บทที่ 6
ทฤษฎีความน่าจะเป็น (Probability Theory)

ในบทที่ 2-5 เป็นการศึกษาวิชาสถิติทางด้านสถิติพรรณาซึ่งส่วนใหญ่เราจะมุ่งถึงวิธีการที่จะรวบรวมข้อมูล การเสนอข้อมูล และการบรรยายลักษณะข้อมูลที่ได้ สำหรับในบทต่อไปนี้ เราจะพิจารณาถึงหัวเรื่องที่เกี่ยวกับสถิติอนุมาน (Statistical inference) ซึ่งเป็นวิธีการที่เลือกตัวอย่างของข้อมูล และการนำไปอ้างอิงเกี่ยวกับข้อมูลเบื้องต้นที่ตัวอย่างได้ถูกเลือกมา และในการที่จะศึกษาเรื่องสถิติอนุมานนั้น เราจำเป็นต้องใช้ทฤษฎีของความน่าจะเป็นเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งในที่นี้เราจะกล่าวถึง การตีความหมายความน่าจะเป็น และการคำนวณหาความน่าจะเป็น แต่ก่อนที่จะกล่าวถึงความหมายและการคำนวณหาความน่าจะเป็น จะขอกล่าวถึงความรู้บางอย่างที่จำเป็นจะต้องนำไปใช้ในเรื่องของทฤษฎีความน่าจะเป็น เช่น ทฤษฎีเซท (Set Theory) เทคนิคในการนับ (Counting Techniques)

6.1 ทฤษฎีเซท (Set Theory)

แนวความคิดเกี่ยวกับเรื่องเซทในวิชาคณิตศาสตร์มีบทบาทอย่างมากในการอธิบาย และคำนวณความน่าจะเป็นซึ่งในที่นี้จะขอกล่าวถึงทฤษฎีของเซทที่จำเป็นจะต้องนำไปใช้ในการคำนวณหาความน่าจะเป็นเท่านั้น

เซท (Set)

หมายถึง กลุ่มหรือชุดของสิ่งของบางสิ่งบางอย่างที่มีคุณสมบัติบางประการร่วมกัน และสิ่งของแต่ละสิ่งที่อยู่ในเซทเราจะเรียกว่า สมาชิก (element หรือ member) ของเซท เช่น เซทของนักศึกษาที่เรียนวิชา ST103 ดังนั้น เซทนี้จะประกอบไปด้วยนักศึกษาทุกคนที่เรียนวิชา ST103 และนักศึกษาแต่ละคนจะเรียกว่าเป็นสมาชิกของเซทนี้

สัญลักษณ์ที่ใช้

1. ใช้อักษรตัวใหญ่ เช่น A, B, C, . . . เขียนแทนเซท เช่น A เป็นเซทของเลขจำนวนเต็มบวกจาก 1 ถึง 100

2. ใช้อักษรตัวเล็ก เช่น a, b, c, . . . เขียนแทนสมาชิกของเซท เช่น B เป็นเซทที่ประกอบด้วย a, b, c, d เป็นต้น

3. $\in$ ใช้แทนคำว่า เป็นสมาชิกของเซท เช่น

$a \in A$ อ่านว่า a เป็นสมาชิกของเซท A

4. $\notin$ ใช้แทนคำว่า ไม่เป็นสมาชิกของเซท เช่น

$a \notin B$ อ่านว่า a ไม่เป็นสมาชิกของเซท B

5. / ใช้แทนคำว่า ซึ่ง

วิธีการเขียนเซท มี 2 วิธีคือ

1. เขียนสมาชิกทุก ๆ ตัวของเซทเรียงกันไปในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา เช่น

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

2. เขียนอักษรแทนสมาชิกทั้งหมดของเซท แล้วบรรยายคุณสมบัติของสมาชิกของเซทนั้นโดยคั่นด้วยเครื่องหมาย / โดยเขียนไว้ในเครื่องหมายวงเล็บปีกกาเช่นเดียวกับวิธีแรก เช่น

$$B = \{x/x \text{ คือนักศึกษาที่เรียนวิชา ST103}\}$$

อ่านว่า B เป็นเซทของ x ซึ่ง x คือนักศึกษาที่เรียนวิชา ST103

ชนิดของเซท

แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. เซทจำกัด (Finite Set)

คือเซทที่เราสามารถเขียนจำนวนสมาชิกทั้งหมดได้ เช่น เซทของคณะต่าง ๆ ในมหาวิทยาลัยรามคำแหง เซทของเลขจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 50 เป็นต้น

2. เซทอนันต์ (Infinite Set)

คือเซทที่เราไม่สามารถเขียนจำนวนสมาชิกทั้งหมดได้ เช่น เซทของเลขจำนวนจริงทั้งหมด

นิยามเกี่ยวกับเซทที่ควรทราบ

1. **เซทจักรวาล** (Universal Set)

คือเซทที่มีสมาชิกทั้งหมดอยู่ในกรอบที่เรากำลังศึกษาหรือสนใจ เขียน

สัญลักษณ์แทนด้วย "U" หรือ "S" ตัวอย่างเช่น ให้ U เป็นเซทของนักศึกษาราม-คำแหงทั้งหมด หรือ S เป็นเซทของผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้จากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ เป็นต้น

$\therefore$ U = {x/x คือนักศึกษารามคำแหงทั้งหมด}

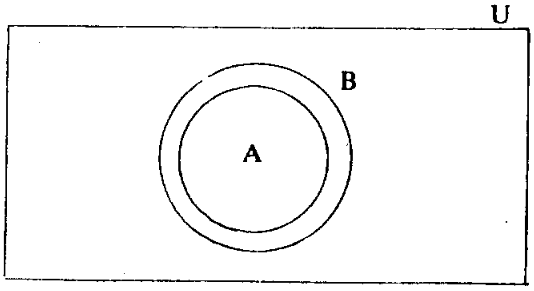
และ S = {(หัว,หัว,หัว),(หัว,หัว,ก้อย),(หัว,ก้อย,หัว),(หัว,ก้อย,ก้อย),(ก้อย,หัว,หัว),(ก้อย,หัว,ก้อย),(ก้อย,ก้อย,หัว),(ก้อย,ก้อย,ก้อย)}

2. **เซทที่ว่างเปล่า** (empty set หรือ null set)

คือเซทที่ไม่มีสมาชิกเลย เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย "$\varnothing$" หรือ {–} เช่น เซทของรากที่แท้จริงของสมการ $x^2 + 1 = 0$ จะเห็นว่าเซทนี้ไม่มีสมาชิกเลย เพราะรากที่แท้จริงของสมการดังกล่าวไม่มี เพราะฉะนั้นเซทนี้คือ empty set หรือ $\varnothing$ นั่นเอง

3. **เซทย่อย** (Subset)

ถ้าเรามีเซท 2 เซทคือเซท A และเซท B โดยที่เซท A มีจำนวนสมาชิกน้อยกว่า(หรือเท่ากับ) เซท B และถ้าสมาชิกทุก ๆ ตัวในเซท A ต่างก็เป็นสมาชิกของเซท B ด้วย เราเรียกว่าเซท A เป็นเซทย่อยของเซท B ใช้สัญลักษณ์ "$\subseteq$" แทนเซทย่อย ซึ่งจะเขียนได้ว่า $A \subseteq B$ และสามารถเขียนแผนภาพเวนน์ (Venn diagram) ได้ดังนี้



ตัวอย่างเช่น

ให้ A = {1,2, . . . ,10}

B = {2,4,6,8,10}

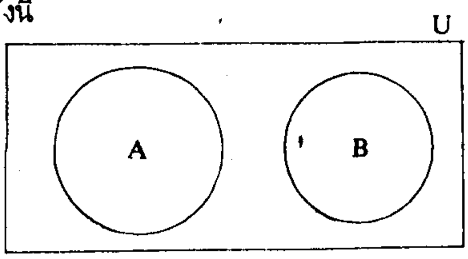
จะเห็นได้ว่า สมาชิกทุก ๆ ตัวในเซท B เป็นสมาชิกของเซท A ดังนั้น B เป็นเซทย่อยของ A หรือเขียนแทนด้วย

$$B \subseteq A$$

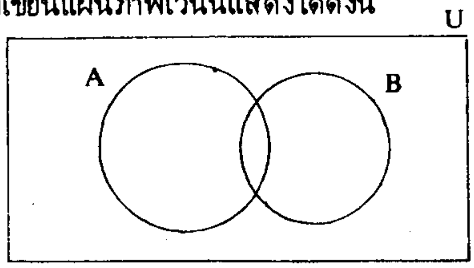
4. เซทที่ไม่ร่วมกัน (Disjoint Set)

เซท 2 เซทใด ๆ A และ B จะเรียกว่าเป็นเซทที่ไม่ร่วมกัน เมื่อเซททั้ง 2 นั้น ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

และเรามักจะเรียกเซทที่ไม่ร่วมกันว่าเป็น Mutually exclusive ซึ่งถ้าเขียนแผนภาพเวนน์แสดงได้ดังนี้



แต่ถ้าเซท 2 เซทใด ๆ มีสมาชิกร่วมกันเราเรียกว่าเซททั้งสองนั้นเป็นเซทที่ร่วมกัน (Joint set) ซึ่งเขียนแผนภาพเวนน์แสดงได้ดังนี้



5. **เซทที่เท่ากัน** (Equal set)

เซท 2 เซทใด ๆ A และ B จะเท่ากันเมื่อเซททั้ง 2 มีสมาชิกเหมือนกัน

เช่น

A = {นก,แมว,ไก่}

B = {ไก่,นก,แมว}

เซท A และเซท B มีสมาชิกเหมือนกัน ดังนั้น

A = B

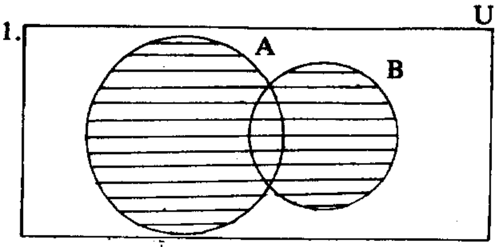
การรวมตัวของเซท (Set operation)

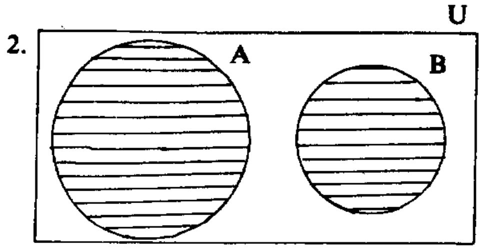
1. **ผลรวมของเซท** (Union)

ผลรวมของเซท 2 เซท A และ B คือเซทที่มีสมาชิกทั้งหมดเป็นของเซท A หรือเซท B หรือทั้งเซท A และเซท B เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย "A ∪ B" (อ่านว่า A ยูเนี่ยน B)

$\therefore$ $A \cup B = \{x/x \in A$ **หรือ** $x \in B\}$

เขียนแผนภาพเวนน์แสดงได้ดังนี้





ที่แรเงาคือ A ∪ B รูปแรกแสดง A ∪ B เมื่อ A และ B เป็น Joint set รูปที่สองแสดง A ∪ B เมื่อ A และ B เป็น Disjoint set

เช่น

$$A = \{1,2,3,4\}$$

$$B = \{2,4,6,8\}$$

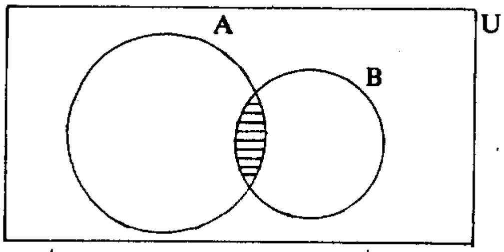
$$\therefore\ A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$$

2. ผลร่วมของเซท (Intersection)

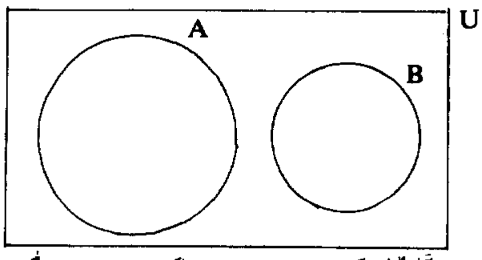
ผลร่วมของเซท 2 เซท A และ B คือเซทที่มีสมาชิกทั้งหมดเป็นของเซท A และเซท B เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย "A ∩ B" (อ่านว่า A อินเตอร์เซค B)

$$\therefore\ A \cap B = \{x/x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

