บทที่ 3
เทคนิคทำให้เรียบ

เทคนิคทำให้เรียบเป็นการกำหนดตัวถ่วงน้ำหนักของข้อมูลก่อนหน้า และ ข้อมูลใกล้ปัจจุบันที่สุดเพื่อเป็นค่าเฉลี่ยที่ใช้ในการพยากรณ์ ซึ่งเทคนิคนี้จะเป็นการกำจัดปัจจัยสุ่มออกจากข้อมูลเดิม ข้อมูลที่ได้จะเป็นการกำหนดรูปแบบของแนวโน้ม หรือรูปแบบของฤดูกาล หรืออาจจะเป็นทั้งสองรูปแบบ เทคนิคทำให้เรียบสามารถแบ่งได้หลายวิธีแต่มีหลักใหญ่ ๆ คือ วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ (moving average) และ วิธีทำให้เรียบของเอกซ์โปเนนเชียล (exponential smoothing)

3.1 วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving Average)

วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ เป็นการกำหนดตัวถ่วงน้ำหนักค่าเท่ากันให้กับแต่ละข้อมูล ที่นำมาเฉลี่ย แล้วใช้ค่าเฉลี่ยที่ได้เป็นค่าพยากรณ์สำหรับช่วงเวลาถัดไป แต่ต้องกำหนดจำนวนเทอมที่จะเฉลี่ยให้แน่นอนตายตัวตลอดการพยากรณ์ วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ อาจแยกเป็นวิธีดังนี้

3.1.1 การเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่าย (Simple Moving Average)

การพยากรณ์ด้วยวิธี Naive ถ้าปัจจัยสุ่มรวมอยู่ในอนุกรมเวลา การพยากรณ์ด้วยวิธีนี้ ก็จะตัดสินใจได้หลายทาง จึงต้องเป็นเทคนิคที่ไม่เหมาะสม ควรจะกำจัดปัจจัยสุ่มนั้นออกจากข้อมูลโดยการหาค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตที่ใกล้ปัจจุบันที่สุด วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ ทำโดยนำเซตของค่าสังเกตมาหาค่าเฉลี่ย แล้วนำค่าเฉลี่ยที่ได้เป็นค่าพยากรณ์ของช่วงเวลาที่จะมาถึง จำนวนค่าสังเกตจริงที่จะนำมาหาค่าเฉลี่ยต้องกำหนดโดยผู้บริหาร และต้องเป็นค่าคงตัวตลอดการพยากรณ์ การพยากรณ์วิธีนี้ให้นำค่าสังเกตใหม่ (หรือปัจจุบันกว่า) และตัดค่าสังเกตเก่าที่สุดทิ้ง นำมาหาค่าเฉลี่ยใหม่ นำค่าเฉลี่ยใหม่ที่ได้ใช้เป็นค่าพยากรณ์ของช่วงเวลาถัดไป

การพยากรณ์ค่าในวาระที่ t+1 หาได้จาก

$$F_{t+1} = 1/N\ [\ X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + \dots + X_{t-N+1}\ ]$$

เมื่อ F_{t+1} เป็นค่าพยากรณ์ในวาระที่ t+1 $\quad X_t$ เป็นค่าข้อมูล ณ วาระ t

X_{t-1} เป็นค่าข้อมูล ณ วาระ t - 1 $\quad X_{t-N+1}$ เป็นค่าข้อมูล ณ วาระ t-N+1

N เป็นจำนวนเทอมที่ต้องการทำการเฉลี่ย

ตัวอย่างที่ 3.1 บริษัทแห่งหนึ่งต้องการพยากรณ์ยอดขายรายเดือน โดยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่ ใช้ N = 3 เดือน และ N = 5 เดือน ดังมีข้อมูลต่อไปนี้

