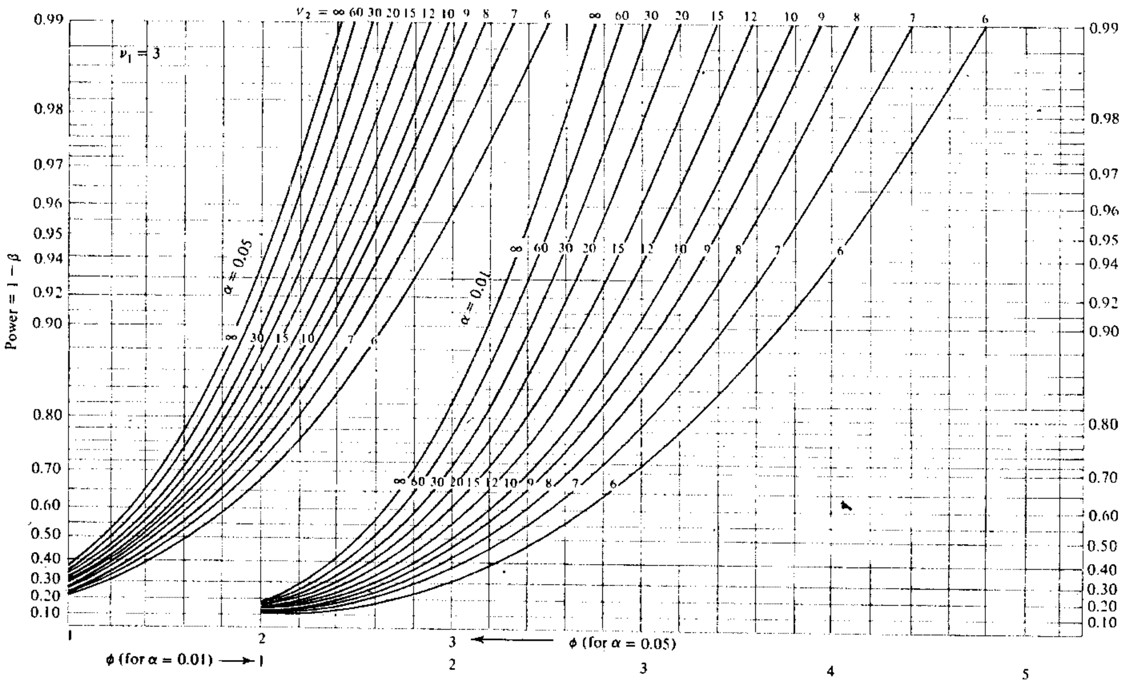


ภาพ 8.1 Power function for analysis of variance lest with $\nu_1 = 1$.

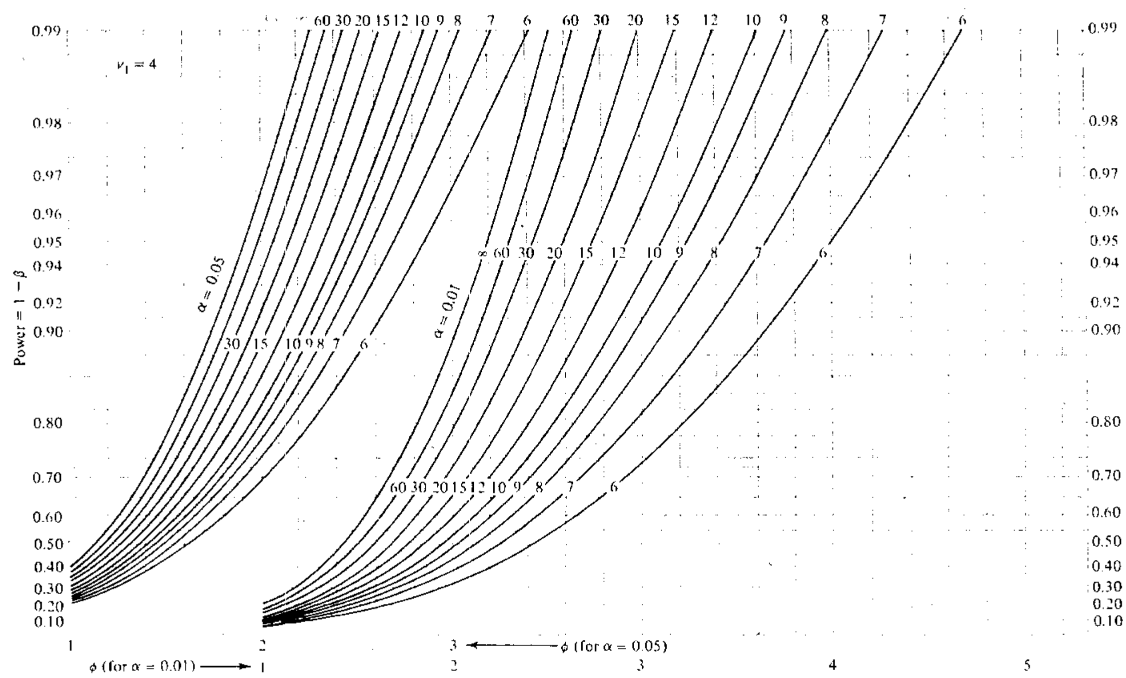
[Reproduced with permission from E.S. Pearson and H.O. Hartley. "Charts of the Power Function for Analysis of Variance Tests. Derived from the Non-Central F-Distribution." Biometrika, 38, 112, 1951.]



