บทที่ 7

การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability distribution)

ในการทดลองเชิงสุ่มใด ๆ ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองทั้งหมด บางครั้งเราไม่ได้สนใจในรายละเอียดของผลการทดลอง แต่เราสนใจตัวเลขที่แสดงถึงผลการทดลองนั้น ๆ เช่น โยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง ได้ผลการทดลองที่จะเป็นไปได้ทั้งหมด 8 ผลการทดลอง แต่เราไม่สนใจในรายละเอียดของผลการทดลองทั้ง 8 อย่างนั้น ถ้าเราสนใจจำนวนหัวที่ได้จากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ จะเห็นได้ว่าค่าของผลการทดลองต่าง ๆ จะมีได้ตั้งแต่ 0 ถึง 3 ซึ่งค่าเหล่านี้เราถือว่าเป็นตัวแปรเชิงสุ่ม (Random Variable) และเราสามารถที่จะคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของค่าตัวแปรเชิงสุ่มแต่ละค่าได้ ถ้าให้ X เป็นตัวแปรเชิงสุ่ม ซึ่งแทนจำนวนหัวที่ได้จากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ ดังนั้นค่าของ X (x) จะมีค่าเป็น 0, 1, 2 และ 3 ดังนั้นเราจะคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าต่าง ๆ ได้ โดยใช้วิธีการหาความน่าจะเป็นของผลการทดลองที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 6 ได้ ดังนี้

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

X = จำนวนหัวที่ได้

$x = \{0, 1, 2, 3\}$

จะหา $P[X = x]$

ถ้า $x = 0$ $\therefore P[X = 0]$ = P [โยนเหรียญ 3 เหรียญแล้วไม่ได้หัวเลย]

$= P[TTT]$

$= \frac{1}{8}$

ถ้า $x = 1$ $\therefore P[X = 1]$ = P [โยนเหรียญ 3 เหรียญแล้วได้หัว 1 หัว]

$= P[HTT, THT, TTH] = \frac{3}{8}$

ถ้า $x = 2$ $\therefore P[X = 2]$ = P [โยนเหรียญ 3 เหรียญแล้วได้หัว 2 หัว]

$= P[HHT, HTH, THH]$

$= \frac{3}{8}$

ถ้า $x = 3$ $\therefore P\,|\,X = 3\,| = P\,|$ โยนเหรียญ 3 เหรียญแล้วได้หัว 3 หัว $|$

$$= P\,|\,HHH\,| = \frac{1}{8}$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหา $P\,|\,X > x\,|$ หรือ $P\,|\,a \leq X \leq 6\,|$ หรือ $P\,|\,X < x\,|$ หรือ $P\,|\,X \geq x\,|$ หรือ $P\,|\,X \leq x\,|$ ได้ด้วย

สำหรับตัวแปรเชิงสุ่ม 1 ค่า ก็จะมีค่าความน่าจะเป็น 1 ค่า ดังนั้นเราจึงได้การแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มขึ้นมาอันหนึ่ง ซึ่งการแจกแจงนี้จะอาศัยค่าความน่าจะเป็น เราจึงเรียกว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่ม (Probability distribution of Random Variable) ในทางปฏิบัติข้อมูลที่ได้จากการทดลอง มักจะมีรูปการแจกแจงแบบใดแบบหนึ่งเสมอ ซึ่งถ้าเราสามารถทราบได้ว่าข้อมูลมีการแจกแจงแบบใด ก็จะทำให้เราทราบถึงวิธีการอนุมานได้ถูกต้อง

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มที่สำคัญ และพบกันอยู่เสมอมีดังนี้ คือ

1. การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution)
2. การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)
3. การแจกแจงแบบปัวซอง (Poisson Distribution)

ในที่นี้จะขอกล่าวถึงการแจกแจงแบบที่ 1 และแบบที่ 2 เท่านั้น

7.1 การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution)

การแจกแจงแบบทวินาม เป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มที่มาจากการทดลองเชิงสุ่ม (Random experiment) ที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

1. การทดลองประกอบด้วยการกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง ภายใต้สภาวการณ์เดียวกัน

2. การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน

3. การทดลองแต่ละครั้งจะให้ผลการทดลองออกมา 2 ประเภท คือ สำเร็จ (Success แทนด้วย S) และไม่สำเร็จ (Failure แทนด้วย F)

4. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลที่สำเร็จ (S) จะคงที่ตลอดการทดลองเท่ากับ p นั่นคือ $P(S) = p$

5. ถ้าเราสนใจจำนวนครั้งที่สำเร็จ (S) ในการทดลอง n ครั้ง ซึ่งมีค่าเป็น 0, 1, 2, ..., n และค่าเหล่านี้จะเป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่มแบบทวินาม

ถ้ากำหนดให้ X เป็นจำนวนครั้งที่เกิดความสำเร็จ (S) ในการทดลอง n ครั้ง ในการทดลองแบบทวินาม การแจกแจงของ X จะกำหนดไว้ดังนี้

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ n = จำนวนครั้งที่ทำการทดลอง

x = จำนวนครั้งที่เกิดความสำเร็จ (S)

p = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลที่สำเร็จ (S)

q = $1 - p$ คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลที่ไม่สำเร็จ (F)

ตัวอย่างที่ 1

โยนเหรียญ 5 ครั้ง ให้ X เป็นจำนวนหัวที่เกิดขึ้น

การทดลองนี้เป็นการทดลองแบบทวินาม ซึ่งหัวจะเป็นผลที่สำเร็จและก้อยจะเป็นผลที่ไม่สำเร็จ

$\therefore P(H) = \frac{1}{2} = p$ และ $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

และ $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore n = 5$

ให้ X เป็นจำนวนหัวที่เกิดขึ้น ซึ่งจะมีการแจกแจงแบบทวินามดังนี้

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \; ; \; x = 0, 1, \ldots, 5$$

$$= \binom{5}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} \; ; \; x = 0, 1, 2, \ldots, 5$$

ถ้าจะหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดหัว 3 หัว จะได้

$$P[X = 3] = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

$$= \left(\frac{5!}{2!3!}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5 \times 2}{8 \times 4}$$

$$= \frac{10}{32}$$

ถ้าจะหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดหัว 2 หัว จะได้

$$P[X = 2] = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}$$

$$= \left(\frac{5!}{3!2!}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$

$$= \frac{5\times 2}{8\times 4} = \frac{10}{32}$$

ถ้าจะหาความน่าจะเป็นที่จะไม่เกิดหน้าหัวเลยจะได้

$$P[X = 0] = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0}$$

$$= \left(\frac{5!}{5!0!}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

$$= 1\times 1\times\frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

ซึ่งถ้าเราหาจนครบทุกค่าของ x แล้ว เราสามารถเขียนลงในตารางได้ดังนี้

x	0	1	2	3	4	5
P[X = x]	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

นอกจากนี้เราก็ยังสามารถที่จะหาค่า $P[X \geq x]$ หรือ $P[X \leq x]$ หรือ $P[a \leq X \leq b]$ ได้ เช่น จากตัวอย่างเดิม

ถ้าหากต้องการหา $P[X \geq 2]$ หมายความว่าต้องการจะหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดหน้าหัวอย่างน้อยที่สุด 2 หัว

$$\therefore P[X \geq 2] = \sum_{x=2}^{5} P[X = x]$$

$$= P[X = 2]+P[X = 3]+P[X = 4]+P[X = 5]$$

$$= \frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32} = \frac{26}{32}$$

หรือหาจาก $P[X \geq 2] = 1-P[X \leq 1]$

$$P[X \leq 1] = P[X = 0]+P[X = 1]$$

$$= \frac{1}{32}+\frac{5}{32} = \frac{6}{32}$$

$$\therefore P[X \geqslant 2] = 1-\frac{6}{32} = \frac{26}{32}$$

ถ้าจะหา $P[X \leqslant 3]$

$$\therefore P[X \leqslant 3] = \sum_{x=0}^{3} P[X = x]$$

$$= P[X = 0]+P[X = 1]+P[X = 2]+P[X = 3]$$

$$= \frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32} = \frac{26}{32}$$