เขียนแผนภาพเวนน์แสดงได้ดังนี้



เมื่อ A และ B เป็น Joint set ส่วนที่แรเงาคือ A ∩ B



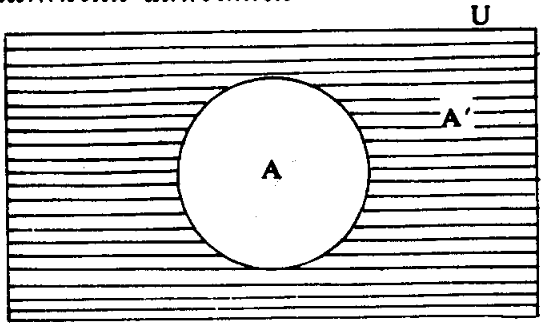
เมื่อ A และ B เป็น disjoint set จะเห็นว่าไม่มีสมาชิกของ A ∩ B ∴ A ∩ B = ∅

3. ส่วนเติมเต็ม (Complement)

ถ้าให้ A เป็นเซทย่อยของเซทจักรวาล เซทที่มีสมาชิกอยู่ใน U แต่สมาชิกนั้นไม่ได้อยู่ในเซท A เรียกเซทนั้นว่าเป็นส่วนเติมเต็มของเซท A และเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย "A′" (อ่านว่า A คอมพลิเม้นท์)

$$\therefore\ A' = \{x/x \notin A\}$$

เขียนแผนภาพเวนน์ แสดงได้ดังนี้



ตัวอย่างเช่น

ให้ $U = \{1,2,...,10\}$

$A = \{2,4,6,8,10\}$

$\therefore A' = \{1,3,5,7,9\}$

จะเห็นได้ว่า ถ้านำ A และ A′ มายูเนี่ยนกันจะได้เซทจักรวาล

$\therefore A \cup A' = U$

และถ้าเรานำ A และ A′ มาอินเตอร์เซคกันจะได้เซทว่าง

$\therefore A \cap A' = \varnothing$

พีชคณิตของเซท (Algebra of sets)

จากการรวมตัวของเซททั้ง 3 แบบข้างต้น ได้มีนักคณิตศาสตร์ค้นคว้าเรียบเรียงตั้งเป็นทฤษฎีและกฎต่าง ๆ ดังนี้

ถ้าให้ A,B และ C เป็นเซทใด ๆ ในเซทจักรวาลและมี ∅ เป็นเซทว่างแล้ว

1. **Identity laws:**

$A \cup \varnothing = A \; ; \; A \cap U = A$

$A \cup U = U \; ; \; A \cap \varnothing = \varnothing$

2. **Commutative laws:**

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

3. **Idempotent laws:**

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

4. **De Morgan's laws:**

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

5. **Complement laws:**

$$A \cup A' = U$$
$$A \cap A' = \varnothing$$
$$(A')' = A$$

6. **Associative laws:**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

7. **Distribution laws:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6.2 เทคนิคในการนับ (Counting techniques)

จะพิจารณาถึงการนับจำนวนสมาชิกในเซทหนึ่งหรือจำนวนผลการทดลองที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองหนึ่ง ๆ เพื่อที่จะนำไปคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นต่อไป เทคนิคในการนับจำนวนสมาชิกของเซทหนึ่ง ๆ นั้นเรามีอยู่ 3 วิธีด้วยกันคือ

1. การนับมูลฐาน (Basic counting)
2. การจัดลำดับ (Permutation)
3. การจัดกลุ่ม (Combination)

6.2.1 การนับมูลฐาน (Basic counting)

ทฤษฎีที่ 1

การทดลองใด ๆ ที่สามารถแยกการกระทำออกได้เป็น 2 ขั้นตอน โดยขั้นตอนแรกมีทางที่จะเกิดขึ้น n_1 หนทาง และแต่ละวิธีของการทดลองขั้นแรกจะเกิดการ

ทดลองในขั้นที่ 2 ได้ n_2 หนทาง ดังนั้นจำนวนผลการทดลองทั้งหมดที่จะเป็นไปได้จะมีจำนวน $n_1 \times n_2$ หนทาง

ตัวอย่างที่ 1

ในการทดลองโยนเหรียญ 2 ครั้ง จงหาจำนวนหนทางที่เกิดขึ้น

การโยนเหรียญ 2 ครั้งนี้เปรียบเสมือนการทดลองแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ 1 เป็นการโยนเหรียญครั้งที่หนึ่งซึ่งหนทางที่จะเกิดขึ้นมี 2 หนทาง คือได้หน้าหัว หรือได้หน้าก้อย

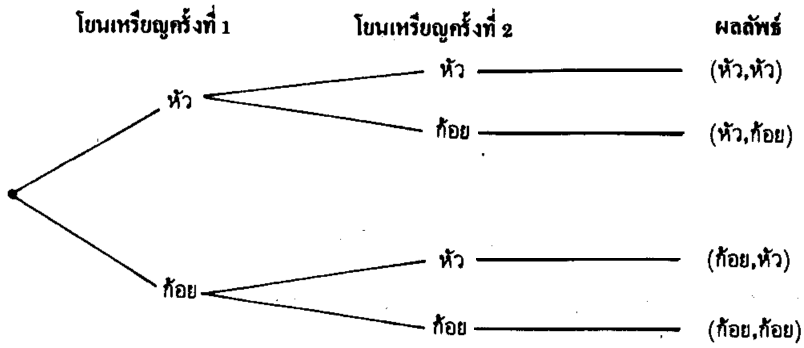
$\therefore$ จำนวนหนทางที่ได้ในการโยนเหรียญครั้งที่ 1 (n_1) = 2 หนทาง

ขั้นตอนที่ 2 เป็นการโยนเหรียญครั้งที่สอง ซึ่งหนทางที่จะเกิดขึ้นมี 2 หนทาง คือได้หน้าหัว หรือได้หน้าก้อย

$\therefore$ จำนวนหนทางที่ได้ในการโยนเหรียญครั้งที่ 2 (n_2) = 2 หนทาง

ดังนั้น จำนวนหนทางที่ได้ในการโยนเหรียญ 2 ครั้ง $= 2 \times 2 = 4$ หนทาง

ซึ่งสามารถเขียนแผนภาพพฤกษา (Tree Diagram) แสดงได้ดังนี้



ตอบ

ตัวอย่างที่ 2

นายวินัยต้องการเดินทางไปบ้านนายวินิจ ซึ่งการเดินทางครั้งนี้ นายวินัยจะต้องไปทางรถยนต์ แล้วไปนั่งเรือต่อ จึงจะถึงบ้านนายวินิจ ถ้าทางรถยนต์ที่จะไปนั้นมีรถโดยสาร รถส่วนตัว และรถแท็กซี่ ส่วนทางเรือนั้นมีเรือเร็วกับเรือพาย อยากทราบว่านายวินัยจะเลือกเดินทางไปบ้านนายวินิจได้กี่วิธี

การเดินทางไปบ้านนายวินิจ ประกอบไปด้วย 2 ขั้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ 1 นายวินัยเดินทางรถยนต์ซึ่งมี 3 วิธีด้วยกัน คืออาจจะนั่งรถโดยสาร หรือนั่งรถแท็กซี่ หรือขับรถส่วนตัว

∴ จำนวนหนทางที่จะเลือกเดินทางได้ $(n_1) = 3$ หนทาง

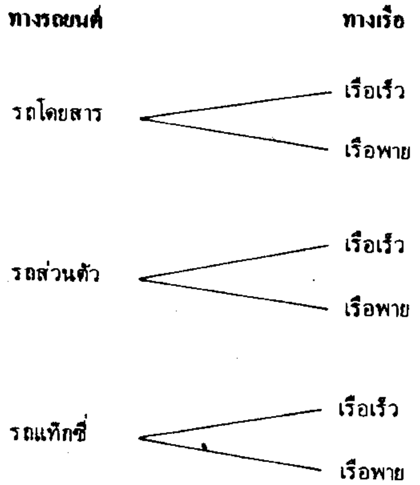
ขั้นตอนที่ 2 นายวินัยต้องไปนั่งเรือเพื่อไปบ้านนายวินิจซึ่งมี 2 วิธีคือ อาจจะนั่งเรือเร็ว หรือนั่งเรือพาย

∴ จำนวนหนทางที่จะเลือกเดินทางได้ $(n_2) = 2$ หนทาง

นั่นคือ นายวินัยจะเลือกเดินทางไปบ้านนายวินิจได้ $= 3 \times 2$ หนทาง

$= 6$ หนทาง

ซึ่งเขียนแสดงแผนภาพพฤกษา (Tree diagram) ได้ดังนี้



เช่น นายวินัยอาจจะขับรถส่วนตัวไปแล้วไปต่อเรือเร็ว หรืออาจจะนั่งรถโดยสารแล้วไปต่อเรือพาย เป็นต้น ซึ่งมีด้วยกัน 6 หนทาง

<u>ตอบ</u>

ผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดต่อไปนี้ เราจะใช้แทนด้วย "Sample Space" หรือ "S"

ในกรณีที่การทดลองหนึ่ง ๆ แบ่งออกเป็นหลาย ๆ ขั้นตอน การหาจำนวนหนทางทั้งหมดนั้นอาศัยบทแทรกของทฤษฎีที่ 1 ดังนี้

บทแทรกทฤษฎีที่ 1

ถ้าการทดลองหนึ่ง ๆ สามารถแยกการกระทำออกได้เป็น k ขั้นตอน ขั้นแรกมีทางที่จะเกิดขึ้นได้ n_1 หนทาง ขั้นที่ 2 มีทางที่จะเกิดขึ้นได้ n_2 หนทาง . . . . จนถึงขั้นที่ k มีทางที่จะเกิดขึ้นได้ n_k หนทาง ผลการทดลองทั้งหมดที่จะเป็นไปได้จะมีจำนวน $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ หนทาง

ตัวอย่างที่ 3

มีกล่องอยู่ 6 กล่อง แต่ละกล่องบรรจุลูกปัดสีต่าง ๆ กันดังนี้ กล่องที่ 1 มีลูกปัดสีแดง 10 ลูก กล่องที่ 2 มีลูกปัดสีขาว 5 ลูก กล่องที่ 3 มีลูกปัดสีเขียว 7 ลูก กล่องที่ 4 มีลูกปัดสีน้ำเงิน 9 ลูก กล่องที่ 5 มีลูกปัดสีเหลือง 4 ลูก และกล่องที่ 6 มีลูกปัดสีดำ 6 ลูก ถ้าหยิบลูกปัดจากแต่ละกล่องมากล่องละ 1 ลูก จะมีหนทางในการหยิบลูกปัดกี่หนทาง

การหยิบลูกปัดจากแต่ละกล่องเป็นการทดลองที่เราแบ่งได้เป็น 6 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หยิบลูกปัด 1 ลูกจากกล่องที่ 1 มีหนทาง = 10 หนทาง
ขั้นตอนที่ 2 หยิบลูกปัด 1 ลูกจากกล่องที่ 2 มีหนทาง = 5 หนทาง
ขั้นตอนที่ 3 หยิบลูกปัด 1 ลูกจากกล่องที่ 3 มีหนทาง = 7 หนทาง
ขั้นตอนที่ 4 หยิบลูกปัด 1 ลูกจากกล่องที่ 4 มีหนทาง = 9 หนทาง
ขั้นตอนที่ 5 หยิบลูกปัด 1 ลูกจากกล่องที่ 5 มีหนทาง = 4 หนทาง
ขั้นตอนที่ 6 หยิบลูกปัด 1 ลูกจากกล่องที่ 6 มีหนทาง = 6 หนทาง

$\therefore$ จำนวนหนทางที่จะหยิบลูกปัดจากกล่อง $= 10 \times 5 \times 7 \times 9 \times 4 \times 6$ หนทาง

$= 75{,}600$ หนทาง

<u>ตอบ</u>

6.2.2 การจัดลำดับ (Permutation)