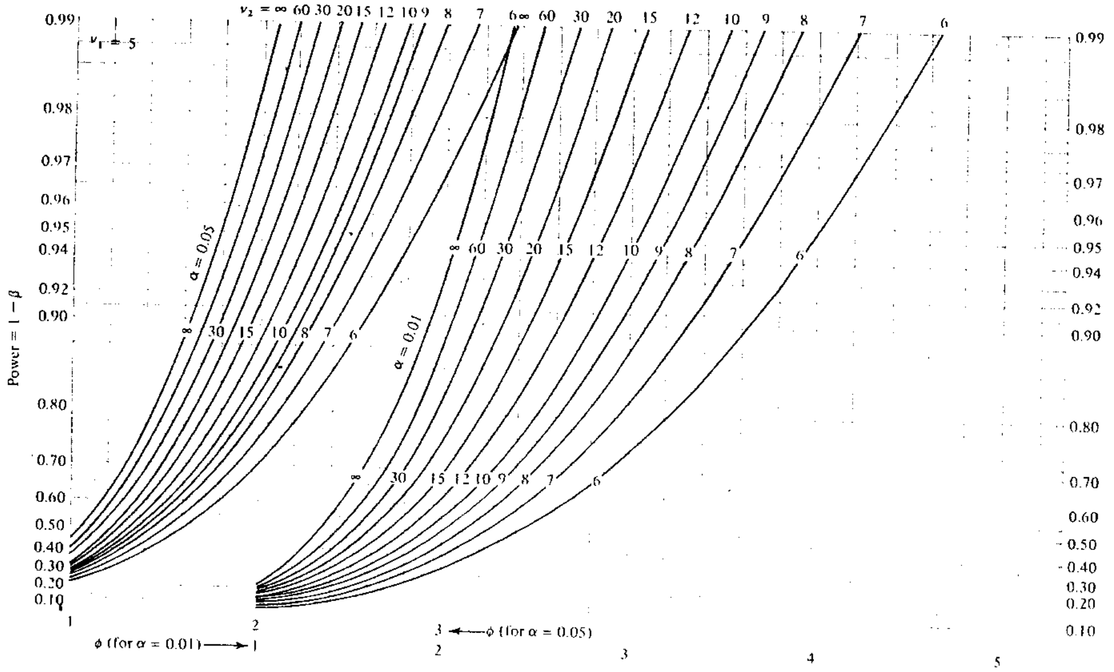
ภาพ 8.2 Power function for analysis of variance test with $\nu_1 = 2$.



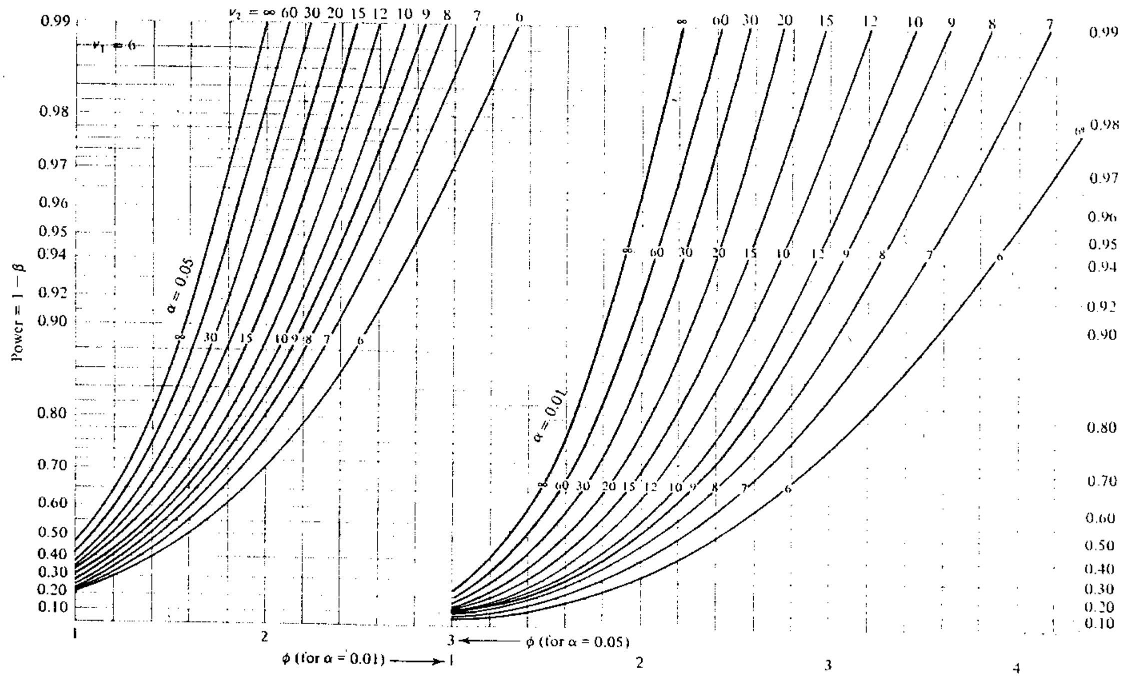
ภาพ 8.3 Power function for analysis of variance test with $\nu_1 = 3$.



ภาพ 8.4 Power function for analysis of variance test with $\nu_1 = 4$.



ภาพ 8.5 Power function for analysis of variance test with $\nu_1 = 5$.



ภาพ 8.6 Power function for analysis of variance test with $\nu_1 = 6$.

ตัวอย่าง 8.1 ฝ่ายโรงงานอยากทราบว่าเครื่องผลิตเส้นใยไนลอน 3 เครื่องจะผลิตเส้นใยได้คุณภาพทัดเทียมกันหรือไม่

สุ่มเส้นใยมาจากแต่ละเครื่อง ๆ ละ 4, 5 และ 6 ตัวอย่าง แล้วทดสอบความเหนียวโดยวัดด้วยแรงดึง (ปอนด์) ปรากฏข้อมูลดังนี้คือ

I	II	III
25	31	30
36	38	28
30	29	24
38	42	28
	35	25
		29

จงทดสอบสมมุติฐาน ณ. ระดับนัยสำคัญ 5%

วิธีทำ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ vs $H_1 : \mu$ อย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากัน

$$SSB = \sum_{j}^{b} n_j(\overline{X}_{.j} - \overline{X})^2 = \sum_{j}^{b} X_{.j}^2/n_j - CF \quad \text{เมื่อ } CF = \frac{1}{n}\left(\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} X_{ij}\right)^2$$

$$SST = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \overline{X})^2 = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} X_{ij}^2 - CF$$

$$SSW = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2 = \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} X_{ij}^2 - \sum_{j}^{b} X_{.j}^2/n_j = SST - SSB$$