ถ้าจะหา $P[2< X \leqslant 4]$

$$\therefore P[2 < X \leqslant 4] = \sum_{x=3}^{4} P[X = x]$$

$$= P[X = 3]+P[X = 4]$$

$$= \frac{10}{32}+\frac{5}{32} = \frac{15}{32}$$

ถ้าจะหา $P[X \geqslant 1] = \sum_{x=1}^{5} P[X = x]$

หรือ $= 1-P[X = 0]$

$$= 1-\frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

ตัวอย่างที่ 2

บริษัทผลิตยาสีฟันแห่งหนึ่งโฆษณาว่า 50% ของแม่บ้านในอำเภอบ้านไผ่จะใช้ยาสีฟันของบริษัทจากการสุ่มตัวอย่างแม่บ้านในอำเภอบ้านไผ่มา 4 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบว่าแม่บ้านอย่างน้อย 1 คน ใช้ยาสีฟันของบริษัท

ในที่นี้ $p = 0.50$

$\therefore q = 0.50$

$n = 4$

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\therefore P[X = x] = \binom{4}{x} (.50)^x (.50)^{4-x} \quad ; x = 0, 1, 2, 3, 4$$

ต้องการหาความน่าจะเป็นที่แม่บ้านอย่างน้อย 1 คน ใช้ยาสีฟันของบริษัท หรือการหา $P|X \geq 1|$ นั่นเอง

$$\therefore P|X \geq 1| = \sum_{x=1}^{4} P|X = x|$$

หรือ $= 1 - P|X = 0|$

$$= 1 - \left|\binom{4}{0}(0.5)^0(.5)^4\right| = 1 - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{5}{16}$$

ตัวอย่างที่ 3

ในการแข่งขันบาสเกตบอล ทีมบาสเกตบอลมหาวิทยาลัยรามคำแหง มีโอกาสที่จะชนะเป็น $\frac{2}{3}$ ถ้าในรอบแรกทีมบาสเกตบอลรามคำแหงต้องลงแข่ง 4 ครั้ง จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่จะชนะ 2 เกม

ข. ความน่าจะเป็นที่จะชนะอย่างน้อย 1 เกม

ค. ความน่าจะเป็นที่จะชนะมากกว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนครั้งที่ลงแข่ง

ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ทีมบาสเกตบอลรามคำแหงจะชนะ

เมื่อ $p = \frac{2}{3}, q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$n = 4, x = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\therefore P|X = x| = \binom{4}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} \quad ; x = 0, 1, 2, 3, 4$$

ก. ความน่าจะเป็นที่จะชนะ 2 เกม คือ $P|X = 2|$

$$\therefore P|X = 2| = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{4!}{2!2!}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{4\times 3}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}$$

$$= \frac{2\times 3\times 4}{9\times 9} = \frac{2\times 4}{9\times 3} = \frac{8}{27}$$

ข. ความน่าจะเป็นที่จะชนะอย่างน้อย 1 เกม คือ $P|X \geq 1|$

$\therefore P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0]$

$\therefore P[X = 0] = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{4-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4}$

$= \frac{1}{81}$

$\therefore P[X \geq 1] = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$

ค. ความน่าจะเป็นที่จะชนะมากกว่าครึ่งหนึ่งของจำนวนครั้งที่ลงแข่ง คือ $P[X > \frac{4}{2}]$

$\therefore P[X > \frac{4}{2}] = P[X > 2] = P[X \geq 3]$

$= P[X = 3] + P[X = 4]$

$= \binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{4-3} + \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4-4}$

$= \binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$

$= \left(4 \times \frac{8}{27} \times \frac{1}{3}\right) + \left(1 \times \frac{16}{81} \times 1\right)$

$= \frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{48}{81}$

จากนี้จะเห็นได้ว่า ถ้าเราต้องการให้เกิดความสำเร็จ x ครั้งในการทดลอง n ครั้ง $\therefore$ เราคาดว่า จะมี $n - x$ ครั้ง ที่ไม่สำเร็จ เพราะว่า $x + n - x = n$ ซึ่งคือ จำนวนครั้งที่ทำการทดลองทั้งหมด ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างสำหรับเขียนสูตรเพื่อการคำนวณ เมื่อค่า n, p และ x มีค่าต่าง ๆ ดังนี้

n	x	p	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$
5	3	.30	$\binom{5}{3}(.30)^3(.70)^2$
8	6	.11	$\binom{8}{6}(.11)^6(.89)^2$
9	5	.44	$\binom{9}{5}(.44)^5(.56)^4$
10	4	.85	$\binom{10}{4}(.85)^4(.15)^6$

สูตรนี้ยังสามารถใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นสะสมได้ด้วยโดยคำนวณความน่าจะเป็นของแต่ละค่าแล้วนำมารวมกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

n	P	x	รวมค่า	การคำนวณ	P(x)
3	.4	1	1	$\binom{3}{1}(.4)^1(.6)^2$	.4320
5	.2	0	0	$\binom{5}{0}(.2)^0(.8)^5$	.3277
5	.2	1 หรือน้อยกว่า	0, 1	$\binom{5}{0}(.2)^0(.8)^5 + \binom{5}{1}(.2)^1(.8)^4$	.7373
10	.5	8 หรือมากกว่า	8, 9, 10	$\binom{10}{8}(.5)^8(.5)^2 + \binom{10}{9}(.5)^9(.5)^1 + \binom{10}{10}(.5)^{10}(.5)^0$	.0547
10	.7	6	6	$\binom{10}{6}(.7)^6(.3)^4$	.2001

การคำนวณหาความน่าจะเป็นแบบทวินามโดยวิธีดังกล่าวข้างต้นนี้ ถ้า n มีค่ามากขึ้น การคำนวณความน่าจะเป็นแบบทวินามจะมีข้อยุ่งยากทั้งในการคำนวณหา Combination และการยกกำลังของค่า p และ q ดังนั้น มีอีกวิธีหนึ่งที่เราจะหาความน่าจะเป็นแบบทวินามได้โดยการใช้ตารางทวินาม

ตารางทวินาม (Binomial Tables)

ตารางทวินามมี 2 แบบด้วยกัน คือ แบบที่ให้ค่าความน่าจะเป็นเฉพาะค่าเดี่ยว ๆ ของตัวแปรเชิงสุ่ม และแบบที่ให้ความน่าจะเป็นแบบสะสม ซึ่งวิธีการใช้ตารางทั้ง 2 มีดังนี้

ตารางความน่าจะเป็นแบบทวินามเฉพาะค่าเดี่ยว (Individual Binomial Probabilities Tables)

เมื่อเราต้องการจะหาค่าความน่าจะเป็นของแต่ละค่าในการแจกแจงแบบทวินาม เช่น ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ 4 ครั้ง ในการทดลอง n ครั้ง ดังนั้นเราจะใช้ตารางแบบเฉพาะค่าเดี่ยว ซึ่งจากสูตรจะเห็นว่าเราต้องทราบค่าต่าง ๆ 3 ค่าด้วยกัน คือ n (จำนวนครั้งที่ทำการทดลอง) p (ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ) และ x (จำนวนความสำเร็จที่กำหนดให้)

ตารางความน่าจะเป็นเฉพาะค่าเดี่ยว ๆ นี้ จะแสดงไว้ในตาราง 7.1.1 (นำมาแสดงให้ดูเพียงบางส่วนเท่านั้น)

วิธีอ่านค่าจากตารางเริ่มแรกให้เลือกค่าของ p ซึ่งจะมีตั้งแต่ p = 0.05 ถึง p = 0.95 จากนั้นเลือกค่าของ n ซึ่งจะอยู่ทางซ้ายสุด ซึ่งจะเห็นว่าค่า n แต่ละค่านั้นจะมีจำนวนครั้งที่สำเร็จที่จะเป็นไปได้ (ตั้งแต่ 0 ถึง n) สำหรับตารางที่สมบูรณ์นั้นจะอยู่ที่ท้ายเล่ม