นิยาม การจัดลำดับของสิ่งของต่าง ๆ คือการนำสิ่งของที่มีลักษณะแตกต่างกันมาจัดเรียงกัน โดยถือลำดับที่เป็นสิ่งสำคัญ และการเรียงลำดับในแต่ละแบบที่จัดได้ เราเรียกว่า "หนึ่งลำดับ"

ในการจัดเรียงลำดับสิ่งของต่าง ๆ นี้ อาจจะนำสิ่งของทั้งหมดมาจัดเรียง หรืออาจจะนำมาเพียงบางส่วนที่ต้องการมาจัดเรียงกันก็ได้ เช่น มีอักษรอยู่ 3 ตัว คือ A, B และ C

ก) นำอักษรทั้ง 3 ตัวนี้ มาจัดเรียงทีละ 3 ตัว จะทำได้ดังนี้ คือ

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB และ CBA

$\therefore$ จำนวนวิธีที่จัดเรียงลำดับได้ = 6 วิธี

แต่ละแบบที่เรียงได้ เราเรียกว่าเป็นหนึ่งลำดับ ดังนั้นในกรณีนี้ จะมีหนทางที่จัดลำดับได้เท่ากับ 6 ลำดับ

ข) นำอักษรทั้ง 3 ตัวนี้ มาจัดเรียงคราวละ 2 ตัว (นำมาเพียงบางส่วนที่เราต้องการคือ 2 ตัว) จะทำได้ดังนี้ คือ

AB, AC, BA, CA, BC และ CB

$\therefore$ จำนวนลำดับที่จัดได้ = 6 ลำดับ

ซึ่งการจัดเรียงลำดับสิ่งของต่าง ๆ เราได้มาจากทฤษฎีว่าด้วยการจัดลำดับ **(Permutation) ดังนี้**

ทฤษฎีที่ 1 (นำของ n สิ่งมาจัดเรียงคราวละ n สิ่ง)

ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง ที่มีลักษณะแตกต่างกัน จำนวนหนทางที่จะนำสิ่งของเหล่านี้มาจัดเรียงลำดับครั้งละ n สิ่งจะเท่ากับ n! หนทาง หรือเท่ากับ $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ หนทาง และเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย ${}^{n}P_{n}$

$\therefore \quad {}^{n}P_{n} = n!$

ซึ่ง $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

เช่น $3! = 3 \times (3-1) \times (3-2) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

ทฤษฎีที่ 2 (การนำสิ่งของ n สิ่ง มาจัดเรียงลำดับคราวละ r สิ่ง โดยที่ $r < n$)

ถ้ามีของอยู่ n สิ่งที่มีลักษณะแตกต่างกัน จำนวนหนทางที่จะนำสิ่งของเหล่านี้มาจัดเรียงลำดับคราวละ r สิ่ง จะเท่ากับ

$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ .\ .\ .\ \times(n-r+1)$ หนทาง และเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $^{n}P_{r}$ ซึ่ง $^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

ตัวอย่างที่ 1

จะจัดลำดับความนิยมของผู้ใช้ยาสีฟันซึ่งมีทั้งหมด 4 ชนิดดังนี้คือคอลเกต ซื่อสัตย์ ใกล้ชิด และดาร์กี้ ได้กี่แบบ

$\therefore$ การจัดลำดับความนิยมของผู้ใช้ยาสีฟันทั้ง 4 ชนิดนี้จะจัดได้ $= {^{4}P_{4}}$ แบบ

$= 4!$ แบบ

$= 4\times3\times2\times1$

$= 24$ แบบ

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2

จงหาจำนวนวิธีเรียงลำดับของหนังสือ 7 เล่มที่ไม่ซ้ำกันเลยโดยนำมาจัดเรียงคราวละ 3 เล่ม

$\therefore$ จำนวนวิธีเรียงลำดับหนังสือ $= {^{7}P_{3}}$ วิธี

$= \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!}$ วิธี

$= \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}$ วิธี

$= 7\times6\times5 = 210$ วิธี

ตอบ

นิยามและสัญลักษณ์ของแฟกตอเรียล

n แฟกตอเรียล (n - factorial)

คือผลคูณของเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ n ลงไปจนถึง 1 และเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย n! หรือ $\underline{|n}$

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ .\ .\ .\ \times3\times2\times1$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$1! = 1$$

$$2! = 2\times 1 = 2\times 1! = 2$$
$$3! = 3\times 2\times 1 = 3\times 2! = 6$$
$$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 5\times 4! = 120$$

ข้อสังเกต

1. $$20! = 20\times 19!$$
$$100! = 100\times 99!$$
$$(n+1)! = (n+1)\times n!$$

$\therefore$ เราสามารถเขียน $n! = n\times(n-1)!$

หรือ $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times \ldots \times(n-r+1)\times(n-r)!$

ถ้า r เป็นเลขจำนวนเต็มที่มีค่าอยู่ระหว่าง 1 กับ n และถ้าหารทั้ง 2 ข้าง ด้วย $(n-r)!$ จะได้

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times \ldots \times(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$\therefore \frac{n!}{(n-r)!} = n\times(n-1)\times(n-2)\times \ldots \times(n-r+1)$$

จาก $n! = n\times(n-1)!$

ถ้าให้ $n = 1$ จะได้

$$1! = 1\times(1-1)!$$
$$1 = 1\times 0!$$
$$\therefore 0! = 1$$

2. $${}^{n}P_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$$

หมายความว่ามีสิ่งของอยู่ n สิ่งและไม่จัดเรียง จึงจัดเรียงไว้ 1 วิธีเท่านั้น

$${}^{n}P_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

หมายความว่า มีสิ่งของอยู่ n สิ่ง นำมาจัดเรียงคราวละ 1 สิ่ง จึงจัดเรียงได้ n วิธี

การจัดลำดับที่กล่าวถึงข้างต้นนั้นเป็นการเรียงลำดับในแนวตรง สำหรับการเรียงลำดับเป็นวงกลมเราก็สามารถจัดทำได้ โดยเราพิจารณาการจัดครบรอบในทิศทางเดียวกัน และสิ่งที่อยู่ในตำแหน่งข้างเคียงว่ามีของสิ่งใดตามด้วยอะไรบ้าง โดยไม่สนใจว่าจุดเริ่มต้นจะอยู่ที่ใดของวงกลม ดังนั้นในการจัดลำดับเป็นวงกลมเราจะต้องยึดตำแหน่งใด ตำแหน่งหนึ่งคงที่ไว้แน่นอน ส่วนตำแหน่งอื่น ๆ สามารถจัดสิ่งของได้โดยจะสลับที่กันอย่างไรก็ได้

$\therefore$ ถ้ามีตำแหน่งอยู่ n ตำแหน่ง มีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ตำแหน่งที่ 1 ซึ่งจะเป็นตำแหน่งใดก็ได้ ต้องยึดให้คงที่ไว้ ดังนั้นจะเหลือตำแหน่งอยู่เพียง $(n-1)$ ตำแหน่งสำหรับสิ่งของ $(n-1)$ สิ่ง ซึ่งจำนวนวิธีที่จะจัดสิ่งของ $(n-1)$ สิ่ง เรียงในตำแหน่งที่มีอยู่ $(n-1)$ ตำแหน่งได้ เท่ากับ ${}^{(n-1)}P_{(n-1)} = (n-1)!$ วิธี

นั่นคือ ถ้ามีของอยู่ n สิ่ง นำมาจัดเรียงเป็นวงกลมจะจัดได้เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

ทฤษฎีว่าด้วยการจัดลำดับเป็นวงกลม

ทฤษฎีที่ 1

นำของ n สิ่ง ที่มีลักษณะแตกต่างกันมาจัดลำดับเป็นวงกลม จำนวนลำดับที่จัดได้จะเท่ากับ $(n-1)!$

ทฤษฎีที่ 2

นำของ r สิ่งจากสิ่งของที่มีลักษณะแตกต่างกัน n สิ่ง $(r < n)$ มาจัดลำดับเป็นวงกลม จำนวนหนทางที่จะจัดลำดับได้จะเท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)! \times r}$

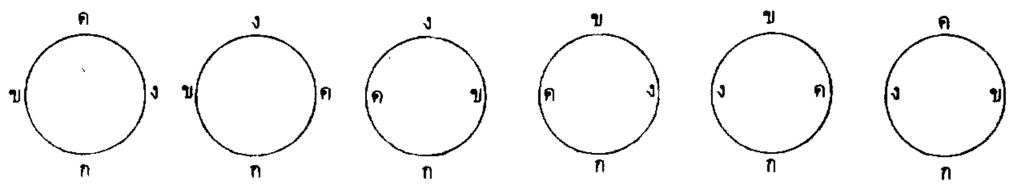
ตัวอย่างที่ 1

จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดให้คน 4 คน คือนาย ก, ข, ค และ ง นั่งล้อมวงสนทนากัน

$\therefore$ จำนวนวิธีที่จะจัดที่นั่งให้คน 4 คน $= (4-1)! = 3!$ วิธี

$= 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

ซึ่งเขียนแผนภาพ แสดงได้ดังนี้



ซึ่งได้แก่ กขคง กขงค กคงข กคขง กงขค และ กงคข

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2

มีต้นฝรั่งอยู่ 20 ต้น นำไปปลูกรอบสระรูปวงกลมจะมีหนทางที่จะจัดปลูกได้กี่วิธี และถ้าเลือกมาปลูกเพียง 10 ต้นเท่านั้น จะมีหนทางที่จะจัดปลูกได้กี่วิธี

$\therefore$ จำนวนวิธีที่จะนำต้นฝรั่ง 20 ต้นปลูกรอบสระ $= (20-1)!$ วิธี

$= 19!$ วิธี

ตอบ

$\therefore$ จำนวนวิธีที่จะนำต้นฝรั่ง 20 ต้นโดยนำไปปลูกรอบสระเพียง 10 ต้น

$$= \frac{20!}{(20-10)! \times 10} \text{ วิธี}$$

$$= \frac{20!}{10! \times 10} \text{ วิธี}$$

ตอบ

การจัดลำดับในกรณีที่ของบางอย่างมีลักษณะเหมือนกัน

เราจะเริ่มด้วยการพิจารณาตัวอย่างของการจัดลำดับตัวเลข 4 ตัว คือ 3332 โดยมีหมายเลข 3 อยู่ 3 ตัว และหมายเลข 2 อยู่ 1 ตัว ซึ่งเราสามารถจัดลำดับได้ 4 ลำดับ ดังต่อไปนี้

3332 3323 3233 2333

ในแต่ละลำดับที่จัดได้นี้ ถ้าเราให้หมายเลข 3 ที่มีอยู่ 3 ตัวนั้นมีลักษณะแตกต่างกัน โดยเขียนแทนด้วย 3_1 , 3_2 และ 3_3 การจัดลำดับหมายเลข 3_1 , 3_2 , 3_3 และ 2 จะสามารถจัดได้ถึง 4! หนทาง ดังต่อไปนี้

$23_13_23_3$	$23_13_33_2$	$23_23_33_1$	$23_23_13_3$
$23_33_13_2$	$23_33_23_1$	$3_123_23_3$	$3_123_33_2$
$3_223_13_3$	$3_223_33_1$	$3_323_13_2$	$3_323_23_1$
$3_13_223_3$	$3_23_123_3$	$3_13_323_2$	$3_33_123_2$
$3_23_323_1$	$3_33_223_1$	$3_13_23_32$	$3_13_33_22$
$3_23_33_12$	$3_23_13_32$	$3_33_13_22$	$3_33_23_12$

ซึ่งจะได้ถึง 24 วิธี ถ้าเราลบ subscrips ออกจาก 3_1 , 3_2 และ 3_3 จะเห็นว่าการจัดลำดับของ

$23_13_23_3$ $23_13_33_2$ $23_23_33_1$ $23_23_13_3$ $23_33_13_2$ และ $23_33_23_1$

จะไม่แตกต่างกันเลย ซึ่งจะเหลือเป็นลำดับเดียวคือ 2333 เช่นเดียวกัน การจัดลำดับของ $3_123_23_3$ $3_123_33_2$ $3_223_13_3$ $3_223_33_1$ $3_323_13_2$ $3_323_23_1$ ก็จะคือ 3233 เป็นต้น ดังนั้น จำนวนการจัดลำดับจะลดลงจาก 24 ลำดับเหลือเพียง 4 ลำดับเท่านั้นที่แตกต่างกัน

ซึ่งการจัดลำดับเหล่านี้ก็เหมือนกับการจัดลำดับของสิ่งของที่มี 2 กลุ่ม คือ กลุ่มของหมายเลข 3 ซึ่งมีอยู่ 3 ตัว และกลุ่มของหมายเลข 2 ซึ่งมีอยู่ 1 ตัว ดังนั้น เราสามารถนำมาจัดลำดับได้เท่ากับ $3! \times 1!$ ลำดับ

แต่ถ้าเรามาพิจารณาการจัดลำดับโดยถือเสมือนว่าตัวเลขทั้ง 4 ตัวนี้แตกต่างกันหมด เราจะจัดได้เท่ากับ $4! = 24$ ลำดับ ในเมื่อการจัดลำดับของหมายเลขทั้ง 4 ตัว เราสามารถจัดได้เท่ากับ 4 ลำดับ ดังนั้น เมื่อกำหนดว่าแต่ละหมายเลขแตกต่างกันแล้ว สามารถนำแต่ละลำดับมาจัดได้เท่ากับ $1! \times 3!$ ลำดับ เราจึงกล่าวได้ว่า

จำนวนลำดับของหมายเลข 4 ตัวที่แตกต่างกัน $= 4 \times 1! \times 3! = 24$ ลำดับ ซึ่งตรงกับที่ได้คำนวณไว้ คือ 4!