เดือน	ช่วงเวลา period	ยอดขาย	ค่าพยากรณ์ N = 3	e_t	$\lvert e_t \rvert$	e_t^2	ค่าพยากรณ์ N = 5	e_t	$\lvert e_t \rvert$	e_t^2
ม.ค.	1	2000								
ก.พ.	2	1350								
มี.ค.	3	1950								
เม.ย.	4	1975	1767	208	208	43264				
พ.ค.	5	3100	1758	1342	1342	1800964				
มิ.ย.	6	1750	2342	-592	592	350464	2075	-325	325	105625
ก.ค.	7	1550	2275	-725	725	525625	2025	-475	475	225625
ส.ค.	8	1300	2133	-833	833	693889	2065	-765	765	585225
ก.ย.	9	2200	1533	667	667	444889	1935	265	265	70225
ต.ค.	10	2770	1683	1087	1087	1181569	1980	-790	790	624100
พ.ย.	11	2350	2090	260	260	67600	1915	435	435	189225
ธ.ค.	12		2440				2034			
				รวม	5714	5108264			3055	1800025

ตารางที่ 3.1 แสดงการพยากรณ์ยอดขายล่วงหน้า 1 เดือนโดยการเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่าย

การคำนวณ ค่ายอดขายของเดือนเมษายน ค่าพยากรณ์ เมื่อ N = 3 หาได้จาก ค่าเฉลี่ยของยอดขายเดือนมกราคม , กุมภาพันธ์ และมีนาคม หรือแสดงในรูปสมการ คือ

$F_4 = (X_3 + X_2 + X_1) / 3 = (1950+1350+2000) / 3 = 1767$

และ $F_5 = (X_4 + X_3 + X_2) / 3 = (1975+1950+1350) / 3 = 1758$

$e_4 = X_4 - F_4 = 1975 - 1767 = 208$

$e_5 = X_5 - F_5 = 3100 - 1758 = 1342$

และสามารถคำนวณค่าเปอร์เซนต์ของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ยได้จาก

$$\text{MAPE} = \frac{1}{8}\sum_{t=4}^{11}\left|\frac{e_t}{X_t}\right| \times 100 = \frac{1}{8}\left[\frac{208}{1975}+\frac{1342}{3100}+\dots+\frac{260}{2350}\right] \times 100 = 1/8\,(279.1)$$

$$= 34.89\ \%$$

และค่ากำลังสองของความคลาดเคลื่อนหาได้จาก

$$\text{MSE} = 1/8 \sum e_t^2 = 1/8\, [43,264 + 1,800,964 + \dots + 67,600]$$

$$= (5,108,264) / 8 = 638,533$$

เมื่อ N = 5 การพยากรณ์ยอดขายของเดือนมิถุนายน หาได้จาก ค่าเฉลี่ยของยอดขายเดือนมกราคม , กุมภาพันธ์ , มีนาคม , เมษายน และ พฤษภาคม หรือได้สมการดังนี้

F_6 = $(X_5 + X_4 + X_3 + X_2 + X_1) / 5$ = (3100+1975+1950+1350+2000) / 5 = 2075

และ $F_7 = (X_6 + X_5 + X_4 + X_3 + X_2) / 5$ = (1750+3100+1975+1950+1350) / 5 = 2025