การใช้ตาราง 7.1.1 หาค่าความน่าจะเป็น

สมมติว่าเราต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดสำเร็จ 5 ครั้ง (x = 5) ในการทดลอง 8 ครั้ง (n = 8) และความน่าจะเป็นที่จะเกิดสำเร็จ (s) เท่ากับ 0.30 เราจะใช้ตารางหาความน่าจะเป็นที่ต้องการได้ดังนี้

1. อ่านหัวตารางจนกระทั่งพบค่าของ p ที่เราต้องการหาในที่นี้ คือ p = 0.30

2. อ่านค่า n = 8 แล้วหาจำนวนที่ต้องการให้เกิดความสำเร็จ (x) ในที่นี้ x = 5

3. ความน่าจะเป็นที่ได้จะอยู่ที่แถวที่ได้ในข้อ 2 ตัดกับสดมภ์ที่ได้ในข้อ 1 ซึ่งในที่นี้ความน่าจะเป็นที่ได้ คือ 0.0467 ค่านี้ คือ ค่าที่ทำเครื่องหมายวงกลมไว้ในตารางที่ 7.1.1

ตาราง 7.1.1 จะช่วยให้เราหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ (S) ต่าง ๆ ได้ เช่น

n	Probability of success (p)	x	P(x)
5	.20	0	.3277
8	.60	3	.1239
11	.30	5	.1321

ตาราง 7.1.1 Portion of a Table of Individual Binomial Probabilities

		p																		
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	.55	.60	.65	.70	.75	.80	.85	.90	.95
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	0.168	.0084	.0039	.0017	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312	.0164	.0079	.0033	.0012	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094	.0703	.0413	.0217	.0100	.0038	.0011	.0002	.0000	.0000
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188	.1719	.1239	.0808	.0467	.0231	.0092	.0026	.0004	.0000
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734	.2627	.2322	.1875	.1361	.0865	.0459	.0185	.0046	.0004
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188	.2568	.2787	.2786	.2541	.2076	.1468	.0839	.0331	.0054
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094	.1569	.2090	.2587	.2965	.3115	.2936	.2376	.1488	.0515
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312	.0548	.0896	.1373	.1977	.2670	.3355	.3847	.3826	.2793
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039	.0084	.0168	.0319	.0576	.1001	.1678	.2725	.4305	.6634
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020	.0008	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176	.0083	.0035	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703	.0407	.0212	.0098	.0039	.0012	.0003	.0000	.0000	.0000
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641	.1160	.0743	.0424	.0210	.0087	.0028	.0006	.0001	.0000
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461	.2128	.1672	.1181	.0735	.0389	.0165	.0050	.0008	.0000
	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461	.2600	.2508	.2194	.1715	.1168	.0661	.0283	.0074	.0006
	6	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641	.2119	.2508	.2716	.2668	.2336	.1762	.1069	.0446	.0077
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703	.1110	.1612	.2162	.2668	.3003	.3020	.2597	.1722	.0629
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176	.0339	.0605	.1004	.1556	.2253	.3020	.3679	.3874	.2985
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020	.0046	.0101	.0207	.0404	.0751	.1342	.2316	.3874	.6302

7.1.2 ตารางความน่าจะเป็นแบบสะสมของการแจกแจงแบบทวินาม

(Cumulative Binomial Probabilities Table)

ปัญหาต่าง ๆ ทางสถิติมักจะต้องการให้หาค่าความน่าจะเป็นแบบรวมเป็นส่วนใหญ่ แทนที่จะหาความน่าจะเป็นของค่าเดี่ยว ๆ และเรามักจะพบเสมอ เช่น ให้หาความน่าจะเป็นที่ค่าของตัวแปรเชิงสุ่มมากกว่าหรือน้อยกว่าค่าของตัวแปรเชิงสุ่มที่กำหนดให้ ตัวอย่างเช่น จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัว 5 หัว หรือน้อยกว่าในการโยนเหรียญ 10 ครั้ง เป็นต้น ซึ่งในการที่จะหาความน่าจะเป็นนี้เราสามารถจะหาโดยใช้ตารางที่ให้ค่าความน่าจะเป็นเฉพาะค่าเดี่ยว ๆ มารวมกัน ในที่นี้คือ $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$ แต่การทำเช่นนี้ ทำให้เราเสียเวลา และอาจเกิดความคลาดเคลื่อนในการคำนวณ ได้วิธีที่ดีและมีประสิทธิภาพมากกว่า คือ การนำตารางความน่าจะเป็นแบบสะสมมาใช้ เพราะว่าตารางนี้ได้สะสมความน่าจะเป็นของแต่ละค่าไว้เรียบร้อยแล้ว (ซึ่งได้มาจากการสะสมความน่าจะเป็นของค่าเดี่ยว ๆ นั่นเอง) ซึ่งทำให้ประหยัดเวลาในการคำนวณ และแก้ปัญหาการเกิดความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณได้ด้วย

รูปร่างของตารางแบบสะสมจะคล้าย ๆ กับตารางเฉพาะค่าเดี่ยว ๆ วิธีการใช้ก็เหมือนกัน คือเริ่มแรกเลือกค่า p ที่เราต้องการและดูค่า n ที่เราต้องการแล้วจึงเลือกจำนวนครั้งที่สำเร็จ (x) ค่าที่ตัดกันระหว่างสดมภ์ที่เลือก p และแถวที่เลือกค่า n และ x คือ ความน่าจะเป็นแบบสะสมที่ต้องการ ซึ่งความน่าจะเป็นแบบสะสมที่แสดงไว้ในตารางนี้เป็นความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ (s) จำนวน x ครั้ง หรือน้อยกว่า x ครั้ง $[\, P(X \leqslant x)\,]$ แทนที่จะเป็นความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ x ครั้งเท่านั้น อย่างในตารางความน่าจะเป็นเฉพาะค่าเดี่ยว ๆ

ตัวอย่างของตารางแบบสะสมแสดงไว้ในตารางที่ 7.1.2

ตาราง 7.1.2 Portion of a Cumulative Binomial Table

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50	.55	.60	.65
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000	.4500	.4000	.3500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500	.2025	.1600	.1225
	1	.9975	.9900	.9775	.9600	.9375	.9100	.8775	.8400	.7975	.7500	.6975	.6400	.5775
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n = 3 \rightarrow$ 3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250	.0911	.0640	.0429
	1	.9928	.9720	.9393	.8960	.8438	.7840	.7183	.6430	.5748	.5000	.4253	.3520	.2818
$x = 2 \rightarrow$	2	.9999	.9990	.9966	.9920	.9844	.9730	.9571	.9360	.9089	.8750	.8336	.7840	.7254
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625	.0410	.0256	.0150
	1	.9860	.9477	.8905	.8192	.7383	.6517	.5630	.4752	.3910	.3125	.2415	.1792	.1265
	2	.9995	.9963	.9880	.9728	.9492	.9163	.8735	.8208	.7585	.6875	.6090	.5248	.4370
	3	1.0000	.9999	.9995	.9984	.9961	.9919	.9850	.9744	.9590	.9375	.9085	.8704	.8215
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0313	.0185	.0102	.0053
	1	.9774	.9185	.8352	.7373	.6328	.5282	.4284	.3370	.2562	.1875	.1312	.0870	.0540
	2	.9988	.9914	.9734	.9421	.8965	.8369	.7648	.6826	.5931	.5000	.4069	.3174	.2352
	3	1.0000	.9995	.9978	.9933	.9844	.9692	.9460	.9130	.8688	.8125	.7438	.6630	.5716
	4	1.0000	1.0000	.9999	.9997	.9990	.9976	.9947	.9898	.9815	.9688	.9497	.9222	.8840
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ค่าที่วงกลมไว้ในตาราง คือ 0.9360 คือ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ 2 ครั้ง หรือน้อยกว่า 2 ครั้ง (คือ 0 หรือ 1 หรือ 2) จากการทดลอง 3 ครั้ง เมื่อความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ (s) เท่ากับ 0.40