$\therefore$ จำนวนลำดับของหมายเลข 2,3,3,3 $= \frac{4!}{1!3!} = 4$ ลำดับ

ทฤษฎี การจัดลำดับในกรณีที่ของบางอย่างมีลักษณะเหมือนกัน

มีของอยู่ n สิ่ง ซึ่งแบ่งออกได้เป็นสองพวก แต่ละพวกมีลักษณะเหมือนกันทุกประการ พวกแรกมีจำนวน n_1 สิ่ง และพวกที่สอง มีจำนวน n_2 สิ่ง $(n_1+n_2 = n)$ ถ้าเอาของ n สิ่งนี้มาจัดลำดับจะมีหนทางจัดได้เท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!}$ ลำดับ และเขียนสัญลักษณ์แทนด้วย ${}^{n}P_{(n_1,n_2)}$

บทแทรก มีของอยู่ n สิ่ง แบ่งออกเป็น k จำพวก $(k \geqslant 2)$ แต่ละพวกมีลักษณะเหมือนกัน และมีจำนวน $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ตามลำดับ $(n_1+n_2+\ldots+n_k = n)$ นำของ n สิ่งนี้ มาจัดลำดับจะมีหนทางจัดได้เท่ากับ

$${}^{n}P_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\ldots\times n_k!}$$

ตัวอย่างที่ 1

เอาอักษรในคำ "Probability" มาจัดลำดับจะมีหนทางจัดได้กี่แบบ

จากโจทย์ $n=11$, $n_1=1$, $n_2=1$, $n_3=1$, $n_4=2$, $n_5=1$, $n_6=2$, $n_7=1$, $n_8=1$, และ $n_9=1$

$\therefore$ จำนวนลำดับที่จัดได้ $= \frac{11!}{1!\times1!\times1!\times2!\times1!\times2!\times1!\times1!\times1!}$

$= \frac{11!}{2\times2}$

$= \frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times2\times1}{4}$ หนทาง

$= 11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times2$ หนทาง

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2

กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกปัดที่มีขนาดเท่ากัน แต่สีต่างกันรวม 10 ลูก นำลูกปัดเหล่านี้มาจัดเรียงลำดับเป็นแถว ถ้าลูกปัดเป็นสีดำ 4 ลูก และสีแดง 6 ลูก จะจัดเรียงลำดับได้เท่าใด

จากโจทย์ $n = 10$, $n_1 = 4$, $n_2 = 6$

$\therefore$ จะจัดลำดับได้ $= {}^{10}P_{(4,6)}$ ลำดับ

$= \dfrac{10!}{4! \times 6!}$ ลำดับ

$= \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ ลำดับ

$= 10 \times 3 \times 7 = 210$ ลำดับ

ตอบ

6.2.3 การจัดหมู่ (Combination)

หมายถึงการนำสิ่งของที่มีลักษณะแตกต่างกันทั้งหมดหรือเพียงบางส่วนมาจัดหมู่ โดยไม่คำนึงถึงลำดับการเลือกก่อนหรือหลัง แต่ละแบบที่เลือกได้เราเรียกว่า "หนึ่งหมู่" เช่น มีลูกปัด 5 ลูก มีหมายเลข 1,2,3,4 และ 5 ต้องการนำลูกปัดเหล่านี้มาจัดหมู่ครั้งละ 2 ลูก จะได้ดังนี้คือ

(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)

ซึ่งมี 10 แบบด้วยกัน ซึ่งถ้าเราจะเปรียบเทียบการจัดหมู่ของลูกปัด 5 ลูก โดยนำมาจัดหมู่คราวละ 2 ลูก กับการเรียงลำดับของลูกปัด 5 ลูก โดยนำมาเรียงลำดับคราวละ 2 ลูก เราสามารถจัดเรียงได้ ${}^{5}P_2 = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$ แบบ จะเห็นได้ว่า ในแต่ละแบบของการจัดหมู่สามารถจัดเป็นลำดับได้ 2! (เท่ากับ 2) ลำดับ เช่น ใน 1 แบบของการจัดหมู่คือ (1,3) นำมาจัดเรียงลำดับได้ 2! (เท่ากับ 2) ลำดับดังนี้คือ (1,3) และ (3,1)

แสดงว่าในแต่ละแบบหรือแต่ละหมู่ของการจัดหมู่ลูกปัด 2 ลูกโดยเลือกจาก 5 ลูก ก็คือ 2! หรือ 2 ลำดับของการจัดเรียงลำดับลูกปัด 2 ลูกนั่นเอง ดังนั้นจะได้ว่า

$2! \times$ จำนวนแบบของการจัดหมู่ = จำนวนแบบของการเรียงลำดับ

หรือเขียนในรูปทั่ว ๆ ไปได้ดังนี้

$r! \times$ จำนวนแบบของการจัดหมู่ = จำนวนแบบของการเรียงลำดับ

ทฤษฎีว่าด้วยการจัดหมู่

เลือกของ r สิ่งจากสิ่งของที่มีลักษณะแตกต่างกัน n สิ่ง มาจัดเป็นหมู่ จำนวนหมู่ที่จะจัดได้จะเท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!r!}$ หรือใช้สัญลักษณ์แทนด้วย ^nC_r หรือ $\binom{n}{r}$

$$\therefore\ {}^nC_r \text{ หรือ } \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ตัวอย่างที่ 1

ในการสอบวิชา ST103 มีข้อสอบทั้งหมด 10 ข้อ ให้นักศึกษาเลือกทำ 8 ข้อ นักศึกษาจะมีหนทางเลือกทำได้กี่แบบ

$\therefore$ จำนวนหนทางที่นักศึกษาจะเลือกทำได้ $= {}^{10}C_8$ แบบ

$= \frac{10!}{(10-8)!8!}$ แบบ

$= \frac{10\times 9}{2\times 1} = 5\times 9$ แบบ

$= 45$ แบบ

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดจุด 10 จุดบนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง จงหาจำนวนรูป 6 เหลี่ยม ที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอดมุม

$\therefore$ จำนวนรูป 6 เหลี่ยม $= {}^{10}C_6$ รูป

$= \frac{10!}{(10-6)!6!}$ รูป

$= \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} = 10\times 3\times 7$ รูป

$= 210$ รูป

ตัวอย่างที่ 8

ในชุมนุมชนแห่งหนึ่งมีครัวเรือนอยู่ทั้งหมด 200 ครัวเรือน ต้องการเลือกมาสัมภาษณ์เพียง 10 ครัวเรือน จำนวนหนทางที่จะเลือกครัวเรือนมาสัมภาษณ์จะเลือกได้กี่วิธี

$\therefore$ จำนวนหนทางที่จะเลือกได้ $= {}^{200}C_{10}$ วิธี

$= \dfrac{200}{(200-10)!10!}$ วิธี

การจัดหมู่กรณีที่สิ่งของ n สิ่งแยกได้เป็นหลาย ๆ ประเภท

มีของ n สิ่งแบ่งออกได้เป็น k จำพวก แต่ละพวกมีสิ่งของที่แตกต่างกัน โดยให้พวกที่ 1 มี n_1 สิ่ง พวกที่ 2 มี n_2 สิ่ง , . . . พวกที่ k มี n_k สิ่ง เลือกของจากแต่ละจำพวกมา $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ตามลำดับ โดยที่ $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$ มาจัดหมู่ จำนวนหมู่ที่จัดได้จะเท่ากับ

$${}^{n_1}C_{r_1} \cdot {}^{n_2}C_{r_2} \cdot {}^{n_3}C_{r_3} \;.\;.\;.\;.\;.\; {}^{n_k}C_{r_k}$$

ตัวอย่างที่ 1

ประธานนักเรียนต้องการเลือกกรรมการชุดหนึ่งโดยให้เป็นเด็กผู้ชาย 5 คน และเด็กผู้หญิง 3 คน ถ้าประธานนักเรียนมีรายชื่อผู้สมัครที่เป็นเด็กผู้ชาย 10 คน และเป็นเด็กผู้หญิง 7 คน จงหาจำนวนหนทางที่ประธานนักเรียนจะเลือกกรรมการดังกล่าว

จำนวนหนทางที่จะเลือกกรรมการที่เป็นเด็กผู้ชาย 5 คน จาก 10 คน

$= {}^{10}C_5 = \dfrac{10!}{5!5!}$ วิธี

$= \dfrac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}$ วิธี

$= 252$ วิธี

จำนวนหนทางที่จะเลือกกรรมการที่เป็นเด็กผู้หญิง 3 คน จาก 7 คน

$$= \quad {}^{7}C_3 \quad = \quad \frac{7!}{(7-3)!3!} \quad \text{วิธี}$$

$$= \quad \frac{7!}{4!3!} \quad \text{วิธี}$$

$$= \quad \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \quad = \quad 7\times5 \quad = \quad 35 \quad \text{วิธี}$$

$\therefore$ จำนวนหนทางที่จะเลือกกรรมการให้เป็นเด็กผู้ชาย 5 คน และเด็กผู้หญิง 3 คน $= (252)(35) = 8820$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2

ในการจัดอาหารมื้อเย็น มีอาหารประเภทเนื้อและปลาอย่างละ 5 ชนิด และสลัด 3 ชนิด จะมีหนทางที่จะจัดอาหารมื้อเย็น โดยให้มีอาหารประเภทเนื้อ 2 ชนิด ปลา 2 ชนิด และสลัด 1 ชนิด ได้กี่แบบ

จำนวนหนทางที่จะเลือกอาหารประเภทเนื้อ 2 ชนิดจาก 5 ชนิด

$$= \quad \binom{5}{2} \quad = \quad \frac{5!}{3!2!} \quad \text{แบบ}$$

$$= \quad \frac{5\times4}{2\times1} \quad = \quad 10 \quad \text{แบบ}$$

จำนวนหนทางที่จะเลือกอาหารประเภทปลา 2 ชนิดจาก 5 ชนิด

$$= \quad \binom{5}{2} \quad = \quad \frac{5!}{3!2!} \quad \text{แบบ}$$

$$= \quad \frac{5\times4}{2\times1} \quad = \quad 10 \quad \text{แบบ}$$

จำนวนหนทางที่จะเลือกอาหารประเภทสลัด 1 ชนิดจาก 3 ชนิด

$$= \quad \binom{3}{1} \quad = \quad \frac{3!}{2!1!} \quad \text{แบบ}$$

$$= \quad 3 \quad \text{แบบ}$$

$\therefore$ จำนวนหนทางทั้งหมดที่จะเลือกได้ $= 10\times10\times3 = 300$ แบบ

ตัวอย่างที่ 3

จงหาจำนวนหนทางที่จะหยิบไพ่ 7 ใบจากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ ให้ได้รูปคิง 2 ใบ รูปแจ๊ค 2 ใบ นอกนั้นเป็นไพ่อื่น ๆ