จากข้อมูล เราสามารถเตรียมตารางเพื่อการวิเคราะห์ได้ดังนี้

	I	II	III	
	25	31	30	
	36	38	28	
	30	29	24	
	38	42	28	
		35	25	
			29	
รวม ($X_{.j}$)	129	175	164	ยอดรวม = 468

$$n = 4 + 5 + 6 = 15$$

$$CF = \frac{1}{n}(\sum_i^{n_j}\sum_j^{b} X_{ij})^2 = \frac{1}{15}(\sum_i^{n_j}\sum_j^{3} X_{ij})^2 = 468^2/15 = 14{,}061.6$$

$$SSB = \frac{129^2}{4} + \frac{175^2}{5} + \frac{164^2}{6} - 14{,}601.6$$

$$= 14{,}061.916 - 14{,}601.6 = 166.316$$

$$SST = (25^2 + 36^2 + \ldots + 28^2 + 25^2 + 29^2) - 14{,}601.6$$

$$= 15{,}010 - 14{,}601.6 = 408.4$$

$$SSW = 408.4 - 166.316 = 242.084$$

ตาราง ANOVA ปรากฏดังนี้

ANOVA

$H_0 : \delta_j = 0; j = 1, 2, 3$ หรือ $H_0 : \mu_j = \mu; j = 1, 2, 3$

SOV	df	SS	MS	F	EMS
Between	2	166.316	83.158	4.122	$\sigma_e^2 + \frac{1}{2}\sum_j^3 n_j\delta_j^2$
Within	12	242.084	20.174		σ_e^2
Total	14	408.4			

$\hat{\sigma}_e^2 = 20.175$ และ $\frac{1}{2}\sum_j^3 n_j\delta_j^2 = 83.158 - 20.984 = 62.984$

ดังนั้น $$\frac{\sigma_e^2 + \frac{1}{2}\sum_j^3 n_j\delta_j^2}{\sigma_e^2} = \frac{20.175 + 62.984}{20.175} = 4.122 > 1$$

จะเห็นว่า E(MSB/MSW) > 1 จึงเชื่อว่าน่าจะปฏิเสธสมมุติฐานหลัก และเพื่อให้สามารถสรุปผลโดยการนำระดับนัยสำคัญมาร่วมพิจารณาด้วยให้ใช้ F-Ratio จะพบว่า $F_c = 4.122$ ขณะที่ $F_{2,12,.95} = 3.89$ ซึ่ง $F_c > 3.89$ ดังนั้นจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ 5% และเชื่อว่าเครื่องจักรทั้งสามสามารถผลิตเส้นใยได้คุณภาพต่างกัน

8.3.2 **One-Way Classification : Random Effect หรือ CRD-Random Effect**

เพื่อความเข้าใจในเรื่องของ CRD-Random Effect ดีขึ้นขอให้ทำความเข้าใจคำ 2 คำ คือคำว่า factor และ level ซึ่งใช้บ่อยครั้งในการวางแผนการทดลอง

คำว่า factor หมายถึงปัจจัยที่ส่งผลสะท้อนต่อหน่วยทดลอง

คำว่า level หมายถึงระดับต่าง ๆ ของปัจจัยอันจะส่งผลสะท้อนต่อหน่วยทดลองได้แตกต่างกัน ระดับหนึ่ง ๆ ของปัจจัยหรือการประกอบกันของระดับปัจจัยเรียกว่า treatment

ตัวอย่างเช่น การทำไอศกรีมนั้น ปัจจัยที่ก่อให้เกิดรสชาดต่างกันก็คือ น้ำตาล นม และเนย สูตรส่วนผสมต่าง ๆ ของน้ำตาล นม เนย เรียกว่าระดับของปัจจัยหรือ treatment

หรือในการผลิตกระดาษเคลือบไข ปัจจัยที่มีผลให้กระดาษได้รับการเคลือบไขมากน้อยเพียงใดคือ เครื่องเคลือบ ยี่ห้อของเครื่องเคลือบไข คือระดับของปัจจัยหรือ treatment

ในการผลิตเส้นใยกระดาษ ปัจจัยที่ทำให้กระดาษมีผิวที่เรียบก็คือคุณภาพของผู้คุมเครื่องพ่นเยื่อกระดาษ ระดับอายุหรือประสบการณ์ หรือเพศของผู้ที่ควบคุมเครื่อง (operator) คือระดับของปัจจัยหรือ treatment ดังนี้เป็นต้น

ดังนั้น ในกรณีที่ปัจจัยที่สนใจมีระดับต่าง ๆ มากมายหลายระดับเรียกว่า ประชากรของระดับหรือประชากรของ treatment ซึ่งในกรณีนี้ไม่เหมาะที่จะใช้เป็นแผนการทดลองแบบ fixed effect เพราะแผนการทดลองแบบ fixed effect เหมาะสมสำหรับกรณีที่ปัจจัยที่สนใจมีระดับต่าง ๆ ในจำนวนจำกัด การทดลองจึงให้ดำเนินการเป็น 2 ขั้นดังนี้คือ

1. เลือกระดับ หรือ treatment มาโดยสุ่มจากกลุ่มประชากรของ treatment

2. จัดหน่วยทดลองเข้ารับ treatment ในขั้นที่ 1 แล้ววัดค่า ด้วยเหตุที่ treatment ได้รับเลือกมาโดยสุ่ม ดังนั้นอิทธิพลของ treatment คือ δ_j จึงเป็นตัวแปรสุ่มด้วย

แผนการทดลองแบบ Random Effect มีข้อดีเหนือกว่า Fixed Effect คือลักษณะของการอนุมาน เหตุที่เราเลือก Treatment มาโดยสุ่มผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง จึงสามารถย้อนไปสู่การอนุมานสู่ประชากรของ treatment ทั้งกลุ่มได้ ในขณะที่กรณีของ Fixed Effect เราอนุมานสู่เฉพาะ treatment ที่มีอยู่หรือ treatment ที่ทำให้การทดลองเท่านั้น

1. แบบจำลอง

โดยการพัฒนาแบบจำลองในทำนองเดียวกันกับกรณีของ Fixed Effect ดังนั้นแบบจำลองสำหรับ CRD-Random Effect คือ

$$X_{ij} = \mu + \delta_j + e_{ij} \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n_j ; \; j = 1, 2, \ldots, b$$

X_{ij} = คือค่าสังเกตจากหน่วยทดลองที่ i ที่รับ treatment ที่ j

n_j = จำนวนหน่วยทดลองที่ได้รับการจัดเข้ารับ treatment ที่ j โดยสุ่ม

b = จำนวน treatment ที่สุ่มมาจากกลุ่มประชากรของ treatment

δ_j = อิทธิพลของ treatment ที่ j โดยที่ $\delta_j = \mu_j - \mu$; j = 1, 2, ..., b