ตารางแบบสะสมนี้ สามารถนำไปใช้ในการหาความน่าจะเป็นได้หลายแบบด้วยกัน ดังนี้

1. สามารถนำไปใช้ในการหาความน่าจะเป็นแบบสะสมได้โดยตรง คือ หาความน่าจะเป็นที่ X จะเท่ากับ หรือน้อยกว่าค่าที่กำหนดให้ (จำนวนครั้งที่จะเกิดความสำเร็จที่ต้องการ) คือ $P[X \leqslant x]$

2. สามารถนำไปใช้ในการหาความน่าจะเป็นที่ X จะมากกว่าจำนวนครั้งที่จะเกิดความสำเร็จที่ต้องการ คือ $P[X > x]$

3. สามารถนำไปใช้ในการหาความน่าจะเป็นที่ X จะเท่ากับจำนวนครั้งที่จะเกิดความสำเร็จที่ต้องการได้ คือ $P[X = x]$

ซึ่งการหาความน่าจะเป็นต่าง ๆ เหล่านี้ใช้หลักความจริงที่ว่าผลการทดลองที่ได้จากการทดลองเชิงสุ่ม เป็น Mutually exclusive และ Collectively exclusive ดังนั้นความน่าจะเป็นรวมกันทั้งหมดแล้วจะเท่ากับ 1 เช่น

ถ้าเราได้ $P[X \leqslant 6] = 0.72$

เราจะหา $P[X > 6]$ ได้จาก

$$
\begin{aligned}
P[X > 6] &= 1 - P[X \leqslant 6] \\
&= 1 - 0.72 \\
&= 0.28
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างเช่น ต้องการหาความน่าจะเป็นของจำนวนครั้งที่สำเร็จเท่ากับ 3 หรือน้อยกว่าในการทำการทดลอง 7 ครั้ง มีวิธีการดูง่าย ๆ โดยเขียนค่าของ outcomes ที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดแล้วขีดเส้นใต้ค่าของ outcomes ที่เราต้องการหา Probability ซึ่งจากตัวอย่าง เราทำได้ดังนี้ เริ่มแรกเขียนค่าที่จะเป็นไปได้ของ outcomes ทั้งหมด

0 1 2 3 4 5 6 7

ต่อไปขีดเส้นใต้ outcomes ที่เราสนใจในที่นี้ คือ

$\underbrace{\underline{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3}}_{}$ 4 5 6 7

(3 หรือน้อยกว่า)

จากตาราง 7.1.2 ให้ความน่าจะเป็นที่จะแสดงความสำเร็จ x ครั้ง หรือน้อยกว่า ดังนั้นก็ใช้ตาราง 7.1.2 หาได้โดยตรง

ถ้าต้องการความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จมากกว่า 3 (คือ 4, 5, 6, หรือ 7) ก็หาได้จากการเอาความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ 3 ครั้ง หรือน้อยกว่าไปลบออกจาก 1 ดังนี้

(1)

0 1 2 3 4 5 6 7

(ค่าที่เปิดจากตาราง 7.1.2) (1 – ค่าที่เปิดจากตาราง 7.1.2)

นอกจากนี้ตารางแบบสะสมยังใช้ในการหาความน่าจะเป็นของค่าเดี่ยว ๆ ได้ ตัวอย่างเช่น ต้องการหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ 4 ครั้งเท่านั้น ก็หาได้ดังนี้ คือ

$$P[X = 4] = P[X \leqslant 4] - P[X \leqslant 3]$$

$\underbrace{\underbrace{0\ 1\ 2\ 3}\ 4}\ 5\ 6\ 7$

พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้ ถ้า p (Success) = 0.50 และ n = 4 ใช้ตารางความน่าจะเป็นแบบสะสมหา $P[X = 3]$

$P[X \leqslant 3]$ รวมค่า 0, 1, 2, 3	ซึ่งเท่ากับ	0.9375
$P[X \leqslant 2]$ รวมค่า 0, 1, 2	ซึ่งเท่ากับ	0.6875
$P[X = 3]$ รวมค่า 3	ซึ่งเท่ากับ	0.2500

ตาราง 7.1.3 อธิบายวิธีการใช้ตารางแบบสะสมแบบต่าง ๆ ว่าความน่าจะเป็นที่ต้องการจะหาได้อย่างไรบ้าง

ตาราง 7.1.3

การใช้ตารางความน่าจะเป็นแบบสะสมของการแจกแจงแบบทวินาม

ก. outcomes **ที่ต้องการหา**

	n = 10	outcomes 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	อ่านจากตารางแบบสะสม
$P[X \leq 6]$	6 หรือน้อยกว่า	0 1 2 3 4 5 6	อ่านได้โดยตรงจาก P(6)
$P[X < 6]$	น้อยกว่า 6	0 1 2 3 4 5	อ่านได้โดยตรงจาก P (5)
$P[X \geq 6]$	6 หรือมากกว่า	6 7 8 9 10	1 − P(5)
$P[X > 6]$	มากกว่า 6	7 8 9 10	1 − P(6)
$P[X = 6]$	6	6	P(6) − P(5)

ข. ความน่าจะเป็นดังกล่าวข้างต้น โดยใช้ $p = 0.30$ และ $n = 10$ โดยใช้ตารางท้ายเล่ม

$P[X \leq 6] = 0.9894$

$P[X < 6] = 0.9527$

$P[X \geq 6] = 1 - 0.9527 = 0.0473$

$P[X > 6] = 1 - 0.9894 = 0.0106$

$P[X = 6] = 0.9894 - 0.9527 = 0.0367$

ดังนั้นจากโจทย์ในตัวอย่างที่ 1, 2 และ 3 ที่กล่าวมาแล้วในตอนต้นเราสามารถหาความน่าจะเป็นที่โจทย์ต้องการโดยใช้ตารางทั้ง 2 ตารางนี้ได้ทันทีโดยไม่ต้องเสียเวลาไปคำนวณจำนวนทางเลือก (Combination) และกำลังของ p และ q เว้นเสียแต่ว่าในกรณีที่เราไม่มีตารางความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบทวินามทั้ง 2 แบบ เราก็ต้องทำการคำนวณโดยวิธีที่กล่าวมาแล้วข้างต้น

คุณสมบัติของการแจกแจงแบบทวินาม (Characteristics of Binomial Distribution)

การแจกแจงแบบทวินาม มีคุณสมบัติดังนี้ คือ

1. ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบทวินาม (μ) เท่ากับ np คือ

$$\mu = np$$

2. ความแปรปรวนของการแจกแจงแบบทวินาม (σ^2) เท่ากับ npq คือ

$$\sigma^2 = npq$$

3. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงแบบทวินาม (σ) เท่ากับ $\sqrt{npq}$ คือ

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

ตัวอย่างที่ 1

ทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง 180 ครั้ง จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนครั้งที่จะได้หน้า 6

ในที่นี้ความน่าจะเป็นที่จะได้หน้า 6 $= \frac{1}{6} = p \quad \therefore q = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

n = 180 ครั้ง

$\therefore$ จาก $\mu = np$

แทนค่า $\mu = 180\times\frac{1}{6} = 30$

จาก $\sigma = \sqrt{npq}$

$$\therefore \quad \sigma \cong \sqrt{180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}$$

$$= 5$$

ตัวอย่างที่ 2

ถ้าลูกแมวครอกหนึ่งมี 6 ตัว ให้ X เป็นจำนวนลูกแมวตัวผู้ในครอกหนึ่ง ๆ จงหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X

ในที่นี้ $p = \frac{1}{2}$ (ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแมวตัวผู้)

$\therefore \quad q = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแมวตัวเมีย)

และ $\quad n = 6$

$\therefore$ ค่าเฉลี่ย $= 6\times\frac{1}{2} = 3$

$\therefore$ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \sqrt{1.5} = 1.225$

7.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution)

การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงที่มีบทบาทสำคัญมากในทางสถิติ ซึ่งการแจกแจงนี้เป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variables) และการแจกแจงนี้กำหนดฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นไว้ดังนี้

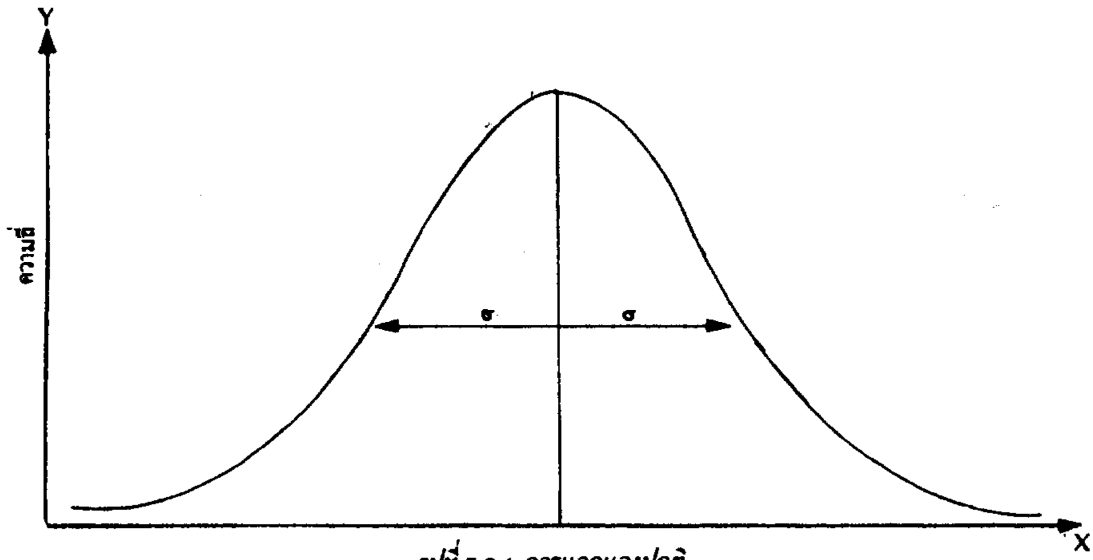
$$P[X = x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$$

เมื่อ μ, σ เป็นค่าคงที่ และ $\sigma > 0$

$e = 2.71728....$

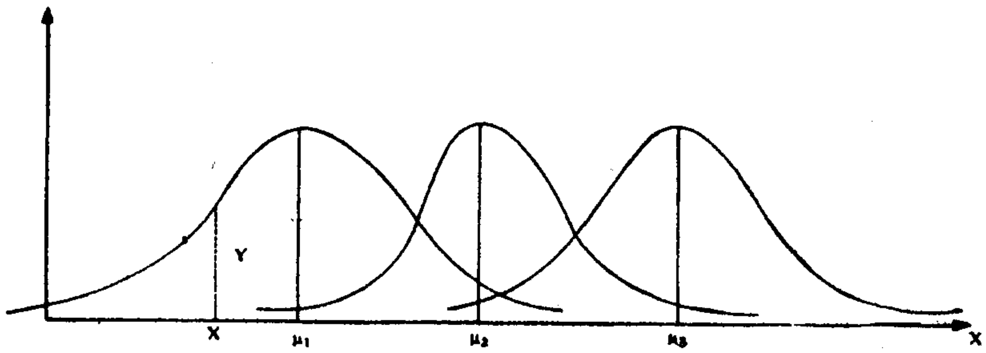
$\pi = 3.14159$

รูปร่างของโค้งปกติ (Normal Curve) จะมีลักษณะเหมือนระฆังคว่ำ และมีลักษณะสมมาตร ส่วนสูงสุดของเส้นโค้งอยู่ตรงกลางพอดี ซึ่งตรงกับค่าเฉลี่ย (μ) ดังรูป 7.2.1



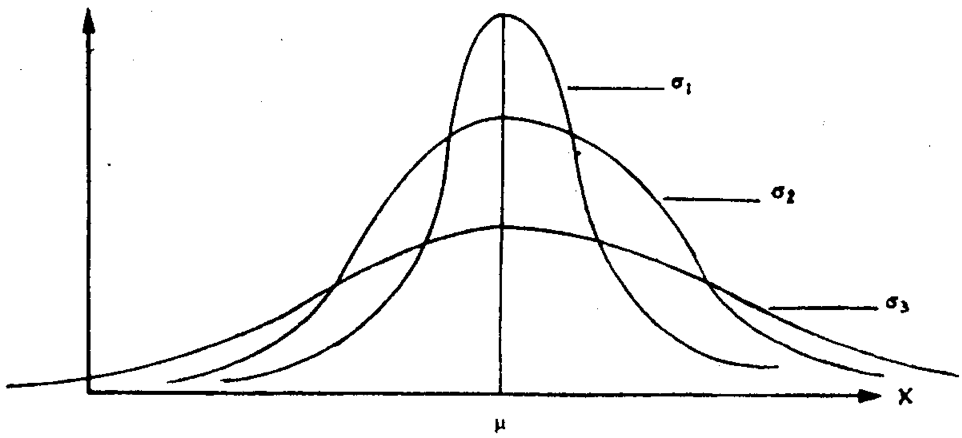
รูปที่ 7.2.1 การแจกแจงปกติ

เนื่องจากการแจกแจงแบบปกติ จะขึ้นอยู่กับค่า μ และ σ โดยที่ μ จะแสดงที่ตั้งของโค้ง หรือแกนกลางของโค้งและ σ แสดงรูปร่างของโค้งว่าเป็นโค้งที่กว้างหรือโค้งที่แคบ ดังนั้นถ้าเรากำหนด σ คงที่ และให้ μ เปลี่ยนแปลงไปแล้วโค้งปกติจะมีรูปร่างเหมือนเดิมแต่จุดสมมาตรจะเปลี่ยนแปลงไป ดังรูปต่อไปนี้ รูปที่ 7.2.2



รูปที่ 7.2.2 การแจกแจงปกติที่มี σ เท่ากันแต่ μ ต่างกัน

ถ้าเรากำหนดให้ μ คงที่ และให้ σ เปลี่ยนแปลงไปรูปร่างของโค้งปกติจะไม่เหมือนกัน แต่จุดสมมาตรจะอยู่ที่เดียวกัน ดังรูป 7.2.3



รูป 7.2.3

แสดงการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากันแต่ส่วนเบี่ยงเบนต่างกัน

คุณสมบัติของโค้งปกติ (Characteristic of Normal curve)

คุณสมบัติของโค้งปกติที่น่าสนใจมีดังนี้ คือ

1. โค้งของการแจกแจงแบบปกติจะเป็นรูประฆังคว่ำ

2. มีลักษณะสมมาตร

3. พื้นที่ใต้โค้งรวมกันจะมีค่าเท่ากับ 1

4. การแจกแจงปกติเป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous random variable) โดยที่ค่าของตัวแปรเชิงสุ่มมีได้ไม่จำกัด จาก $-\infty$ ถึง $+\infty$

5. การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มที่มีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ μ และ σ^2 เขียนสัญลักษณ์แทนสั้น ๆ ได้ดังนี้

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ อ่านว่า X มีการแจกแจงเป็นแบบปกติ (Normal distribution) ที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 เช่น การแจกแจงที่มีค่าเฉลี่ย 3 ความแปรปรวน 2 เขียนเป็น N (3, 2) เป็นต้น

การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution)

เนื่องจากเส้นโค้งปกติขึ้นอยู่กับค่า μ และ σ ดังนั้นจึงมีเส้นโค้งปกติแตกต่างกันมากมายหลายแบบ และเพื่อให้มีเส้นโค้งปกติ แบบมาตรฐานแบบหนึ่ง โดยทั่วไปจึงสร้างเส้นโค้งปกติมาตรฐานที่มี $\mu = 0$ และ $\sigma = 1$ นั่นคือ เราสามารถเปลี่ยนเส้นโค้งใด ๆ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย μ และ ความแปรปรวน σ^2 ให้เป็นโค้งปกติมาตรฐาน ด้วยการแปลงค่าตามสูตร