จำนวนหนทางที่จะหยิบได้รูปคิง 2 ใบจากรูปคิงทั้งหมด 4 ใบ

$$= \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!}$$

$$= \frac{4\times 3}{2} = 6 \text{ วิธี}$$

จำนวนหนทางที่จะหยิบได้รูปแจ๊ค 2 ใบจากรูปแจ๊คทั้งหมด 4 ใบ

$$= \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!}$$

$$= \frac{4\times 3}{2} = 6 \text{ วิธี}$$

จำนวนหนทางที่จะหยิบได้ไพ่อื่น ๆ $(7-4) = 3$ ใบจากไพ่ $(52-8) = 44$ ใบ

$$= \binom{44}{3} = \frac{44!}{41!3!}$$

$$= \frac{44\times 43\times 42}{6} = 44\times 43\times 7 \text{ วิธี}$$

$\therefore$ จำนวนหนทางทั้งหมด $= 6\times 6\times 44\times 43\times 7$ วิธี

$= 476{,}784$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4

ในการลงทะเบียนในภาคฤดูร้อน กำหนดว่านักศึกษาจะลงทะเบียนได้ไม่เกิน 12 หน่วยกิต นักศึกษารัฐศาสตร์ผู้หนึ่งต้องการลงทะเบียนเรียน 4 วิชา (12 หน่วยกิต) โดยคิดว่าจะเรียนวิชารัฐศาสตร์ 2 วิชา วิชากฎหมาย 1 วิชา และวิชาภาษาอังกฤษ 1 วิชา ถ้าในภาคเรียนนี้มีวิธีให้นักศึกษารัฐศาสตร์เลือกเรียนได้ 4 วิชา คือ วิชากฎหมายมีให้เลือก 3 วิชา และวิชาภาษาอังกฤษมีให้เลือก 2 วิชา เขาจะเลือกลงทะเบียนเรียนได้กี่หนทาง

จำนวนหนทางที่เขาจะเลือกเรียนวิชารัฐศาสตร์ 2 วิชาจาก 4 วิชา

$$= \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!}$$

$$= \frac{4\times3}{2} = 6 \text{ วิธี}$$

จำนวนหนทางที่จะเลือกเรียนวิชากฎหมาย 1 วิชาจาก 3 วิชา

$$= \binom{3}{1} = \frac{3!}{2!1!}$$

$$= 3 \text{ วิธี}$$

จำนวนหนทางที่จะเลือกเรียนวิชาภาษาอังกฤษ 1 วิชาจาก 2 วิชา

$$= \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!}$$

$$= 2 \text{ วิธี}$$

$\therefore$ จำนวนหนทางที่เขาจะเลือกลงทะเบียนได้ $= 6\times3\times2 = 36$ วิธี

6.3 การทดลอง (Trial)

ข้อมูลทางสถิตินั้นเราได้มาจากการทดลอง ซึ่งแบ่งเป็น 2 อย่างด้วยกัน คือ

1. การทดลองที่ทราบผลแน่นอน (Deterministic trial)

เป็นการทดลองที่ผลการทดลอง (outcome) เราสามารถทราบได้แน่นอน การทดลองประเภทนี้ ส่วนมากจะเป็นการทดลองทางด้านวิทยาศาสตร์ ซึ่งเราจะไม่นำมาพิจารณาในเรื่อง ความน่าจะเป็น ตัวอย่างเช่น โยนของจากที่สูง ของนั้นจะต้องตกลงพื้นแน่นอน หรือนำเงินไปฝากธนาคาร 1,000 บาท ได้ดอกเบี้ยร้อยละ 12 พอสิ้นปี เราจะได้เงิน 1,000 + 120 = 1,120 บาท เป็นต้น

2. การทดลองที่ไม่ทราบผลแน่นอน หรือการทดลองเชิงสุ่ม
(Nondeterministic trial or Random trial)

เป็นการทดลองที่ผลการทดลอง (outcome) เราไม่ทราบได้แน่นอน การทดลองประเภทนี้เราเรียกว่า การทดลองเชิงสุ่ม เช่น ในวันนี้ ไม่ทราบว่าฝนจะตกหรือ

ไม่ตก เปิดร้านอาหารขณะนี้ ไม่ทราบว่าจะกำไรหรือขาดทุน หยิบลูกปัด 1 ลูกจากกล่องที่มีลูกปัด 20 ลูก ก็ไม่ทราบว่าจะหยิบได้ลูกไหน เป็นต้น การทดลองประเภทนี้ เป็นการทดลองที่เราสนใจที่จะนำมาคำนวณหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์ต่าง ๆ ว่าจะเป็นเท่าใด

6.4 กลุ่มผลการทดลอง (Sample Space)

ในการทดลองหนึ่ง ๆ ผลลัพธ์ (outcome) ที่จะพึงเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองนั้น เราเรียกว่า กลุ่มผลการทดลอง (Sample Space) ใช้สัญลักษณ์ แทนด้วย "S" สมาชิกของกลุ่มผลการทดลองแต่ละตัวเรียกว่า outcome หรือ Sample point

กลุ่มผลการทดลอง มี 2 ชนิดด้วยกัน คือ

1. Finite Sample Space

คือกลุ่มผลการทดลองที่มีจำนวน Sample point ที่สามารถนับได้ หรือ คือกลุ่มผลการทดลองที่เป็นไฟไนท์เซท

2. Infinite Sample Space

คือกลุ่มผลการทดลองที่เป็นอินไฟไนท์เซท

สำหรับในวิชานี้เราจะศึกษาเฉพาะกลุ่มผลการทดลองที่เป็น Finite Sample Space

จากความหมายของ Sample Space จะเห็นว่า Sample Space ก็เป็นเซท ๆ หนึ่งนั่นเอง คือเป็นเซทของผลลัพธ์ที่จะพึงเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองหนึ่ง ๆ ซึ่งเราเขียนแสดงได้ดังนี้ ถ้าให้ผลลัพธ์แต่ละผลลัพธ์เป็น o_i และมีทั้งหมด n ผลลัพธ์ด้วยกัน

$$\therefore\ S = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$$

ดังนั้นก่อนที่จะหา Sample Space ของการทดลองได้ เราต้องศึกษาการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ ก่อนว่าเป็นการทดลองเรื่องอะไรและพิจารณาดูว่าผลลัพธ์ที่จะพึงเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ จะเป็นอะไรได้บ้าง

ตัวอย่างที่ 1

การทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์การทดลองที่จะเป็นไปได้จะมี 2 อย่างด้วยกันคือ โยนแล้วอาจจะหงายหัว (H) หรือโยนแล้วอาจจะหงายก้อย (T)

$$\therefore\ S = \{H,T\}$$

ตัวอย่างที่ 2

การสอบวิชา ST103 เกรดที่นักศึกษา 2,000 คนจะได้มี 3 เกรดด้วยกัน คือ G, P และ F

$$\therefore\ S = \{G,P,F\}$$

ซึ่งใน Sample Space นี้จะมี Sample point หรือจำนวน outcome ออกมาเท่ากับจำนวนนักศึกษา 2,000 คน

ตัวอย่างที่ 3

โยนเหรียญ 3 ครั้ง

ผลการทดลองที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดจะมี 8 อย่างด้วยกัน

$$\therefore\ S = \{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$$

ตัวอย่างที่ 4

โยนลูกเต๋า 1 ลูก (มี 6 หน้า)

ผลการทดลองที่จะเป็นไปได้จะมี 6 อย่างด้วยกัน

$$\therefore\ S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ตัวอย่างที่ 5

โยนลูกเต๋า 2 ลูก

ผลการทดลองที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดจะมี 36 อย่างด้วยกัน

ถ้าให้ตำแหน่งที่ 1 เป็นผลลัพธ์ที่ได้มาจากการโยนลูกที่ 1 และตำแหน่งที่ 2 เป็นผลลัพธ์ที่ได้มาจากการโยนลูกที่ 2

$\therefore$ S = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),
(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

ตัวอย่างที่ 6

การมีลูก 3 คนของครอบครัวหนึ่ง
ผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดจะมี 8 อย่างด้วยกันคือ
ถ้าให้ ช. แทนเด็กผู้ชาย ญ. แทนเด็กผู้หญิง

$\therefore$ S = {ชชช,ชชญ,ชญช,ชญญ,ญชช,ญชญ,ญญช,ญญญ}

ตัวอย่างที่ 7

หยิบไพ่ 1 ใบจากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ

$\therefore$ S = {♦A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J K Q
♥A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J K Q
♣A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J K Q
♠A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J K Q}

จากตัวอย่าง 1-7 ที่กล่าวมานั้น เราสามารถที่จะเขียนผลลัพธ์ของการทดลองแสดงให้เห็นได้ เนื่องจากผลลัพธ์ของการทดลองมีไม่มากนัก แต่ในกรณีที่ผลลัพธ์ของการทดลองมีมาก ๆ เราไม่สามารถจะแสดงให้เห็นได้ จึงต้องใช้เทคนิคในการนับมาช่วยในการหาจำนวนผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8

หยิบไพ่ 3 ใบจากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ

$\therefore$ จำนวนผลลัพธ์ที่จะพึงเป็นไปได้ทั้งหมด $= \binom{52}{3}$ ผลลัพธ์

$= \frac{52!}{49!3!}$ ผลลัพธ์

$$= \frac{52 \times 51 \times 50}{3 \times 2} \quad \text{ผลลัพธ์}$$

$$= 52 \times 17 \times 25 \quad \text{ผลลัพธ์}$$

$$= 22,100 \quad \text{ผลลัพธ์}$$

$\therefore$ Sample Space ของการทดลองนี้จะประกอบด้วย 22,100 Sample points

ตัวอย่างที่ ๑

มีของอยู่ 12 สิ่งต้องการเลือกมาเพียง 2 สิ่ง

$\therefore$ จำนวน Sample points ใน Sample Space

$$= \binom{12}{2} = \frac{12!}{10!2!} \quad \text{sample points}$$

$$= \frac{12 \times 11}{2} = 66 \quad \text{sample points}$$

6.5 เหตุการณ์ (Events)

เหตุการณ์ (event) เป็นเซทย่อย (Subset) ของ Sample Space ดังนั้น ผลการทดลองในเหตุการณ์จะต้องเป็นผลการทดลองใน Sample Space ด้วย และมักจะใช้อักษรตัวใหญ่เขียนแทนเช่น A,B,X,Y, เป็นต้น เราแบ่งเหตุการณ์เป็น 2 ประเภทด้วยกันคือ

1. เหตุการณ์เชิงเดี่ยว (Simple event)

คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลการทดลองเพียงผลการทดลองเดียว เช่น โยนเหรียญ 2 เหรียญ

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 2 เหรียญแล้วได้หัว 2 หัว

$\therefore A = \{HH\}$ เรียก A ว่าเป็น Simple event หรือ โยนลูกเต๋า 1 ลูก

$\therefore S = \{1,2,3,4,5,6\}$

ถ้าให้ B เป็นเหตุการณ์ที่โยนลูกเต๋า 1 ลูกได้หน้า 1

$\therefore B = \{1\}$

2. **เหตุการณ์เชิงประกอบ** (Compound event)

เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลลัพธ์การทดลองมากกว่าหนึ่งผลลัพธ์ขึ้นไป ตัวอย่างเช่น โยนเหรียญ 3 เหรียญ

$\therefore$ S = {HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 3 เหรียญแล้วได้หัว 2 หัว

$\therefore$ A = {HHT,HTH,THH}

จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่าเหตุการณ์เชิงประกอบจะเป็นผลรวมของเหตุการณ์เชิงเดี่ยว

ตัวอย่าง

ถ้าให้ C = เหตุการณ์ที่หยิบไพ่ 2 ใบได้เป็นโพแดงทั้งคู่ จะเห็นได้ว่าโพแดงมีอยู่ 13 ใบ

$\therefore$ จำนวนผลลัพธ์ของการทดลองของเหตุการณ์ C $= \binom{13}{2}$ ผลลัพธ์

$= \frac{13!}{11!2!}$ ผลลัพธ์

$= \frac{13 \times 12}{2}$ ผลลัพธ์

$= 13 \times 6$ ผลลัพธ์

$= 76$ ผลลัพธ์

ข้อสังเกต

เหตุการณ์ที่มีผลลัพธ์การทดลองเหมือนผลลัพธ์การทดลองของ Sample Space ก็ถือว่าเป็นเหตุการณ์หนึ่งซึ่งเราเรียกว่า เหตุการณ์แน่นอน (Certain event) และนอกจากนี้เหตุการณ์ที่ไม่มีผลลัพธ์การทดลองเลยซึ่งคือ empty set ($\varnothing$) นั้น ก็ถือว่าเป็นเหตุการณ์หนึ่งเหมือนกัน ซึ่งเราเรียกว่าเหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้ (Null event)