$e_6 = X_6 - F_6$ = 1750 - 2075 = -325

$e_7 = X_7 - F_7$ = 1550 - 2025 = -475

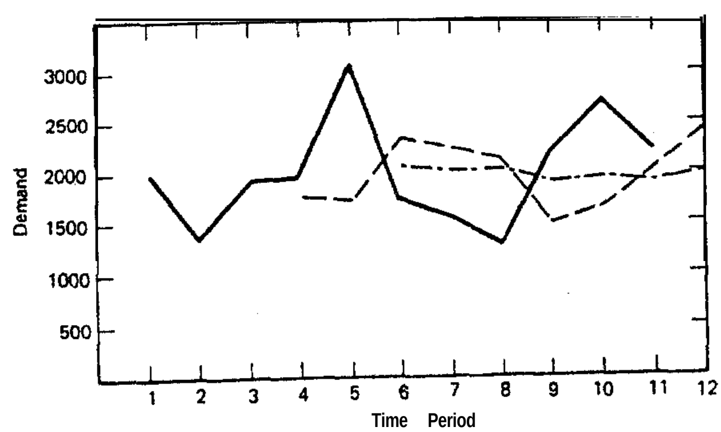
$$\text{MAPE} = \frac{1}{6}\left[\frac{325}{1750} + \frac{475}{1550} + \frac{765}{1300} + \frac{265}{2200} + \frac{790}{2770} + \frac{435}{2350}\right] \times 100$$

= 1 / 6 (167.1) = 27.86 %

MSE = 1/6 (105,625 + 225,625 + 585,225 + 70,225 + 624,100)

= (1,800,025) / 6 = 300,004

ความถูกต้องแม่นยำของการพยากรณ์วิธีนี้แสดงให้เห็นได้จากกราฟในรูปที่ 3.1 โดยมีเส้นกราฟของยอดขายจริงและกราฟของค่าพยากรณ์บนช่วง 3 เดือน และกราฟของค่าพยากรณ์บนช่วง 5 เดือน ดังนี้



Comparison of 3-Month and 5-Month Moving Average; Forecast for Demand for Knives (From Table 4-1), Actual Data ——; Three Month Moving Average — — — Five Month Moving Average —·—·—.

รูปที่ 3.1 กราฟเปรียบเทียบระหว่างยอดขายจริง , ค่าพยากรณ์ยอดขาย 3 MA , ค่าพยากรณ์ยอดขาย 5 MA

จากกราฟนี้ ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่มีสองคุณลักษณะที่ปรากฏให้เห็นเด่นชัด คือ ลักษณะที่หนึ่งก่อนการพยากรณ์ผู้บริหารสามารถเตรียมการได้ โดยต้องมีค่าข้อมูลในอดีตจำนวนมากพอที่จะทำการเฉลี่ยเคลื่อนที่ ดังนั้นจะไม่มีการพยากรณ์จนกว่าจะหมดคาบเวลาที่ 3 สำหรับการพยากรณ์แบบ 3 MAค่าเฉลี่ยจากค่าข้อมูล 3 คาบเวลาสามารถใช้เป็นค่าพยากรณ์ในคาบเวลาที่ 4 ได้ ในทำนองเดียวกันสำหรับการพยากรณ์แบบ 5 MA ก็ต้องเก็บข้อมูลจนสิ้นสุดคาบเวลาที่ 5 เพื่อหาค่าเฉลี่ยใช้เป็นค่าพยากรณ์ในคาบเวลาที่ 6 ในลักษณะที่สอง ค่าสังเกตใดที่มีค่ามากรวมอยู่ในการเฉลี่ยเคลื่อนใด ก็จะส่งผลกระทบต่อ ค่าพยากรณ์ จะได้ค่าพยากรณ์ที่โตกว่า เช่น ใน 3 MA ค่าพยากรณ์ต่ำสุดมีค่า 1533 และสูงสุดมีค่า 2440 มีพิสัย 907 ขณะที่ใน 5 MA มีค่าต่ำสุด 1915 และสูงสุด 2075 มีพิสัย 160 ดังนั้น อิทธิพลของการเพิ่มจำนวนช่วงเวลารวมอยู่ในการเฉลี่ยเคลื่อนที่มีผลกระทบต่อค่าพยากรณ์อย่างมาก ถ้าเราพอใจจำนวนช่วงเวลา (ที่นำมาเฉลี่ย) ที่มากกว่า เพราะเราคิดว่าค่าข้อมูลในอดีตประกอบด้วยปัจจัยสุ่มอย่างมาก หรือเป็นเพราะ เราคิดว่ามีการเปลี่ยนแปลงเล็ก ๆ น้อย ๆ ในรูปแบบของข้อมูล จำนวนค่าสังเกตที่มากอาจจะนำมาใช้ในการคำนวณค่าพยากรณ์ โดยวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่ ในทางตรงกันข้าม ถ้าเรารู้สึกว่าภายใต้รูปแบบของข้อมูลเปลี่ยนแปลงไป (และเราต้องการที่จะกระทำตอบของการขึ้นลงอย่างรวดเร็วมากกว่า) หรือ มีปัจจัยสุ่มเล็กน้อยในค่าสังเกตที่เก็บรวบรวมจำนวนของค่าสังเกตที่น้อยกว่า จะใช้ในการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ จากรูปที่ 3.1 จะแสดงได้ชัดถึงอิทธิพลของการเพิ่มจำนวนเทอมในการเฉลี่ยเคลื่อนที่ (จำนวนเทอมที่มากกว่าขอบเขตทำให้เรียบจะกว้างกว่าหรือค่าที่ใกล้ที่สุดค่าหนึ่ง จะเข้าหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้งหมด) จากตัวอย่างนี้ วิธีที่มีประโยชน์ของการตัดสินใจสำหรับ 3 MA หรือ 5 MA ว่าจะเหมาะสมในการพยากรณ์ยอดขายให้พิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนของแต่ละการพยากรณ์ จะได้ว่า ค่า MAPE และ MSE ของวิธีการพยากรณ์แบบ 5 MA จะมีค่าต่ำกว่า ดังนั้นจากข้อมูลในตัวอย่างควรใช้การพยากรณ์แบบ 5 MA จะเหมาะสมกว่า