ซึ่งในที่นี้ δ_j เป็นตัวแปรสุ่มและเราเพิ่มข้อตกเพื่อควบคุม δ_j ไว้ดังนี้คือ

$\delta_j \sim N(0, \sigma^2_\delta)$ และ δ_j เป็นอิสระต่อกันหรือนัยหนึ่ง $E(\delta_j\delta_{j'}) = 0; j \neq j'$

μ = ค่าเฉลี่ยร่วมกัน (Overall Mean) ของตัวแปรสุ่ม X_{ij} ที่รับปัจจัย (factor) ร่วมกัน ทั้งนี้ $\mu = \sum_j^b n_j\mu_j/\sum_j^b n_j$

e_{ij} = ตัวแปรสุ่มแสดง Chance Error ทั้งนี้ $e_{ij} = X_{ij} - \mu_j$ และเราเพิ่มข้อตกลงเพื่อควบคุม e_{ij} ดังนี้คือ $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2_e)$; i = 1, 2, ..., n_j ; j = 1, 2, ..., b และ e_{ij} เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ นอกจากนี้ ยังถือว่า δ_j และ e_{ij} เป็นอิสระต่อกัน

2. การวิเคราะห์

สำหรับการวิเคราะห์ให้ปฏิบัติเช่นเดียวกับกรณี Fixed Effect คือ

$$\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 + \sum_j^{b} n_j(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$$

หรือ SST = SSW + SSB

ความแตกต่างที่ชัดเจนระหว่าง Fixed Effect และ Random Effect ก็คือความแตกต่างกันในค่า EMS การอนุมานและการคำนวณหา Power of Test

การหาค่า EMS สามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$E(SSW) = E\{\sum_i^{n_j}\sum_j^{b}(X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2\} = E\sum_j^{b}(n_j - 1)S_j^2$$

$$= \sum_{j}^{b} (n_j - 1)E(S_j^2)^{1} = \sigma_e^2 \sum_{j}^{b} (n_j - 1)$$

$$= \sigma_e^2 \left(\sum_{j}^{b} n_j - b \right) = (n - b)\sigma_e^2$$

$$=> \quad \frac{1}{n - b} E(SSW) = \sigma_e^2$$

ดังนั้น $E(MSW) = \sigma_e^2$ หรือนัยหนึ่ง MSW เป็นตัวประมาณค่าที่ปราศจากอคติของ σ_e^2

$$\because X_{ij} = \mu + \delta_j + e_{ij}, \overline{X}_{.j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} (\mu + \delta_j + e_{ij})$$

$$= \mu + \delta_j + \frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} e_{ij}$$

ดังนั้น

$$S_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i}^{n_j} \{\mu + \delta_j + e_{ij} - \mu - \delta_j - \frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} e_{ij}\}^2$$

$$= \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i}^{n_j} \{e_{ij} - \frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} e_{ij}\}^2$$

$$= \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i}^{n_j} \{e_{ij}^2 + \frac{1}{n_j^2} (\sum_{i}^{n_j} e_{ij})^2 - \frac{2}{n_j} e_{ij} \sum_{i}^{n_j} e_{ij}\}$$

$$E(S_j^2) = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i}^{n_j} \{E(e_{ij}^2) + \frac{1}{n_j^2} E(\sum_{i}^{n_j} e_{ij}^2 + \sum_{s \neq t}^{n_j} e_{sj}e_{tj})$$

$$- \frac{2}{n_j} E(e_{ij}^2 + \sum_{i \neq s}^{n_j} e_{ij}e_{sj})\}$$

$$= \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i}^{n_j} \{\sigma_e^2 + \frac{1}{n_j^2} n_j\sigma_e^2 - \frac{2}{n_j} \sigma_e^2\}$$

$$= \frac{1}{n_j - 1} (n_j\sigma_e^2 + \sigma_e^2 - 2\sigma_e^2)$$

$$= \frac{1}{n_j - 1} (n_j - 1)\sigma_e^2$$

$= \sigma_e^2$ นั่นคือ $E(S_j^2) = \sigma_e^2$

---

[1] $S_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i}^{n_j} (X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2$

$$\bar{X}_{.j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i}^{n_j} X_{ij} = \frac{1}{n_j}\sum_{i}^{n_j}(\mu + \delta_j + e_{ij}) = \mu + \delta_j + \bar{e}_{.j}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij}) = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(\mu + \delta_j + e_{ij}) = \mu + \frac{1}{n}\sum_{j}^{b} n_j\delta_j + \bar{e}$$

ดังนั้น

$$E\sum_{j}^{b} n_j(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 = E\sum_{j}^{b} n_j(\delta_j - \frac{1}{n}\sum_{j}^{b} n_j\delta_j + \bar{e}_{.j} - \bar{e})^2$$

$$= E\sum_{j}^{b} n_j(\delta_j - \frac{1}{n}\sum_{j}^{b} n_j\delta_j)^2 + E\sum_{j}^{b} n_j(\bar{e}_{.j} - \bar{e})^2 +$$

$$2E\sum_{j}^{b} n_j(\delta_j - \frac{1}{n}\sum_{j}^{b} n_j\delta_j)(\bar{e}_{.j} - \bar{e})$$

$$= A + B + C$$

$$A = E\sum_{j}^{b} n_j(\delta_j - \frac{1}{n}\sum_{j}^{b} n_j\delta_j)^2$$

$$= E\sum_{j}^{b} n_j\delta_j^2 + E\sum_{j}^{b} n_j \frac{1}{n^2}(\sum_{j}^{b} n_j\delta_j)^2 - \frac{2}{n}E\sum_{j}^{b} n_j\delta_j\sum_{j}^{b} n_j\delta_j$$

$$= a + b + c$$

$$a = E\sum_{j}^{b} n_j\delta_j^2 = \sum_{j}^{b} n_j E\delta_j^2 = \sum_{j}^{b} n_j\{E\delta_j^2 - (E\delta_j)^2\}$$

$$= \sum_{j}^{b} n_j V(\delta_j) = \sigma_\delta^2\sum_{j}^{b} n_j = n\sigma_\delta^2$$

$$b = E\sum_{j}^{b} n_j \cdot \frac{1}{n^2}(\sum_{j}^{b} n_j\delta_j)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{j}^{b} n_j E(\sum_{j}^{b} n_j\delta_j)^2$$

$$= \sum_{j}^{b} n_j \cdot \frac{1}{n^2} E\{\sum_{j}^{b}(n_j\delta_j)^2 + \sum_{j \neq k}^{b} n_j\delta_j n_k\delta_k\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j}^{b} n_j\{\sum_{j}^{b} n_j^2 E(\delta_j^2) + 0\} = \frac{1}{n^2}\sum_{j}^{b} n_j\sum_{j}^{b} n_j^2\sigma_\delta^2$$

$$= \frac{1}{n^2}(\sum_{j}^{b} n_j^2\sigma_\delta^2)\sum_{j}^{b} n_j \quad \because \sum_{j}^{b} n_j^2\sigma_\delta^2 = \sigma_\delta^2(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_b^2)$$