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

ซึ่ง Z จะมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวนเท่ากับ 1 หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้ คือ $Z \sim N(0, 1)$ และเราเรียกตัวแปรเชิงสุ่ม Z ว่าเป็น Standard Normal Random Variable ซึ่งตัวแปรเชิงสุ่ม Z จะมีฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นที่ง่ายกว่าเดิม คือ

$$P[Z = z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad ; \; -\infty < z < +\infty$$

การที่ต้องแปลงโค้งปกติใด ๆ ให้เป็นโค้งปกติมาตรฐานเนื่องจากตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติเรามีแต่ตาราง Z ซึ่งมีอยู่ที่ท้ายเล่มของหนังสือเล่มนี้ ดังนั้น เมื่อต้องการหา

พื้นที่ (ความน่าจะเป็น) ระหว่างจุดใด ๆ ภายใต้โค้งปกติ จึงต้องแปลงค่าจุดนั้นให้อยู่ในรูปของตัวแปรเชิงสุ่มแบบปกติมาตรฐานก่อน โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

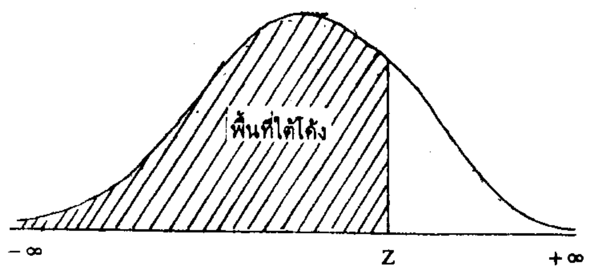
แล้วจึงเปิดตารางหาพื้นที่ (ความน่าจะเป็น) ที่ต้องการได้

ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ

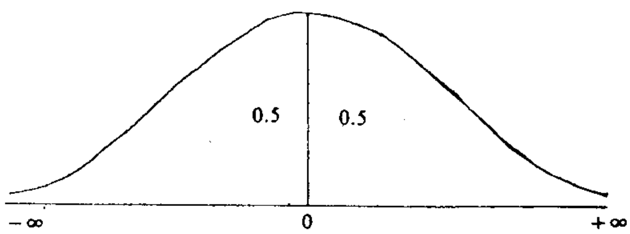
เป็นตารางที่แสดงค่าสะสมพื้นที่จากปลายซ้ายของโค้งไปสู่ปลายขวาของโค้ง ดังนั้น การหาพื้นที่ใต้โค้งจึงเป็นแบบสะสม คือ

$P[Z \leqslant z]$ ซึ่งถ้าจะหา $P[Z > z]$ ก็หาได้จาก $1 - P[Z \leqslant z]$

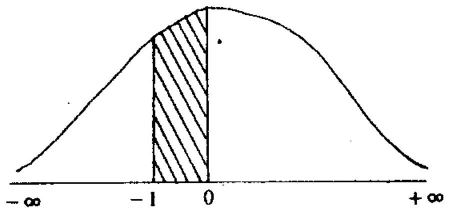
ดูจากรูปส่วนที่แรเงา คือ พื้นที่ใต้โค้ง ซึ่งเราสามารถอ่านได้โดยตรงจากตาราง

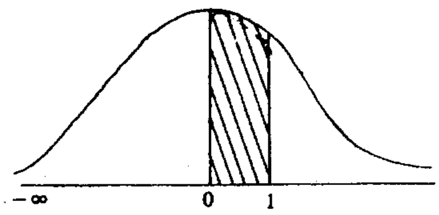


และเนื่องจากลักษณะของโค้งปกติมีลักษณะสมมาตร ดังนั้น ถ้าลากจากจุดสูงสุดของโค้งมาตัดกับแกน Z เส้นที่ลากมานี้จะตั้งฉากกับแกน Z และจะแบ่งพื้นที่ใต้โค้งออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน คือ ซีกซ้ายมือและขวามือ ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ 0.5 ($\because$ พื้นที่ใต้โค้งรวมกันเท่ากับ 1)

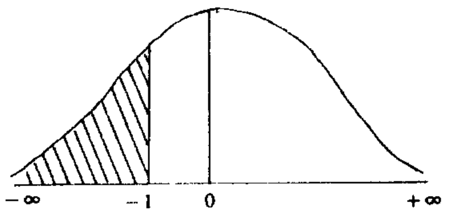


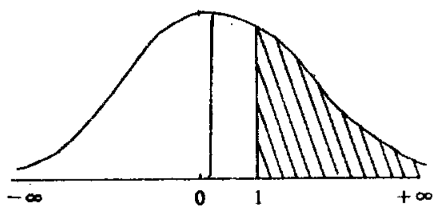
ดังนั้น การหาพื้นที่ระหว่างค่า Z เท่ากับ 0 ถึง 1 จะมีค่าเท่ากับการหาพื้นที่ระหว่างค่า Z เท่ากับ −1 ถึง 0





หรือพื้นที่ใต้โค้งตั้งแต่ −∞ ถึง −1 ก็จะเท่ากับพื้นที่ใต้โค้งตั้งแต่ 1 ถึง ∞





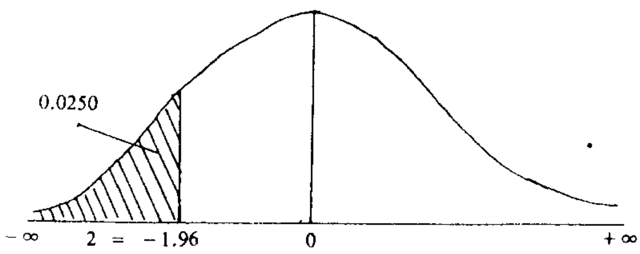
วิธีใช้ตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ

ก่อนใช้ตารางต้องเปลี่ยนค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม X ให้เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม Z เสียก่อนจาก

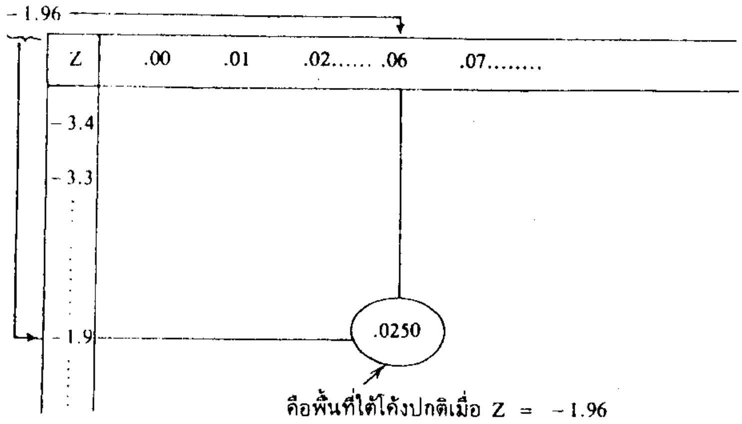
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

เมื่อเปลี่ยนแล้วก็นำไปเปิดตารางหาพื้นที่ (ความน่าจะเป็น) ใต้โค้งปกติได้

รูปร่างของตารางจะประกอบด้วย ค่า Z และพื้นที่ใต้โค้ง สำหรับค่า Z นั้นจะอยู่ทั้งทาง row และ column โดยที่ทาง row คือค่า Z ที่เป็นจำนวนเต็มและทศนิยมตำแหน่งที่ 1 ซึ่งจะเริ่มตั้งแต่ −3.4 จนถึง 3.4 ส่วนทาง column คือ ค่า Z ที่เป็นทศนิยมตำแหน่งที่ 2 ซึ่งจะเริ่มตั้งแต่ 0.00, 0.01 จนถึง 0.09 และค่าในตารางที่อยู่ตรง row ตัดกับ column ที่ต้องการจะเป็นพื้นที่ (ความน่าจะเป็น) ใต้โค้งที่ต้องการ เช่น จะหาพื้นที่ใต้โค้งที่ Z = −1.96 ก็ให้ดูค่า Z ทาง row จาก −3.4 ไล่ไปเรื่อย ๆ จนถึง −1.9 ซึ่งยังไม่ครบขาดอีก 0.06 ต้องดูค่า Z ทาง column จาก .00 ไล่ไปเรื่อย ๆ จนถึง 0.06 ค่าของพื้นที่ในตารางตรงที่ตัดกันระหว่าง row และ column ดังกล่าว จะเป็นค่าความน่าจะเป็นหรือพื้นที่ใต้โค้งตามต้องการ ซึ่งในที่นี้ คือ 0.0250