ถึงแม้ว่าถ้าพิจารณาในแง่ของความคลาดเคลื่อนวิธีการพยากรณ์แบบ 5 MA จะดีกว่า 3 MA ผู้บริหารต้องคำนึงถึงความต้องการในข้อมูลสำหรับการเฉลี่ยเคลื่อนที่ 5 เดือน ต้องมีจำนวนมากกว่า 3 เดือน เมื่อแต่ละเดือนต้องพยากรณ์เป็นจำนวนหลายร้อยหลายพันหน่วย มี 67 % ที่เพิ่มขึ้นในข้อมูลซึ่งต้องเก็บไว้ สามารถที่จะแทนอย่างมีนัยสำคัญเกี่ยวกับค่าใช้จ่ายที่แตกต่างกัน ดังนั้น ถ้าข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาต้องเสียค่าใช้จ่ายสูงมาก ผู้บริหารอาจจะยังคงเลือกที่จะใช้การเฉลี่ยเคลื่อนที่แบบ 3 เดือนมากกว่า ดังนี้จึงเป็นหลักการที่ใช้ในการตัดสินใจทำการพยากรณ์แบบการเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่าย

3.1.2 การเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง (Double Moving Average)

วิธีนี้เริ่มจากการคำนวณเซตของการเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่ายเป็นพื้นฐานในการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อื่น ๆ วิธีนี้เหมาะสำหรับข้อมูลที่มีลักษณะเปลี่ยนแปลงแบบแนวโน้มเพิ่มขึ้น ตารางที่ 3.2