ซึ่งเป็นค่าคงที่

$$= \frac{1}{n}\sum_{j}^{b} n_j^2\sigma_\delta^2$$

$$c = \frac{2}{n} E \sum_{j}^{b} n_j\delta_j(\sum_{j}^{b} n_j\delta_j) = \frac{2}{n} E(\sum_{j}^{b} n_j\delta_j)\sum_{j}^{b} n_j\delta_j$$

$$= \frac{2}{n} \{E(\sum_{j}^{b} n_j\delta_j)^2\}$$

$$= \frac{2}{n} E\{\sum_{j}^{b} (n_j\delta_j)^2 + 2 \sum_{j \neq k}^{b} n_j\delta_j n_k\delta_k\}$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{j}^{b} n_j^2\sigma_\delta^2$$

ดังนั้น

$$A = a + b + c$$

$$= n\sigma_\delta^2 + \frac{1}{n} \sum_{j}^{b} n_j^2\sigma_\delta^2 - \frac{2}{n} \sum_{j}^{b} n_j^2\sigma_\delta^2$$

$$= n\sigma_\delta^2 - \frac{1}{n} \sum_{j}^{b} n_j^2\sigma_\delta^2$$

$$= \sigma_\delta^2(n - \frac{1}{n} \sum_{j}^{b} n_j^2) = \sigma_\delta^2(\frac{n^2 - \sum^{b} n_j^2}{n})$$

$$B = E \sum_{j}^{b} n_j(\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})^2 = \sum_{j}^{b} n_j E(\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})^2$$

$$= \sum_{j}^{b} n_j E\{\frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} e_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} e_{ij}\}^2$$

$$= \sum_{j}^{b} n_j E\{\frac{1}{n_j^2} (\sum_{i}^{n_j} e_{ij})^2 + \frac{1}{n^2} (\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} e_{ij})^2$$

$$- 2 \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n_j} (\sum_{i}^{n_j} e_{ij})(\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} e_{ij})\}$$

$$= \sum_{j}^{b} n_j\{\frac{1}{n_j^2} \sum_{i}^{n_j} \sigma_e^2 + 0 + \frac{1}{n^2} \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b} \sigma_e^2 + 0 - \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n_j} \sum_{i}^{n_j} \sigma_e^2 - 0\}$$

$$= \sum_{j}^{b} n_j \cdot \frac{1}{n_j^2} (n_j\sigma_e^2) + \frac{1}{n^2} \sum_{j}^{b} n_j(n\sigma_e^2) - \frac{2}{n} \sum_{i}^{n_j} (n_j\sigma_e^2)$$

$$= b\sigma_e^2 + \sigma_e^2 - 2\sigma_e^2$$

$$= (b - 1)\sigma_e^2$$

$$C = 2E \sum_{k}^{b} n_j(\delta_j - \frac{1}{n} \sum_{k}^{b} n_j\delta_j)(\bar{e}_{\cdot j} - \bar{e})$$

โดยการกระจายวงเล็บและการกระจาย $\bar{e}_{.j}$ และ $\bar{e}$ ด้วยเทคนิคทำนองเดียวกันกับที่ผ่านมา เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า C = 0 การพิสูจน์นี้ขอเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ดังนั้น $E(SSB) = A + B + C$

$$\therefore \quad E(SSB) = \frac{\sigma_\delta^2(n^2 - \sum^{b} n_j^2)}{n} + (b-1)\sigma_e^2 + 0$$

หารตลอดด้วย $(b - 1)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(b-1)} E(SSB) = E(MSB) = \sigma_e^2 + \frac{(n^2 - \sum^{n} n_j^2)\sigma_\delta^2}{n(b-1)}$$

ให้ $$n_0 = \frac{n^2 - \sum^{b} n_j^2}{n(b-1)}$$

$$\Rightarrow \quad E(MSB) = \sigma_e^2 + n_0\sigma_\delta^2$$

ดังนั้นตาราง ANOVA สำหรับ CRD-Random Effect จึงปรากฏดังนี้

SOV	df	SS	MS	EMS
ระหว่างกลุ่ม	$b-1$	SSB	MSB	$\sigma_e^2 + n_0\sigma_\delta^2$
ภายในกลุ่ม	$n-b$	SSW	MSW	σ_e^2
รวม	$n-1$	SST		

จากตารางจึงเห็นได้ว่า ความแปรปรวนระหว่าง treatment คือ σ_δ^2 ซึ่งสามารถประมาณได้ดังนี้

$$\because \quad MSB - MSW = (\sigma_e^2 + n_0\sigma_\delta^2) - \sigma_e^2 = n_0\sigma_\delta^2 \Rightarrow \sigma_\delta^2 = \frac{1}{n_0}(MSB - MSW)$$

หรือ $\frac{1}{n_0}(MSB - MSW)$ เป็นตัวประมาณค่าที่ปราศจากอคติของ σ_δ^2 ในขณะที่ MSW เป็นตัวประมาณค่าที่ปราศจากอคติของ σ_e^2