เขียนรูปแสดงได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติที่มี $\mu = 68, \sigma = 2.5$ จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรเชิงสุ่ม X จะมีค่าระหว่าง 73 ถึง 75.5

จากโจทย์ ให้ $x_1 = 73, \; x_2 = 75.5$

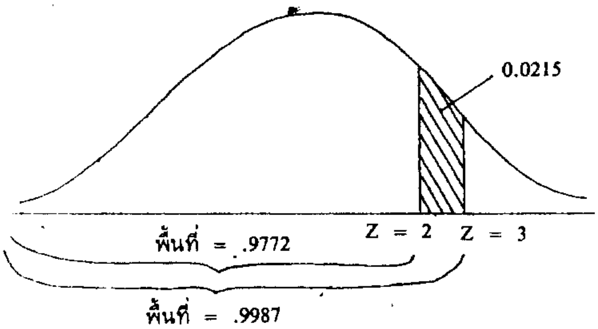
ต้องการหา $P[73 < X < 75.5]$

ดังนั้นต้องแปลงค่า X ให้เป็นค่าของ Z เสียก่อน

จาก $x_1 = 73 \quad \therefore z_1 = \frac{73-68}{2.5} = 2$

$x_2 = 75.5 \quad \therefore z_2 = \frac{75.5-68}{2.5} = 3$

$$\begin{aligned} \therefore P[73 < X < 75.5] &= P[2 < Z < 3] \\ &= P[Z \leqslant 3] - P[Z \leqslant 2] \\ &= 0.9987 - 0.9772 = 0.0215 \end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 2

การแจกแจงความสูงของนักเรียนเป็นแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 2.3 และ 0.3 นิ้ว ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นของเด็กที่มีความสูง 3.1 นิ้ว หรือมากกว่า และระหว่าง 2.0 กับ 2.5 นิ้ว

การคำนวณต้องแปลงค่าของ X ให้เป็นค่าของ Z ก่อน

จาก $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

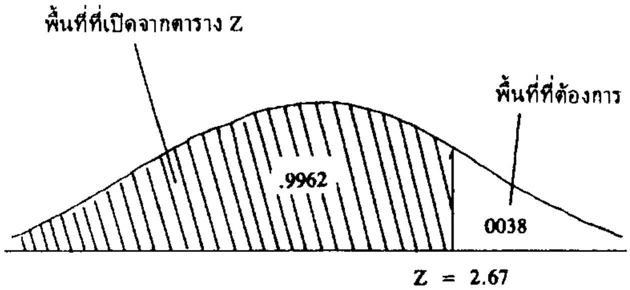
$\therefore$ เมื่อ $x = 3.1$

ค่า $z = \dfrac{3.1-2.3}{0.3} = 2.67$

ต้องการหา $P[X \geqslant 3.1]$ นั่นคือหา $P[Z \geqslant 2.67]$

จากตารางเรามี $P[Z \leqslant 2.67]$ ซึ่ง $= 0.9962$

เมื่อพื้นที่ใต้โค้งปกติทั้งหมด เท่ากับ 1 เราสามารถหา $P[Z \geqslant 2.67]$ ได้ดังรูป



$\therefore P[Z \geq 2.67] = 1 - P[Z \leq 2.67]$

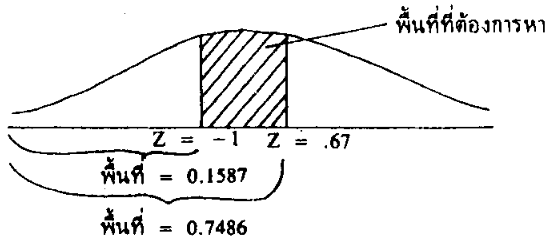
$= 1 - 0.9962$

$= 0.0038$

ถ้าต้องการหา $P[2.0 < X < 2.5]$

ให้ $x_1 = 2.0,\ x_2 = 2.5$

$\therefore z_1 = \dfrac{2.0 - 2.3}{0.3} = -1$ และ $z_2 = \dfrac{2.5 - 2.3}{0.3} = 0.67$



$\therefore P[2.0 < X < 2.5] = P[-1 < Z < 0.67]$

$= P[Z \leq 0.67] - P[Z \leq -1]$

$= 0.7486 - 0.1587$

$= 0.5899$

จากตัวอย่างที่ 2 อันเดิม จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กต่ำกว่าความสูงนี้ ถึง 20%

นั่นคือ $P[X = ?] = 0.20$

หรือ $P[Z < \dfrac{x - 2.3}{\sigma}] = 0.20$

ให้หาว่าค่า X มีค่าเท่าใด

จากตารางพื้นที่ใต้โค้ง = 0.2000 ตรงกับค่า $z = -0.84$

$\therefore P[Z < \dfrac{x - 2.3}{0.3}] = P[Z \leq -0.84]$

$\therefore \dfrac{x - 2.3}{0.3} = -0.84$

$x = 0.3(-0.84) + 2.3$

$= -0.2520 + 2.3000$

$= 2.0480$

$\therefore$ ความสูง 2.0480 นิ้ว จะทำให้มีเด็กต่ำกว่าความสูงนี้ 20%

7.3 การประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงปกติ (Normal Approximation to the Binomial)

การใช้ตารางทวินามหาค่าของความน่าจะเป็นของตัวแปรเชิงสุ่มจะมีข้อจำกัด **คือ** เมื่อ n **มีค่าโต** เรามักจะไม่ค่อยมีตารางใช้ เพราะการพิมพ์ตารางจะต้องใช้เนื้อที่มาก เราจึงใช้วิธีการของการแจกแจงแบบปกติมาคำนวณความน่าจะเป็นดังกล่าวแทน แต่เนื่องจากการแจกแจงทวินามเป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่ม แบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable) แต่การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงของตัวแปรเชิงสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable) ดังนั้นการใช้วิธีการคำนวณหาความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปกติมาคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นการแจกแจงแบบทวินาม ค่าที่ได้จึงเป็นค่าประมาณ (Approximated value) เท่านั้น แต่ก็จะใกล้เคียงความจริงมาก ถ้าค่าของ p (ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ) มีค่าเข้าใกล้ $\frac{1}{2}$ และ n มีค่าโต

วิธีการประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบทวินามด้วยการแจกแจงแบบปกติมีดังนี้ คือ เมื่อตัวแปรเชิงสุ่ม X มีการแจกแจงแบบทวินามที่มีค่าเฉลี่ย (μ) = np และความแปรปรวน (σ^2) = npq ($\therefore \sigma = \sqrt{npq}$) ดังนั้น ตัวแปรเชิงสุ่ม $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ จะคือ

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

จะมีการแจกแจงแบบ N (0, 1) โดยประมาณ และสามารถหาค่าความน่าจะเป็นแบบทวินามด้วยตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติ

ตัวอย่าง

สุ่มสินค้ามา 50 ชิ้น จากกระบวนการผลิตหนึ่งที่มีสินค้าชำรุด 10% จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีสินค้าชำรุด 12 ชิ้น

จากโจทย์ n = 50, p = 0.10

จะเห็นได้ว่า n มีค่าโต จึงใช้ประมาณด้วยการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งในที่นี้