แสดงวิธีการคำนวณค่าพยากรณ์โดยวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง จากเซตของข้อมูลที่แทนยอดขายของสินค้าชนิดหนึ่ง คอลัมน์สองแสดงรายการค่าสังเกตของข้อมูลสำหรับ 25 ช่วงเวลา คอลัมน์ 3 ใช้ค่าสังเกตที่จะคำนวณการเฉลี่ยเคลื่อนที่ 4 เดือน คอลัมน์ 4 ใช้ค่าจากคอลัมน์ 3 เป็นพื้นฐานในการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ 4 เดือนซ้ำสองครั้ง นำข้อมูลใน คอลัมน์ 2 , 3 และ 4 ไป plot จุดแสดงตามรูปที่ 3.2 แสดงให้เห็นว่า การเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่าย ค่าพยากรณ์จะมีค่าต่ำกว่าค่าข้อมูลจริง เมื่อมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น และค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้งต่ำกว่าค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่าย ดังนั้นการพยากรณ์สามารถทำได้โดยหาผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่าย และค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง แล้วนำไปรวมกับค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่ายในคาบเวลาเดียวกัน วิธีนี้ที่ทำขึ้นเมื่อการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้งที่ประยุกต์ในการพยากรณ์เพื่อให้วิธีนี้สมบูรณ์ผู้ค้นคว้าได้พบว่า ถ้าวิธีนี้ปรับปรุงไปกับการเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่ายแปรผันอย่างช้า ๆ จากผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่อย่างง่ายและค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง ความถูกต้องแม่นยำของผลลัพธ์จะมีมากกว่า ดังนั้น ถึงแม้ว่า แนวความคิดภายใต้วิธีการนี้ยึดถือการคำนวณที่ถูกต้องเป็นสิ่งที่ต้องการมากกว่างานใด ๆ

ตัวแบบของการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง คือ

$$X_{t+m} = a_t + b_t m + \epsilon_t$$

เมื่อ X_{t+m} เป็นค่าข้อมูลจริง ณ วาระ t+m

m เป็นจำนวนวาระที่ต้องการพยากรณ์ล่วงหน้า $m = 1,2,\ldots$

a_t และ b_t เป็นค่าคงที่

ϵ_t เป็นค่าความคลาดเคลื่อนของตัวแบบ

และ $a_t = M_t' + (M_t' - M_t'') = 2M_t' - M_t''$

$b_t = [2/(N-1)](M_t' - M_t'')$

เมื่อ M_t' = ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ครั้งเดียว $= (X_t + X_{t-1} + \ldots + X_{t-N+1})/N$

M_t'' = ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ซ้ำสองครั้ง $= (M_t' + M_{t-1}' + \ldots + M'_{t-N+1})/N$

หรือ $M_t'' = M''_{t-1} + [(M_t' - M_{t-N}')/N]$

และได้สมการของการพยากรณ์ คือ

$$F_{t+m} = a_t + b_t m$$

ตัวอย่างที่ 3.2 พยากรณ์จำนวนสินค้าจากบัญชีด้วยการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง เมื่อ N = 4

คาบที่	จำนวนสินค้า	M_t'	M_t''	a_t	b_t	F_{t+m}	e_t
1	140						
2	159						
3	136						

คาบที่	จำนวนสินค้า	M_t'	M_t''	a_t	b_t	F_{t+m}	e_t
4	157	148.00					
5	173	156.25					
6	131	149.25					
7	177	159.50	153.250	165.750	4.167		
8	188	167.25	158.062	176.437	6.125	170.0	
9	154	162.50	159.625	165.375	1.917	182.5	
10	179	174.50	165.937	183.062	5.708	167.0	
11	180	175.25	169.875	180.625	3.583	189.0	
12	160	168.25	170.125	166.375	-1.250	184.0	
13	182	175.25	173.312	177.187	1.292	165.1	
14	192	178.50	174.312	182.687	2.792	178.5	
15	224	189.50	177.875	201.125	7.750	185.5	
16	188	196.50	184.937	208.062	7.708	209.0	
17	198	200.50	191.250	209.750	6.167	216.0	
18	206	204.00	197.625	210.375	4.250	216.0	
19	203	198.75	199.937	197.562	-0.792	214.6	
20	238	211.25	203.625	218.875	5.083	197.0	
21	228	218.75	208.187	229.312	7.042	223.9	
22	231	225.00	213.437	236.562	7.708	236.0	
23	221	229.50	221.125	237.875	5.583	244.0	
24	259	234.75	227.000	242.500	5.167	243.0	
25	273	246.00	233.812	258.188	8.125	248.0	
26						266.3	