ตัวอย่างเช่น โยนลูกเต๋า 1 ลูก ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าของลูกเต๋ามากกว่า 6

$\therefore$ A = {–} หรือ $\varnothing$

การรวมตัวของเหตุการณ์ (Operation of event)

เนื่องจากเหตุการณ์เป็นเซท เพราะฉะนั้นการรวมตัวของเหตุการณ์ จึงเหมือนกับการรวมตัวของเซท ซึ่งมีดังนี้

1. **ผลรวมของเหตุการณ์** (Union of event)

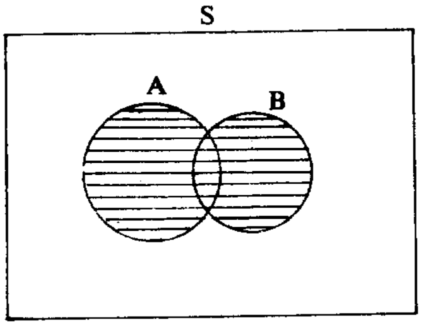
ผลรวมของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ A และ B ใด ๆ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลการทดลองที่อยู่ในเหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ B หรือทั้งเหตุการณ์ A และ B เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $A \cup B$ ซึ่ง $A \cup B$ ก็เป็นเหตุการณ์หนึ่งของการทดลองเชิงสุ่มนั้น ๆ และเมื่อ $A \cup B$ เกิดขึ้นในการทดลองนั้น เราอาจสรุปได้ว่าผลลัพธ์จะเป็นกรณีใดกรณีหนึ่งดังนี้คือ

ก. A เกิดขึ้น

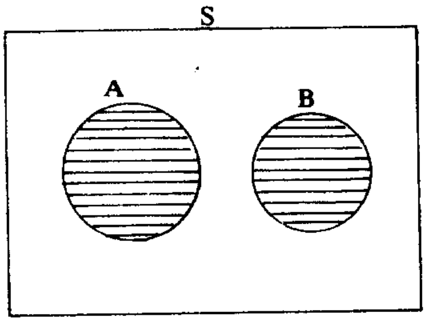
ข. B เกิดขึ้น

ค. ทั้ง A และ B เกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน

เขียนแผนภาพเวนน์ แสดง $A \cup B$ ได้ดังนี้



ส่วนที่แรเงาคือ $A \cup B$ ในเมื่อ A และ B เป็น Joint events



ส่วนที่แรเงาคือ $A \cup B$ เมื่อ $A \cup B$ เป็น Disjoint events or Mutually exclusive events

ตัวอย่างที่ 1

ให้ $A = \{1,3,5,7\}$

$B = \{1,2,4\}$

$\therefore A \cup B = \{1,2,3,4,5,7\}$

ตัวอย่างที่ 2

โยนเหรียญ 3 เหรียญ

S = {HHH,HHT,HTH,HTT,THH , THT,TTH,TTT}

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 3 เหรียญแล้วได้หน้าเหมือนกัน

∴ A = {HHH,TTT}

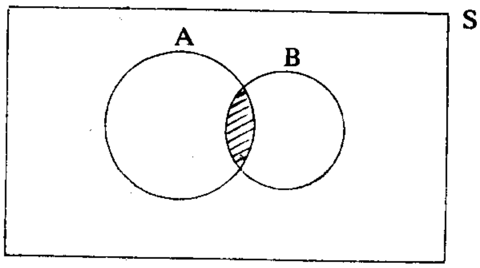
ให้ B = เหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 3 เหรียญแล้วได้ 1 หัว

∴ B = { HTT, THT, TTH }

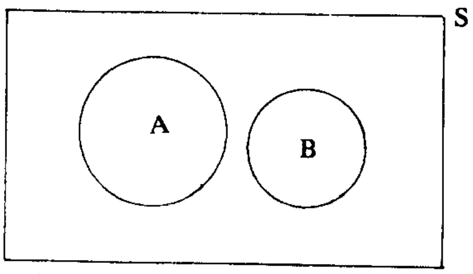
∴ A ∪ B = { HHH, HTT, THT, TTH, TTT }

2. ผลร่วมของเหตุการณ์ (Intersection of event)

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ แล้วผลร่วมของเหตุการณ์ A และ B คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลการทดลองที่อยู่ทั้งในเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย A ∩ B และเขียนแผนภาพเวนน์ แสดงได้ดังนี้



ส่วนแรเงาคือ A ∩ B เมื่อ A และ B เป็น Joint events



เมื่อ A และ B เป็น Disjoint events หรือ หรือ Mutually exclusive events A ∩ B = ϕ

จะเห็นได้ว่า A ∩ B = ϕ เมื่อเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ร่วมกัน หรือแยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive events or Disjoint events)

ตัวอย่างที่ 1

ให้ A = { 9, 10, 15, 18 }

B = { 7, 6, 4, 9, 10 }

A ∩ B = { 9, 10 }

ตัวอย่างที่ 2

ทอดลูกเต๋า 1 ลูก ให้ A = เหตุการณ์ที่ทอดลูกเต๋า 1 ลูกแล้วได้เลขคี่ และ B = เหตุการณ์ที่ทอดลูกเต๋า 1 ลูก แล้วได้เลข 1 หรือ 2

$\therefore \quad A = \{1, 3, 5, 7\}$

$B = \{1, 2\}$

$\therefore \quad A \cap B = \{1\}$

ตัวอย่างที่ 3

โยนลูกเต๋า 2 ลูก ให้ A = เหตุการณ์ที่ได้หน้าเหมือนกันและ B เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของหน้าลูกเต๋าทั้งสองเท่ากับ 7

$S = \{(1, 1), (1, 2)...(1, 6)$

$(2, 1), (2, 2)...(2, 6),$

$(3, 1), (3, 2)...(3, 6),$

$(4, 1), (4, 2)...(4, 6),$

$(5, 1), (5, 2)...(5, 6),$

$(6, 1), (6, 2)...(6, 6)\}$

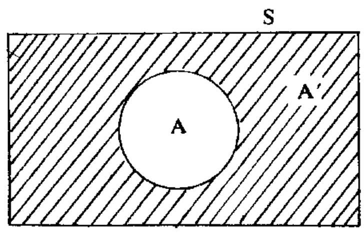
$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

$\therefore \quad A \cap B = \phi$

3. ส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ (Complement of event)

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ เซทของผลการทดลองที่อยู่ใน Sample space ที่ไม่อยู่ในเซท A เรียกว่า ส่วนเติมเต็มของ A เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย A′ และเขียนแผนภาพเวนน์แสดงได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1

ให้ $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\therefore \quad A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

ตัวอย่างที่ 2

โยนเหรียญ 2 เหรียญ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าเหมือนกัน

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$A = \{HH, TT\}$

$A' = \{HT, TH\}$

6.6 ความหมายของความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น (Probability) มีความหมายอยู่ 2 ประการคือ

ก. ความน่าจะเป็นคือ ศาสตร์หรือวิชาที่ใช้บรรยายความไม่แน่นอนซึ่งเป็นผลลัพธ์จากการทดลองเชิงสุ่ม (Random trial) และการใช้ความน่าจะเป็นมาบรรยายความไม่แน่นอนนี้ เรานำมาใช้ก่อนที่จะทำการทดลองเสร็จ เพราะเรายังไม่ทราบผลลัพธ์ของการทดลองเชิงสุ่มนั้นว่าจะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไร แต่ถ้าเราทราบผลลัพธ์ของการทดลองแล้วว่าเป็นอย่างไร การนำความน่าจะเป็นมาใช้บรรยายผลลัพธ์ของการทดลองเชิงสุ่มนั้นก็จะไม่มีความหมายเลย

ข. ความน่าจะเป็นคือตัวเลขที่ใช้เป็นมาตรการในการวัดโอกาสของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ว่ามีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงไร ตัวเลขที่ได้นี้จะมีค่าระหว่าง 0 กับ 1

นิยามความน่าจะเป็นของแต่ละผลการทดลอง (outcome หรือ Sample point)

คือตัวเลขที่กำหนดให้แก่แต่ละผลการทดลอง (outcome หรือ sample point) โดยแทนตัวเลขนี้ด้วย P_i และเรียกตัวเลขนี้ว่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลลัพธ์เป็น o_i และ P_i จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $0 \leq P_i \leq 1$ หมายความว่าค่า P_i มีพิสัยจาก 0 ถึง 1

2. $\sum_{\text{all } i} P_i = 1$ หมายความว่าผลรวมของความน่าจะเป็นของ sample point ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 1

ตัวอย่างที่ 1 โยนเหรียญ 1 เหรียญ

$$S = \{H, T\}$$

$$\therefore \quad P(H) = \frac{1}{2} = P(T)$$

ตัวอย่างที่ 2 โยนเหรียญ 2 เหรียญ

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$\therefore \quad P(HH) = P(HT) = P(TH) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

ตัวอย่างที่ 3 โยนลูกเต๋า 1 ลูก

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\therefore \quad P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

ตัวอย่างที่ 4 หยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ

$$\therefore \quad S = \{\begin{array}{l} \spadesuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q \\ \clubsuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q \\ \heartsuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q \\ \diamondsuit\ A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q \end{array}\}$$

จะได้ว่าโอกาสที่เกิด outcome ใด outcome หนึ่ง มีค่าเท่ากัน

$$\therefore \quad P(o_i) = \frac{1}{52}$$

ตัวอย่างที่ 5 โยนเหรียญ 4 เหรียญ

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

จะได้ว่าโอกาสที่จะเกิด outcome แต่ละ outcome มีค่าเท่า ๆ กัน

$$\therefore P(HHH) = P(HHT) = \ldots = P(TTT) = \frac{1}{8}$$

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (Probability of event)

นิยาม

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วย P(A) คือผลรวมของความน่าจะเป็นของ Sample points ทั้งหมดที่อยู่ในเหตุการณ์ A นั่นคือ

$$P(A) = \sum_{o_i \in A} P_i$$

ตัวอย่างที่ 1 โยนเหรียญ 3 เหรียญ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้หัว 2 หัว จงหา P(A)

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$A = \{HHT, HTH, THH\}$

จะเห็นว่าความน่าจะเป็นของแต่ละ Sample point $= \frac{1}{8}$

จาก $P(A) = \sum_{o_i \in A} P_i$

$= P(HHH) + P(HTH) + P(THH)$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

ตัวอย่างที่ 2 เลือกโทรทัศน์ 3 เครื่องจากโทรทัศน์ 10 เครื่อง ซึ่งมีเครื่องเสีย 4 เครื่อง จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกโทรทัศน์ 3 เครื่อง ให้เป็นเครื่องดีทั้ง 3 เครื่อง

$\therefore$ จำนวน Sample points $= \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!}$

$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}$

$= 10 \times 3 \times 4 = 120$ sample point

$\therefore$ ความน่าจะเป็นของแต่ละ Sample point $= \frac{1}{120}$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้เครื่องดีทั้ง 3 เครื่อง จากเครื่องดี 6 เครื่อง เครื่องเสีย 4 เครื่อง

$\therefore$ จำนวน Sample point ของเหตุการณ์ A

$$= \binom{6}{3}\binom{4}{0} \text{ sample point}$$

$$= \frac{6!}{3!\,3!} \times 1$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4$$

$$= 20 \text{ sample point}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{20}{120}$$

ตัวอย่างที่ 3 ทอดลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้ง 2 เท่ากับ 7

$$S = \{(1, 1), (1, 2) \ldots (1, 6)$$
$$(2, 1), (2, 2) \ldots (2, 6)$$
$$\vdots$$
$$(6, 1), (6, 2) \ldots (6, 6)\}$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นของแต่ละ Sample point $= \frac{1}{36}$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้ง 2 เท่ากับ 7

$$\therefore \quad A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ตัวอย่างที่ 4 เลือกคณะกรรมการ 3 คน จากผู้หญิง 5 คน และผู้ชาย 7 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกคณะกรรมการโดยให้มีผู้หญิง 1 คน และผู้ชาย 2 คน