$\mu = np = 50 \times 0.10 = 5$

$\sigma^2 = npq = 50 \times 0.10 \times 0.90 = 4.5$

$\therefore \sigma = \sqrt{4.5} = 2.12$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะมีสินค้าชำรุดเกิน 3 ชิ้น คือ

$$
\begin{aligned}
P[X > 3] &= P[Z > \frac{3-5}{2.12}] \\
&= P[Z > \frac{-2}{2.12}] \\
&= P[Z > -0.94] \\
&= 1 - P[Z \leqslant -0.94] \\
&= 1 - 0.1736 \\
&= 0.8264
\end{aligned}
$$

ซึ่งถ้าหาโดยใช้ตารางการแจกแจงทวินามจะได้ (ใช้ตารางแบบสะสม)

$$
\begin{aligned}
P[X > 3] &= 1 - P[X \leqslant 3] \\
&= 1 - 0.2503 \\
&= 0.7497
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่าค่าที่ได้จะต่างกันมากเพราะค่าของ $p = 0.10$ แต่จะได้ค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นถ้า $p = 0.50$

แบบฝึกหัด

1. จงอธิบายความหมายของคำต่อไปนี้

   ก. การแจกแจงแบบทวินาม

   ข. การแจกแจงแบบปกติ

   ค. การแจกแจงแบบปัวซอง

2. ในโรงงานอุตสาหกรรมทำเสื้อผ้าสำเร็จรูปแห่งหนึ่งมีคนงาน 75% เป็นผู้หญิง และ 25% เป็นผู้ชาย ให้ Y เป็นตัวแปรเชิงสุ่มที่มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อคนงานที่สุ่มได้เป็นผู้หญิงและมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อคนงานที่สุ่มได้เป็นผู้ชาย จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ Y

3. สมมติสถานศึกษาแห่งหนึ่งมี 20% เป็น Seniors เลือกคณะกรรมการชุดหนึ่ง 20 คน อย่างสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้จะประกอบด้วย

   ก. Senior 11 คน

   ข. Senior มากกว่า 10 คน

   ค. Senior 5 หรือน้อยกว่า 5 คน

   ง. ไม่มี Senior เลย

4. ให้ X เป็นจำนวนนักศึกษาชายที่สุ่มมาจำนวน 30 คน จากจำนวนนักศึกษาทั้งหมดที่มีนักศึกษาชาย 50% จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างจะประกอบด้วย

   ก. ผู้หญิง 15 คน

   ข. ผู้ชาย 20 คน

   ค. ผู้หญิงอย่างมากที่สุด 10 คน

   ง. ผู้ชายอย่างน้อยที่สุด 10 คน

   จ. ผู้ชายระหว่าง 12 และ 14 คน

5. จากจำนวนครอบครัว 3,200 ครอบครัวที่มีเด็ก 5 คน จงคาดหมายว่ามีกี่ครอบครัวที่มี

ก. เด็กผู้ชาย 5 คน

ข. เด็กผู้หญิง 5 คน

ค. เด็กผู้ชายอย่างน้อยที่สุด 2 คน

ง. เด็กผู้ชายอย่างมากที่สุด 2 คน

จ. เด็กผู้หญิง 1 คน หรือเด็กผู้หญิง 2 คน

ฉ. เด็กผู้หญิงทั้งหมดหรือเด็กผู้ชายทั้งหมด

ช. เด็กผู้ชาย 2 คน หรือ 3 คน

6. สมมติว่ามี 10% ของสกรูที่ผลิตจากเครื่องจักรอัตโนมัติเครื่องหนึ่งเป็นสกรูที่ใช้ไม่ได้ จงหาความน่าจะเป็นที่สกรู 30 ตัว ที่เลือกมาอย่างสุ่มจะมี

ก. สกรูที่ใช้ไม่ได้อย่างมากที่สุด 3 ตัว

ข. สกรูที่ไม่ได้อย่างน้อยที่สุด 3 ตัว

ค. สกรูที่ใช้ไม่ได้ระหว่าง 2 ถึง 4 ตัว

7. ให้ X เป็นจำนวนหัวที่ได้จากการทอดเหรียญ 50 ครั้ง จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X

8. จงอธิบายว่าการกระจายแบบปัวซอง เกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบทวินามอย่างไร

9. กำหนดให้การแจกแจงของปัวซองเป็นดังนี้

$$P(x) = e^{-2}\,\frac{2^{x}}{x!}$$

จงหาความน่าจะเป็นเมื่อ $x = 0, 1, 2, 3$ และ 4

10. สมมติว่า 1% ของขวดที่ผลิตมาจากเครื่องจักรเครื่องหนึ่งเป็นขวดที่ใช้ไม่ได้ ถ้าสุ่มขวดมา 300 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. ขวดทั้งหมดเป็นขวดดี

ข. ขวด 2 หรือ 3 ใบ ใช้ไม่ได้

ค. ขวด 2 หรือมาก 2 ใบ ใช้ไม่ได้

11. การกระจายแบบปัวซองเกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบปกติอย่างไร

12. สมมติว่าในถนนสายหนึ่งมีอุบัติเหตุเฉลี่ยแล้ววันละ 4 รายจงหาความน่าจะเป็นที่ในวันหนึ่ง ๆ ในถนนสายดังกล่าว

ก. จะไม่มีอุบัติเหตุเกิดขึ้นเลย

ข. จะมีอุบัติเหตุเกิดขึ้น 3 หรือน้อยกว่า 3 ครั้ง

ค. จะมีอุบัติเหตุเกิดขึ้น 3 หรือมากกว่า 3 ครั้ง

13. จงอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบทินามและการแจกแจงแบบปกติ

14. ให้ $X \sim N(100, 225)$ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

ก. $P(X \leq 92.5)$

ข. $P(X \geq 76)$

ค. $P(X \leq 107.5)$

ง. $P(X \geq 124)$

จ. $P(77.5 \leq X \leq 100)$

ฉ. $P(112 \leq X \leq 128.5)$

ช. $P(91 \leq X \leq 127)$

ซ. $P(71.35 \leq X \leq 109)$

15. จงหาค่า k จาก

ก. $P(Z \geq k) = 0.95$

ข. $P(Z \geq k) = 0.99$

ค. $P(Z \geq k) = 0.05$

ง. $P(Z \geq k) = 0.01$

จ. $P(Z \geq k) = 0.7438$

ฉ. $P(Z \geq k) = 0.6045$

ช. $P(Z \leq k) = 0.1250$

ซ. $P(Z \leq k) = 0.8000$

16. สมมติว่ารายได้ต่อวันของลูกจ้างที่ทำงานฟาร์ม 10,000 คน มีการกระจายเป็นแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 110 บาท และ ความแปรปรวนเท่ากับ 64 จงหาจำนวนลูกจ้างที่ได้รายได้ต่อวันดังนี้

ก. รายได้เท่ากับ 100 หรือน้อยกว่า 100 บาท

ข. รายได้เท่ากับ 125 หรือน้อยกว่า 125 บาท

ค. รายได้เท่ากับ 90 บาท หรือมากกว่า 90 บาท

ง. รายได้เท่ากับ 106 หรือมากกว่า 106 บาท

จ. รายได้ระหว่าง 100 บาทถึง 120 บาท

17. ทำไมเราจึงต้องประมาณการแจกแจงทวินามด้วยการแจกแจงแบบปกติ

18. ทอดเหรียญอันหนึ่ง 64 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ต่อไปนี้

ก. จำนวนหัวเท่ากับจำนวนก้อย

ข. จำนวนหัวมากกว่า 34

ค. จำนวนหัวน้อยกว่า 32

ง. จำนวนหัวอยู่ระหว่าง 30 และ 36 แต่ไม่รวม 30 หรือ 36

19. ถ้าคะแนนสอบชุดหนึ่งมีการกระจายแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 100 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 20 จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้คะแนนระหว่าง 90 ถึง 110

20. สำหรับเหรียญมาตรฐานเหรียญหนึ่งที่มี $P = \frac{1}{2}$ และ $PQ = \frac{1}{4}$ ถ้า $N = 100$ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัว 50 หัวในการทดลองโยนเหรียญดังกล่าว 100 ครั้ง