พิจารณาการแจกแจงของ SSW และ SSB จะพบว่า

$$X_{ij} = \mu + \delta_j + e_{ij}$$

$$\bar{X}_{.j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i}^{n_j} X_{ij} = \mu + \delta_j + \frac{1}{n_j}\sum_{i}^{n_j} e_{ij}$$

$$E(\bar{X}_{.j}) = \mu + E(\delta_j) + \frac{1}{n_j}\sum_{j}^{n_j} E(e_{ij}) = \mu$$

$$V(\bar{X}_{.j}) = V(\mu + \delta_j + \frac{1}{n_j}\sum_{i}^{n_j} e_{ij})$$

$$= 0 + \sigma_\delta^2 + \frac{1}{n_j^2}\sum_{i}^{n_j} V(e_{ij})$$

$$= \sigma_\delta^2 + \frac{n_j}{n_j^2}\sigma_e^2$$

$$= \sigma_\delta^2 + \sigma_e^2/n_j = \frac{n_j\sigma_\delta^2 + \sigma_e^2}{n_j}$$

$\bar{X}_{.j} \sim N(\mu, (n_j\sigma_\delta^2 + \sigma_e^2)/n_j)$

ดังนั้น $\sum_{j}^{b} \frac{(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2}{V(\bar{X}_{.j})} = \sum_{j}^{b} \frac{n_j(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2}{n_j\sigma_\delta^2 + \sigma_e^2} \sim \chi^2_{(b-1)}$

และด้วยเหตุที่

$$X_{ij} = \mu + \delta_j + e_{ij}$$

ดังนั้น $E(X_{ij}) = \mu$ และ $V(X_{ij}) = 0 + \sigma_\delta^2 + \sigma_e^2$

ในกรณี Random Effect นี้ $X_{ij} \sim N(\mu, \sigma_\delta^2 + \sigma_e^2)$

ดังนั้น

$$\frac{\sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2}{\sigma_\delta^2 + \sigma_e^2} = \frac{SSW}{\sigma_\delta^2 + \sigma_e^2} \sim \chi^2_{(n-b)}$$

3. การทดสอบสมมุติฐาน

เหตุที่ CRD-Random Effect ดำเนินการโดยสุ่มระดับหรือ Treatment มาจากกลุ่มประชากรของระดับ (Population of Level or Treatment) แล้วเปรียบเทียบอิทธิพลของ Sampled Treatment จากนั้นจึงอนุมานสู่กลุ่มประชากรของ Treatment ดังนั้นการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบอิทธิพลของ treatment จึงกระทำได้โดยทดสอบว่า $\sigma^2_\delta = 0$ หรือไม่ เพราะถ้า $\sigma^2_\delta = 0$ ย่อมแสดงว่าไม่มีความแปรปรวนในอิทธิพลของ treatment หรือทุก ๆ treatment มีอิทธิพลต่อหน่วยทดลองเช่นเดียวกัน [1]

ดังนั้น

$$H_0 : \sigma^2_\delta = 0 \text{ vs } H_1 : \sigma^2_\delta > 0$$

จาก $X_{.j} \sim N(\mu, \dfrac{n_j\sigma^2_\delta + \sigma^2_e}{n_j})$ และ $X_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2_\delta + \sigma^2_e)$

ถ้า H_0 จริงหรือ $\sigma^2_\delta = 0$ แล้ว

$$\overline{X}_{.j} \sim N(\mu, \sigma^2_e/n_j) \quad \text{และ} \quad X_{ij} \sim N(\mu, \sigma^2_e)$$

$$\Rightarrow \sum_{j}^{b} \frac{(\overline{X}_{.j} - \overline{X})^2}{\sigma^2_e/n_j} = \sum_{j}^{b} \frac{n_j(\overline{X}_{.j} - \overline{X})^2}{\sigma^2_e} = \frac{SSB}{\sigma^2_e} \text{ และ } \frac{SSB}{\sigma^2_e} \sim \chi^2_{(b-1)}$$

$$\text{และ} \quad \sum_{i}^{n_j}\sum_{j}^{b}(X_{ij} - \overline{X}_{.j})^2/\sigma^2_e = SSW/\sigma^2_e \text{ และ } SSW/\sigma^2_e \sim \chi^2_{(n-b)}$$

และปฏิเสธ H_0 ณ. ระดับนัยสำคัญ (ระดับความเสี่ยง) α เมื่อ

$$\alpha = \Pr\{\frac{MSB/\sigma^2_e}{MSW/\sigma^2_e} > k|\sigma^2_\delta = 0\}$$

∴ ปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ. ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ $MSB/MSW > F_{1-\alpha,b-1,n-b}$

สำหรับ Power of Test คำนวณได้ดังนี้

---

[1] สมมุติในกลุ่มประชากรของ treatment (trt) ประกอบด้วย trt ทั้งสิ้น N trt แต่ละ trt มีอิทธิพล (เป็นตัวแปรสุ่ม) เท่ากับ $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$ ตามลำดับ ให้ μ_δ คือค่าเฉลี่ยจริงของ δ ถ้า $\sigma^2_\delta = 0$ แสดงว่าอิทธิพล δ_j; j = 1, 2, ..., n มีค่าเท่ากันหมดและมีค่าเท่ากับ μ_δ

$$\Pi(\sigma_\delta^2) = Pr\{\frac{\sum_j^b n_j(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2/b-1}{\sum_i^{n_j}\sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2/n - b} > F_{1-\alpha,b-1,n-b}|\sigma_\delta^2>0\}$$

ให้ $n_j = a ; j = 1, 2, ..., b$

$$=> \quad \Pi(\sigma_\delta^2) = Pr\{\frac{a\sum_j^b (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2/b - 1}{\sum_i^{n_j}\sum_j^b (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2/ab - b} > F_{1-\alpha,b-1,n-b}|\sigma_\delta^2>0\}$$

$$= Pr\{F_{b-1,ab-b} > \frac{\sigma_\delta^2 + \sigma_e^2}{a\sigma_\delta^2 + \sigma_e^2} \cdot F_{1-\alpha,b-1,ab-b}\}$$

ตัวอย่าง 8.2 ในห้องทดลองแห่งหนึ่งมีโวลท์มิเตอร์เป็นจำนวนมาก วิศวกรไฟฟ้าอยากทราบว่าโวลท์มิเตอร์เหล่านี้สามารถวัดแรงเคลื่อนไฟฟ้าได้เหมือนกันหรือไม่ โดยการนำอุปกรณ์ไฟฟ้าที่ใช้ไฟฟ้า 100 โวลท์มาชิ้นหนึ่งมาวัดกับโวลท์มิเตอร์ที่สุ่มมาเป็นตัวอย่าง 4 เครื่อง ๆ ละ 5 ครั้ง ปรากฏข้อมูลดังนี้