จำนวน Sample point ใน S $= \binom{12}{3} = \frac{12!}{9!\,3!}$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2}$$

$$= 2 \times 11 \times 10 = 220$$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เลือกกรรมการ 3 คน โดยให้เป็นผู้หญิง 1 คน และผู้ชาย 2 คน

$\therefore$ จำนวน Sample point ใน A $= \binom{5}{1}\binom{7}{2}$

$$= 5 \times \frac{7!}{5!\,2!}$$

$$= 5 \times \frac{7 \times 6}{2}$$

$$= 5 \times 7 \times 3 = 105$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{105}{220} = 0.48$$

6.7 ทฤษฎีเกี่ยวกับความน่าจะเป็น (Probability theory)

ทฤษฎีที่ 1

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่แยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive event) จะได้ว่า

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ตัวอย่างที่ 1 หยิบไพ่ 1 ใบจากไพ่สำรับหนึ่ง ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ Ace และ B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ King จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบไพ่ 1 ใบ แล้วได้ Ace หรือ King นั่นคือต้องการให้เราหา P(A ∪ B)

$$S = \{\spadesuit A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q$$
$$\heartsuit A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q$$
$$\diamondsuit A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q$$
$$\clubsuit A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ K\ Q\}$$

$\therefore \quad A = \{\spadesuit A,\ \heartsuit A,\ \clubsuit A,\ \diamondsuit A\}$

จะได้ว่า $P(A) = \frac{4}{52}$

$\therefore \quad B = \{\spadesuit K,\ \heartsuit K,\ \clubsuit K,\ \diamondsuit K\}$

จะได้ $P(B) = \frac{4}{52}$

จะเห็นได้ว่าเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive event) เพราะไม่มี outcome ร่วมกันเลย

$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52}$$

$$= \frac{8}{52}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความน่าจะเป็นที่ทอดลูกเต๋า 2 ลูกแล้ว ได้ผลบวกของหน้าลูกเต๋าทั้ง 2 เป็น 2 หรือ 4

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลบวกของหน้าลูกเต๋าทั้ง 2 เป็น 2

$\therefore \quad A = \{(1, 1)\}$ ซึ่งจะได้ $P(A) = \frac{1}{36}$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลบวกของหน้าลูกเต๋าให้เป็น 4

$\therefore \quad B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ จะได้ $P(B) = \frac{3}{36}$

จะเห็นได้ว่าเหตุการณ์ A และ B เป็น Mutually exclusive events

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหน้าลูกเต๋าทั้ง 2 จะเป็น 2 หรือ 4 คือ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

บทแทรกทฤษฎีบทที่ 1

ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน (Mutually exclusive events) จะได้ว่า

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

ตัวอย่างที่ 3 โยนลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้ง 2 เป็น 2, 4, 6, 8 หรือ 10

ให้ A_1 = ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้ง 2 เป็น 2

$\therefore$ $A_1 = \{(1, 1)\}$ ได้ $P(A_1) = \frac{1}{36}$

ให้ A_2 = ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้ง 2 เป็น 4

$\therefore$ $A_2 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ ได้ $P(A_2) = \frac{3}{36}$

ให้ A_3 = ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้ง 2 เป็น 6

$\therefore$ $A_3 = \{(1, 5), (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)\}$ ได้ $P(A_3) = \frac{5}{36}$

ให้ A_4 = ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้ง 2 เป็น 8

$\therefore$ $A_4 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ ได้ $P(A_4) = \frac{5}{36}$

ให้ A_5 = ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้ง 2 เป็น 10

$\therefore$ $A_5 = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$ $\therefore$ $P(A_5) = \frac{3}{36}$

จะเห็นได้ว่า A_1, A_2, A_3, A_4 และ A_5 เป็น Mutually exclusive events

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้ง 2 จะเป็น 2, 4, 6, 8 หรือ 10 คือ

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)$$

$$= \frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36}$$

$$= \frac{17}{36}$$

ทฤษฎีที่ 2

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ จะได้ว่า

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

ตัวอย่างที่ 1 หยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ไพ่ดอกจิก หรือ Queen

$$S = \{ ♣A, 2 \ldots J, K, Q,$$
$$♦A, 2 \ldots J, K, Q,$$
$$♠A, 2 \ldots J, K, Q,$$
$$♥A, 2 \ldots J, K, Q \}$$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ดอกจิก

$\therefore \quad A = \{ ♣A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, K, K, Q \}$

ได้ $P(A) = \frac{13}{52}$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ Queen

$\therefore \quad B = \{ ♣Q, ♦Q, ♥Q, ♠Q \}$ ได้ $P(B) = \frac{4}{52}$

$A \cap B = \{ ♣Q \}$

ได้ $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

เหตุการณ์ที่หยิบไพ่ 1 ใบ ให้ได้เป็นดอกจิกหรือ Queen คือ $(A \cup B)$

$$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$
$$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

ตัวอย่างที่ 2 ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาคณะรัฐศาสตร์คนหนึ่งจะสอบผ่านวิชา PS 205 เท่ากับ $\frac{2}{3}$ และความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านวิชา ST 103 เท่ากับ $\frac{4}{9}$ ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านอย่างน้อยที่สุด 1 วิชา เท่ากับ $\frac{4}{5}$ จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้ง 2 วิชา

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เขาสอบผ่าน PS 205

B เป็นเหตุการณ์ที่เขาสอบผ่าน ST 103

$\therefore \quad A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่เขาสอบผ่านอย่างน้อยที่สุด 1 วิชา

$\therefore \quad P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{4}{9}, P(A \cup B) = \frac{4}{5}$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่าน 2 วิชา คือ $P(A \cap B)$

จาก $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A)+P(B)-P(A \cup B)$

$$= \frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{5} = \frac{30+20-36}{45}$$

$$= \frac{14}{45} = 0.31$$

ทฤษฎีที่ 3

ถ้า ϕ เป็นเซทที่ว่างเปล่าจะได้ว่า

$$P(\phi) = 0$$

ตัวอย่างเช่น โยนเหรียญ 2 เหรียญ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ 3 หัว

เหตุการณ์ที่ได้หัว 3 หัวคือ empty set (ϕ)

$\therefore \quad P(\phi) = 0$

ทฤษฎีที่ 4

ถ้า S เป็น Sample Space ของการทดลองเชิงสุ่มหนึ่ง ๆ

$$P(S) = 1$$

ตัวอย่างเช่น โยนเหรียญ 1 เหรียญ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 1 เหรียญ

$$S = \{H, T\}$$

$$P(S) = P(H)+P(T) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

ทฤษฎีที่ 5

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S และมี A' เป็นส่วนเติมเต็มแล้ว

$$P(A') = 1-P(A)$$

ตัวอย่างที่ 1 โยนเหรียญ 1 เหรียญ 6 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่โยนแล้วจะได้หัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

จำนวน Sample points ใน S $= 2^6 = 64$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่โยนไม่ได้หัวเลย ซึ่งมีอยู่ผลการทดลองเดียวเท่านั้นคือ

$\therefore \quad P(A) = \frac{1}{64}$

$\therefore$ เหตุการณ์ที่โยนแล้วได้หัวอย่างน้อย 1 ครั้ง $= A'$

จาก $\quad P(A') = 1 - P(A)$

$\therefore \quad P(A') = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

ตัวอย่างที่ 2 หยิบหลอดไฟ 3 หลอด จากกล่องที่มี 15 หลอด และในกล่องนี้มีหลอดเสียอยู่ 5 หลอด จงหาความน่าจะเป็นที่ได้หลอดเสียอย่างน้อย 1 หลอด

จำนวน Sample point ใน S $= \binom{15}{3}$

$$= \frac{15!}{12!\,3!} = 455$$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบแล้วไม่ได้หลอดเสียเลย (ได้หลอดดีทั้ง 3 หลอด จากหลอดดี 10 หลอด)

$\therefore$ จำนวน Sample point ใน A $= \binom{10}{3}$

$$= \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

$\therefore \quad P(A) = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$

$\therefore$ A' เป็นเหตุการณ์ที่หยิบแล้วได้หลอดเสียอย่างน้อย 1 หลอด

จาก $\quad P(A') = 1 - P(A)$

$\therefore \quad P(A') = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$

ตัวอย่างที่ 3 นายจำนงเดินทางจากบ้านไปยังที่ทำงาน 3 วิธีด้วยกัน คือเดินไป หรือขึ้นรถเมล์ หรือขับรถส่วนตัวไปทำงาน ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะเดินไปทำงานเท่ากับ 0.15 และความน่าจะเป็นที่เขาจะขึ้นรถเมล์ไปทำงานเท่ากับ 0.62 และความน่าจะเป็นที่เขาจะขับรถส่วนตัวไปทำงานเท่ากับ 0.23 จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ขับรถไปทำงาน

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เขาจะขับรถไปทำงาน

$\therefore \quad P(A) = 0.23$

$\therefore \quad A'$ เป็นเหตุการณ์ที่เขาจะไม่ขับรถไปทำงาน

$$\therefore \quad P(A') = 1 - P(A)$$
$$= 1 - 0.23 = 0.77$$

6.8 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional probability)

ความน่าจะเป็นที่กล่าวมาข้างต้นเราคำนวณได้โดยการเทียบดูว่าเหตุการณ์นั้นมีผลการทดลองเป็นสัดส่วนเท่าใดของผลการทดลองใน Sample Space แต่ถ้าเราไปเทียบกับเหตุการณ์ใหม่ที่เราทราบว่าผลการทดลองอะไรเกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นที่กำหนดให้แก่เหตุการณ์นี้เราเรียกว่าความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability) และเหตุการณ์ใหม่นี้จะเป็น Sample Space ใหม่

นิยาม

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S และถ้า $P(A) \neq 0$ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของ B เมื่อกำหนดว่า A ได้เกิดขึ้นแล้วเขียนแทนด้วย $P(B/A)$ ซึ่ง

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; ; \; P(A) \neq 0$$

และในทำนองเดียวกัน

ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของ A เมื่อกำหนดว่า B ได้เกิดขึ้น แล้วเขียนแทนด้วย $P(A/B)$ ซึ่ง

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \; ; \; P(B) \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 1 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าเหตุการณ์ที่ได้หน้าคู่เกิดขึ้นจงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หน้า 2

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ให้ A = เหตุการณ์ที่ได้หน้าคู่

$\therefore \quad A = \{2, 4, 6\}$ ได้ $P(A) = \frac{3}{6}$

ให้ B = เหตุการณ์ที่ได้หน้า 2

$\therefore \quad B = \{2\}$ ได้ $P(B) = \frac{1}{6}$

$\therefore \quad A \cap B = \{2\}$ ได้ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

จาก $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$\therefore \quad P(B/A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

ตัวอย่างที่ 2 หยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่ง ถ้าหน้าต่าง ๆ เกิดขึ้นจงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ King

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าต่าง ๆ

$$\therefore \quad A = \{ \diamondsuit J, K, Q, \; \clubsuit J, K, Q, \; \heartsuit J, K, Q, \; \spadesuit J, K, Q \}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{12}{52}$$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ King

$$\therefore \quad B = \{ \spadesuit K, \diamondsuit K, \heartsuit K, \clubsuit K \}$$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{4}{52}$$

$$A \cap B = \{ \spadesuit K, \heartsuit K, \diamondsuit K, \clubsuit K \} = B$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{4}{52} = P(B)$$

$$\therefore \quad P[\text{King/หน้าต่าง ๆ}] = P(B/A)$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{4}{52}}{\frac{12}{52}}$$

$$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

กฎการคูณ (Multiplication law)

1. จาก $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

2. จาก $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

ตัวอย่างที่ 1 หยิบไพ่ 2 ใบ แบบไม่แทนที่จากไพ่สำรับหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่ทั้ง 2 ใบ จะเป็น Ace ทั้งคู่

ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ใบแรกได้ Ace

และ A_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ใบที่ 2 ได้ Ace

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบไพ่ทั้ง 2 ใบให้เป็น Ace ทั้งคู่คือ

$$P(A \cap B) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$$

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบไพ่ใบแรกเป็น Ace คือ $P(A_1) = \frac{4}{52}$