โวลท์มิเตอร์	โวลเตจ				
A	0.9	1.1	0.8	0.9	0.4
B	0.2	0.9	1.0	0.6	0.3
C	0.8	0.7	0.7	0.4	0.0
D	0.4	0.1	0.3	0.2	0.0

จงทดสอบสมมุติฐาน ณ. ระดับนัยสำคัญ 5% พร้อมทั้งคำนวณหาค่า Π ถ้า $\sigma_\delta^2 = .09$

วิธีทำ จากข้อมูลเราสามารถเตรียมตารางวิเคราะห์ได้ดังนี้

โวลท์มิเตอร์	โวลเตจ					รวม
A	0.9	1.1	0.8	0.9	0.4	4.1
B	0.2	0.9	1.0	0.6	0.3	3.0
C	0.8	0.7	0.7	0.4	0.0	2.6
D	0.4	0.1	0.3	0.2	0.0	1.0
						10.7

$$CF = (10.7)^2/20 = 5.725$$

$$SSB = \frac{1}{5}(4.1^2 + 3^2 + 2.6^2 + 1^2) - 5.725 = 6.714 - 5.725 = .989$$

$$SST = (0.9^2 + 0.2^2 + \ldots + 0.4^2 + 0.3^2 + 0 + 0) - 5.725$$

$$= 8.01 - 5.725 = 2.285$$

$$SSW = SST - SSB = 2.285 - .989 = 1.296$$

ตาราง ANOVA ปรากฏดังนี้

ANOVA

$H_0 : \sigma^2_\delta = 0$ vs $H_1 : \sigma^2_\delta < 0$

SOV	df	SS	MS	F-Ratio	E(MS)
Between	3	.989	.3297	4.07	$\sigma^2_e + n_0\sigma^2_\delta$
Within	16	1.296	.081		σ^2_e
Total	19	2.285			

$$\sigma^2_e = .081,\ n_0\sigma^2_\delta = .3297 - .081 = .2487$$

$$n_0 = \frac{n^2 - \sum^{b} n_j^2}{n(b - 1)} = \{20^2 - (5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2)\}/\ 20 \times 3 = 5$$

ดังนั้น $\hat{\sigma}^2_\delta = .2484/5 = .0497$

ดังนั้น $E(MSB/MSW) = \dfrac{.081 + 5(.0497)}{.081} = 4.07 > 1$

ดังนั้นจึงเชื่อว่า $\sigma^2_\delta > 0$ และเพื่อให้สามารถตอบคำถามนี้ด้วยระดับความเชื่อมั่น จึงทดสอบด้วย F พบว่า $F_c = 4.07$ ขณะที่ $F_{3,16,95} = 3.24$ แสดงว่า $F_c > 3.24$ ดังนั้นจึงปฏิเสธสมมุติฐานหลัก ณ ระดับนัยสำคัญ 5% และเชื่อว่าโวลท์มิเตอร์ที่มีอยู่ทั้งหมดมิได้มีคุณภาพทัดเทียมกัน

ข. $\Pi(\sigma_\delta^2 = .09) = ?$

จาก
$$\Pi(\sigma_\delta^2) = \Pr\{F_{3,16} > \frac{\sigma_\delta^2 + \sigma_e^2}{a\sigma_\delta^2 + \sigma_e^2} \cdot F_{.95,3,16}\}$$
$$= \Pr\{F_{3,16} > \frac{0.09 + .081}{5(.09) + .081} (3.24)\}$$
$$= \Pr\{F_{3,16} > 1.043\}$$
$$= 1 - \Pr\{F_{3,16} < 1.043\}$$

ค่า $\Pr\{F_{3,16} < 1.043\}$ ไม่ปรากฏในตาราง จำเป็นต้องคำนวณค่าประมาณโดยอาศัย CLT ดังนี้ [1]

$$V(F) = \frac{2n^2(m + n - 2)}{m(n - 2)^2(n - 4)}, \quad E(F) = n/(n - 2)$$

$m = 3, n = 16$

ดังนั้น
$$V(F) = \frac{2(16)^2(3 + 16 - 2)}{3(16 - 2)^2(16 - 4)} = \frac{8704}{7056} = 1.233$$
$$\sigma_F = 1.111$$
$$E(F) = n/(n - 2) = 16/(16 - 2) = 1.43$$
$$\Pr\{F_{3,16} < 1.043\} \simeq \Pr\{Z < -.09\}$$
$$\simeq .4641$$
$$\Pi(\sigma_\delta^2 = 0.09) \simeq 1 - .4641 = .5359$$
$$= 53.59\%$$

[1] ดูตัวอย่างในตอน ง. หน้า 226-231

แบบฝึกหัด

1. สุ่มตัวอย่างจากกลุ่มประชากรปกติที่มีความแปรปรวนเดียวกันทั้งสิ้น k กลุ่ม กลุ่มละ n หน่วย จงทดสอบสมมุติฐาน

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = 0 \text{ vs } H_1 : \text{มีอย่างน้อย 1 คู่ไม่เท่ากับ 0}$$

2. สุ่มตัวอย่างเส้นใยไนล่อนจากเครื่องพ่นเส้นใย 3 เครื่องแล้ววัดความเหนียวของเส้นใย ปรากฏข้อมูลดังนี้

1	2	3
25	31	30
36	38	28
30	29	24
38	42	28
31	35	25

อยากทราบว่าเครื่องพ่นทั้งสามให้เส้นใยไนล่อนที่มีความเหนียวเท่ากันหรือไม่

3. ในการทดลองเพื่อเปรียบเทียบคุณภาพของน้ำมันหล่อลื่นเกรดต่าง ๆ ว่าช่วยลดความสึกหรอได้มากน้อยเพียงใด การทดลองดำเนินการโดยใช้สกรูชนิดเดียวกันมัดด้วยเส้นลวดแล้วหมุนเข้าออก โดยใช้น้ำมันหล่อลื่นเกรดต่าง ๆ หยอดให้คลายความฝืดหลังจากนั้นจึงนำสกรูมาชั่งน้ำหนักเพื่อบันทึกน้ำหนักที่สูญหายไปอันเนื่องจากการเสียดสี ผลการทดลองจากหน่วยทดลองที่จัดให้เข้ารับ treatment แต่ละชนิด 5 หน่วย เท่า ๆ กันปรากฏข้อมูลดังนี้