และความน่าจะเป็นที่จะหยิบไพ่ใบที่ 2 ให้เป็น Ace โดยกำหนดว่าใบที่หนึ่ง

หยิบได้ Ace คือ $P(A_2/A_1)$ ซึ่ง $P(A_2/A_1) = \frac{3}{51}$ เพราะว่าไพ่ที่เป็น Ace เหลืออยู่ 3 ใบ จากไพ่ 51 ใบ (หยิบใบที่ 1 ใบแล้ว 1 ใบ)

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right) = \frac{12}{2,652}$$

ตัวอย่างที่ 2 หยิบลูกหิน 2 ลูก 2 ลูกโดยไม่แทนที่ (without replacement) 6 ลูก และสีแดง 4 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกหินทั้ง 2 ลูก เป็นสีแดง

ให้ R เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกหินสีแดง

$$P(R_1) = \frac{4}{10}$$

$$P(R_2/R_1) = \frac{3}{9}$$

$$\therefore \quad P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1)$$

$$= \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{3}{9}\right)$$

$$= \frac{12}{90}$$

6.9 ความเป็นอิสระกันของเหตุการณ์ (Independent events)

เหตุการณ์ A และ B จะเป็นอิสระกันเมื่อ

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

ตัวอย่างที่ 1 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของหน้าของลูกเต๋าทั้งสองเป็น 7 และ B เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของลูกเต๋าทั้งสองเป็น 4 จงหาความน่าจะเป็นที่ผลบวกของลูกเต๋าจะเป็น 7 และ 4 คือให้หา $P(A \cap B)$

ในกรณีนี้จะเห็นว่าการเกิดเหตุการณ์ A จะไม่มีผลต่อการเกิดของเหตุการณ์ B และการเกิดของเหตุการณ์ B ก็ไม่มีผลต่อการเกิดของเหตุการณ์ A ดังนั้นเหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระกัน

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$= \frac{6}{36} \times \frac{3}{36} = \frac{1}{72}$$

ตัวอย่างที่ 2 ครอบครัวหนึ่งตั้งใจว่าจะมีลูก 3 คน ถ้าโอกาสที่เขาจะมีลูกชายเป็น $\frac{2}{3}$ จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่เขาจะได้ลูกสองคนแรกเป็นชายและคนที่สามเป็นหญิง

เราถือว่าการที่ลูกคนไหนจะเป็นชายหรือหญิงเป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระกัน

$\therefore$ ถ้า B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ลูกชาย

และ G เป็นเหตุการณ์ที่ได้ลูกสาว

$$\therefore P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(G) = \frac{1}{3}$$

เหตุการณ์ที่จะได้ลูกสองคนแรกเป็นชายและคนที่ 3 เป็นหญิง คือ $(B_1 \cap B_2 \cap G_3)$

$$\therefore P(B_1 \cap B_2 \cap G_3) = P(B_1)\,P(B_2)\,P(G_3)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{27}$$

แบบฝึกหัด

1. จงอธิบายความหมายของคำต่อไปนี้

ก. เซท

ข. การทดลอง

ค. กลุ่มผลการทดลอง

ง. เหตุการณ์

จ. เวนน์ ไดอะแกรม

ฉ. เหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน

ช. ส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์หนึ่ง ๆ

2. คู่ของเหตุการณ์ต่อไปนี้คู่ใดที่เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน

	เหตุการณ์ A	เหตุการณ์ B
ก.	ฝนตก	ฝนไม่ตก
ข.	ได้เกรด P ในการสอบวิชา	ได้เกรด F ในการสอบวิชาเดียวกัน
ค.	ขับรถยนต์	เดิน
ง.	ขับรถยนต์	พูด
จ.	ว่ายน้ำ	รู้สึกหนาว
ฉ.	ชนะการแข่งขัน	แพ้การแข่งขัน
ช.	หยิบไพ่ Queen จากไพ่สำรับหนึ่ง	หยิบไพ่สีแดงใบหนึ่ง

3. จงหาส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ต่อไปนี้

ก. ชนะการแข่งขันเบสบอลล์

ข. ชนะการแข่งขันฟุตบอลล์

ค. หยิบไพ่โพแดงจากไพ่สำหรับหนึ่ง

ง. หยิบไพ่สีแดงจากไพ่สำหรับหนึ่ง

จ. ของเสียน้อยกว่า 10 ชิ้น

ฉ. ของเสีย 10 ชิ้น หรือน้อยกว่า

4. จงยกตัวอย่างการทดลองทางสถิติมาให้ดู 3 การทดลอง

5. จงเขียนกลุ่มผลการทดลองของการทดลองต่อไปนี้

ก. โยนเหรียญหนึ่งเหรียญจนกระทั่งได้หัว

ข. จำนวนคนที่สูบบุหรี่ในห้องเรียนหนึ่งที่มีนักศึกษา 30 คน

6. ในกลุ่มผลการทดลองของการทอดลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าให้

E เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ได้หน้า 6

F เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าคู่

G เป็นเหตุการณ์ที่ได้หน้าน้อยกว่า 3

จงเขียนผลการทดลองของแต่ละเหตุการณ์ต่อไปนี้

ก. $E \cap G$

ข. $F \cup G$

ค. $(E \cap G)'$

7. การเรียงลำดับและการจัดกลุ่มแตกต่างกันอย่างไรจงอธิบาย

8. โยนลูกเต๋า 5 ลูก จงหาจำนวนหนทางที่เกิดขึ้น

9. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 4 ครั้ง จงหาจำนวนหนทางที่เกิดขึ้น

10. คำว่า "banana" ถ้านำมาเรียงเป็นคำใหม่จะได้ทั้งหมดกี่คำ

11. คำว่า "Statistics" ถ้านำมาเรียงเป็นคำใหม่จะได้ทั้งหมดกี่คำ

12. จากโจทย์ข้อ 11 มีกี่คำที่ขึ้นต้นด้วยตัว S

13. มีเลขโดดอยู่ 5 ตัว คือ 1, 3, 4, 7, 9 นำมาสร้างเลขหลักสิบได้กี่จำนวน และนำมาสร้างเลขหลักพันได้กี่จำนวน

14. หยิบไพ่ 1 ใบจากไพ่สำรับหนึ่ง จงหาจำนวนหนทางที่จะหยิบได้

ก. Jack ข. ไพ่สีแดง

ค. ไพ่ดอกจิก ง. ไพ่ดำเลข 10

จ. สีแดงเลข 9 หรือสีดำเลข 8

15. จงเขียนผลลัพธ์ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดจากการโยนลูกเต๋า 1 ลูก พร้อมทั้งคำนวณหาความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์การทดลองและพร้อมทั้งคำนวณหาความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์การทดลองและจงนำความน่าจะเป็นที่ได้ทั้งหมดมาบวกกัน

16. จากการทดลองในข้อ 14 จงคำนวณหาความน่าจะเป็นของแต่ละข้อ

17. ชั้นเรียนวิชาสถิติชั้นหนึ่งประกอบด้วยนักศึกษา 30 คน เป็นชาย 24 คน และหญิง 6 คน

ก. จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน

ข. จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน โดยให้มีผู้หญิงรวมอยู่ด้วย 2 คน

ค. จงหาจำนวนหนทางที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน โดยให้มีผู้หญิง 1 คน

ง. จงคำนวนหาความน่าจะเป็นในข้อ (ก)

จ. จงคำนวฯหาความน่าจะเป็นในข้อ (ข)

ฉ. จงคำนวณหาความน่าจะเป็นในข้อ (ค)

18. ทอดลูกเต๋า 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็น

ก. ที่ลูกเต๋าจะหงาย 6 จุด

ข. ที่ลูกเต๋าจะหงาย 5 จุด, 6 จุดหรือ 7 จุด

ค. ที่ลูกเต๋าจะหงายได้จุดเป็นเลขคู่

ง. ที่ลูกเต๋าจะหงายได้จุดน้อยกว่า 4 จุด

19. มีลูกหิน 50 ลูก ในกล่องใบหนึ่งดังนี้

สี	จำนวณ
น้ำเงิน	20
แดง	15
ส้ม	10
เขียว	5
	50

หยิบลูกหิน 1 ลูกอย่างสุ่ม จงหาความน่าจะเป็น

ก. ที่จะหยิบได้สีเขียว

ข. ที่จะหยิบได้สีน้ำเงิน

ค. ที่จะหยิบได้สีเหลือง

ง. ที่จะหยิบได้สีน้ำเงิน หรือสีเขียว

จ. ที่จะหยิบไม่ได้สีแดง

ฉ. ที่จะหยิบไม่ได้สีเหลือง

ช. ที่จะหยิบได้สีแดงหรือสีเขียว

20. ทอดลูกเต๋า 2 ลูก

ก. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หน้า 6 ทั้ง 2 ลูก

ข. จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หน้า 2 ทั้ง 2 ลูก

ค. จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้ง 2 ลูก จะหงายหน้าเหมือนกัน

21. ให้ $P(A) = .30$, $P(B) = .80$ และ $P(A \cap B) = .15$

ก. A และ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกันหรือไม่? ทำไม?

ข. จงหา $P(B')$

ค. จงหา $P(A \cup B)$

22. การหยุดทำงานของเครื่องจักรแต่ละเครื่องเป็นอิสระต่อกัน ถ้ามีเครื่องจักรอยู่ 4 เครื่องและความน่าจะเป็นที่เครื่องจักรทั้ง 4 จะหยุดทำงานในวันหนึ่งมีดังนี้คือ 1%, 2%, 5% และ 10% ตามลำดับ

จงหาความน่าจะเป็น

ก. เครื่องจักรทั้ง 4 จะหยุดทำงานพร้อมกันในวันหนึ่ง

ข. ที่ไม่มีเครื่องใดหยุดทำงานเลย

23. ทอดเหรียญอันหนึ่ง 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญนั้นจะหงายหน้าก้อยทั้ง 3 ครั้ง และจงหาความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ที่เหรียญนั้นจะไม่หงายหน้าก้อยทั้ง 3 ครั้ง

24. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่แยกต่างหากจากกัน

ก. $P(A \cup B)$ ข. $P(A \cup B)'$

ค. $P(A \cap B)$

25. หอดเหรียญอันหนึ่ง 4 ครั้ง และกำหนดให้ความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนหัว ต่าง ๆ กันดังนี้

$P(0) = 0.0625$

$P(1) = 0.2500$

$P(2) = 0.3750$

$P(3) = 0.2500$

$P(4) = 0.0625$

จงหาความน่าจะเป็นดังต่อไปนี้

ก. ได้หน้าหัว 1 หัวหรือ 2 หัว

ข. ได้น้อยกว่า 3 หัว

ค. ได้ 5 หัว

ง. ได้มากกว่า 3 หัว

จ. ได้น้อยกว่า 2 หัว หรือมากกว่า 3 หัว

26. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติเหตุ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, หรือ 7 ครั้ง ในสัปดาห์หนึ่ง ๆ ระหว่างตีหนึ่งถึง 6 โมงเช้ามีดังนี้ตามลำดับคือ .08, 15, .20, .25, .18, .07, .04 และ .01 จงหาความน่าจะเป็นในสัปดาห์หนึ่ง ระหว่างระยะเวลาดังกล่าว จะเกิดอุบัติเหตุดังนี้

ก. น้อยกว่า 3 ครั้ง

ข. 3 ครั้งหรือน้อยกว่า

ค. 3 ครั้งเท่านั้น

ง. ไม่มีอุบัติเหตุเลย

จ. มากกว่า 7 ครั้ง

27. จงหาค่าของ

ก. $\binom{3}{4}$ ข. $\binom{4}{4}$ ค. $\binom{5}{1}$ ง. $\binom{9}{6}$

28 จงหาค่าของ

ก. $3P_2$ ข. $4P_4$ ค. $5P_1$ ง. $9P_6$ จ. P_0

29. จงอธิบายว่าเพราะอะไรความน่าจะเป็นต่อไปนี้จึงใช้ไม่ได้

ก. $P(A) = -.45$

ข. $P(A) = 1.30$

ค. $P(A) = .60$ และ $P(A') = .60$

ง. $P(A$ หรือ $B) = 1.04$