น้ำมันหล่อลื่น	น้ำหนักที่เสียไป (100 กรัม)				
A	1.78	1.56	1.62	1.68	1.71
B	1.63	1.59	1.56	1.70	1.64
C	1.58	1.47	1.42	1.38	1.36
D	1.42	1.30	1.19	1.21	1.23

ก. จงสร้างตาราง ANOVA

ข. น้ำมันหล่อลื่นเกรดต่าง ๆ ลดความสึกหรอได้ต่างกันหรือไม่

ค. น้ำมันหล่อลื่นมีผลในการลดความสึกหรอได้ต่าง ๆ กัน จงกะประมาณอิทธิพลของน้ำมันหล่อลื่นสูตร D

ง. ถ้าน้ำมันหล่อลื่นทั้งสามชนิดมีผลต่อการลดความเสียดสีได้เท่ากัน แต่ชนิดที่ 4 ลดความสึกหรอได้น้อยกว่าชนิดอื่น 200 กรัม อยากทราบว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนยืนยันความจริงนี้ถึง 90% หรือไม่ ให้ใช้ MSW เป็นค่าประมาณ σ_e^2

จ. จงใช้ Tukey's Procedure ตรวจดูว่าน้ำมันหล่อลื่นชนิดใดมีประสิทธิภาพต่างกัน

4. การทดลองเปรียบเทียบวิธีผลิตแผ่นเหล็กดีบุก 4 วิธีเพื่อศึกษาดูว่าวิธีผลิตใดเคลือบดีบุกผิดปกติ ปริมาณดีบุกที่เคลือบผิววัดเป็นกรัมโดยใช้วัดจากตัวอย่างเหล็กแผ่นเคลือบจากวิธีทั้ง 4 วิธีละ 20 แผ่น

จากประสบการณ์ในอดีตทราบว่า $\sigma_e^2 = 100$

ก. ท่านจะยอมรับสมมุติฐานหรือไม่ ถ้า SSB = 1,000

ข. ถ้าวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 เคลือบดีบุกได้ในปริมาณสูงกว่าวิธีที่ 3 และ 4 ถึง 10 กรัม อยากทราบว่าการวิเคราะห์ความแปรปรวนยืนยันความจริงนี้ได้ถึง 90% หรือไม่

ค. อยากทราบว่าควรสุ่มตัวอย่างโลหะมากี่แผ่นจึงจะสอดคล้องกับข้อ ก.

5. สุ่มตัวอย่างเครื่องเคลือบไขมา 4 เครื่องแต่ละเครื่องสุ่มตัวอย่างกระดาษไขมาเครื่องละ 8 แผ่น แล้ววัดปริมาณไข ปรากฏข้อมูลดังนี้

เครื่องเคลือบ	ปริมาณไข (กรัม)							
A	1.4	2.0	3.2	1.4	2.3	4.0	5.0	4.7
B	3.2	6.8	5.0	2.5	6.1	4.8	4.6	4.2
C	6.2	3.1	3.2	4.0	4.5	6.4	4.4	4.1
D	4.8	6.6	6.5	5.9	5.9	3.0	5.9	5.6

จงวิเคราะห์ความแปรปรวนและทดสอบสมมุติฐาน

6. ฝ่ายบริหารกำลังตัดสินใจเลือกใช้วิธีตรวจสอบคุณภาพเครื่องบรรจุขวด 2 วิธี โดยที่ต้องการให้ SSW มากกว่า SSB เป็น 2.2 เท่า แต่ละวิธีสุ่มตัวอย่างขวดมาเป็นตัวอย่าง 28 ขวด แล้วบันทึกปริมาณน้ำอัดลม คือ

1. สุ่มตัวอย่างเครื่องจักรกลมา 7 เครื่อง แต่ละเครื่องสุ่มตัวอย่างน้ำอัดลมมาเครื่องละ 4 ขวด

2. สุ่มตัวอย่างเครื่องจักรกลมา 4 เครื่องแต่ละเครื่องสุ่มตัวอย่างน้ำอัดลมมาเครื่องละ 7 ขวด

อยากทราบว่าวิธีไหนดีกว่ากัน

7. ต้องการเปรียบเทียบผลิตภาพของเครื่องจักร 4 เครื่องคือ A, B, C, D โดยแต่ละเครื่องทดลองใช้พนักงานคุมเครื่องที่มีความสามารถเท่ากัน 4 คน ผลการทดลองปรากฏดังนี้

เครื่องจักร	ผลผลิต				
A	47	37	44	41	36
B	40	45	49	45	44
C	48	48	41	43	41
D	39	37	37	44	41

อยากทราบว่าเครื่องจักรทั้ง 4 มีผลิตภาพต่างกันหรือไม่?

8. ให้ $Y_i \sim \chi^2(r_i, \theta_i)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันจงพิสูจน์ว่า

$$Z = \sum_{i}^{n} Y_i \sim \chi^2\left(\sum_{i}^{n} r_i , \sum_{i}^{n} \theta_i\right)$$

9. จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Y เมื่อ $Y \sim \chi^2 (r, \theta)$

10. จงหาค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม Y เมื่อ Y มีการแจกแจงแบบ Noncentral F มี df เท่ากับ r_1 และ r_2 เมื่อ $r_2 > 2$ และ Noncentrality Parameter เท่ากับ θ

11. จงพิสูจน์ว่า เมื่อตัวแปรสุ่ม Y มีการแจกแจงแบบ Noncentral T แล้ว Y^2 จะมีการแจกแจงแบบ Noncentral F

12. X_1 เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกับ X_2 และ $Y = X_1 + X_2$ โดยการกำหนดให้ $X_1 \sim \chi^2(r_1, \theta_1)$ และ $Y \sim \chi^2(r, \theta)$ เมื่อ $r > r_1$ และ $\theta \geqslant \theta_1$ จงแสดงให้เห็นว่า

$$X_2 \sim \chi^2 (r - r_1, \theta - \theta_1)$$

ข้อแนะนำ โจทย์ข้อ 8 - 12 อาศัยทฤษฎี 8.1 และ 8.2