ตารางที่ 3.2 แสดงการพยากรณ์ด้วยวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง

การคำนวณ $M_4' = (X_4 + X_3 + X_2 + X_1)/4 = (157+136+159+140)/4 = 148$

$M_7'' = (M_7' + M_6' + M_5' + M_4')/4 = (159.50+149.25+156.25+148) = 153.25$

$a_7 = 2M_7' - M_7'' = 2(159.50) - 153.25 = 165.75$

$b_7 = (2/3)(M_7' - M_7'') = (2/3)(159.50 - 153.25) = 4.167$

สำหรับการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 วาระ จะได้ค่าพยากรณ์ในวาระที่ 8 คือ

$$F_{7+1} = a_7 + b_7(1) = F_8 = 165.75 + 4.167 = 170$$

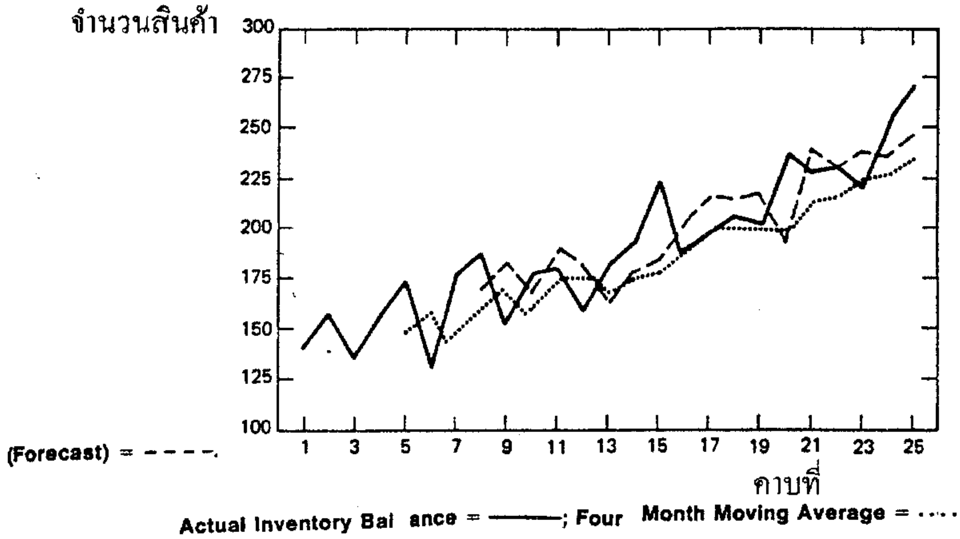
และค่าพยากรณ์ในวาระที่ 26 คือ

$$F_{26} = F_{25+1} = a_{25} + b_{25}(1) = 258.188 + 8.125 = 266.3$$

และถ้าต้องการพยากรณ์ล่วงหน้า 3 วาระ คือ ค่าพยากรณ์ของคาบเวลาที่ 28 คือ

$$F_{28} = F_{25+3} = a_{25} + b_{25}(3) = 258.188 + 8.125(3) = 282.6$$

จากจำนวนสินค้าจริง , ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ครั้งเดียว และ ค่าพยากรณ์ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง สามารถ plot กราฟเปรียบเทียบได้ดังนี้



รูปที่ 3.2 แสดงการเปรียบเทียบจำนวนสินค้าจริง , ค่าพยากรณ์ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ครั้งเดียวและค่าพยากรณ์ค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง

3.2 วิธีการเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential Smoothing)

จากข้อจำกัดของการพยากรณ์ด้วยวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่หลายประการที่ว่าสามารถใช้ได้ดีเฉพาะช่วงระยะเวลาสั้น และการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ ในการพยากรณ์ จำเป็นต้องเก็บค่าข้อมูล N ค่าสุดท้ายไว้ จึงเป็นการเปลืองพื้นที่ในส่วนของระบบคอมพิวเตอร์ทั้งหลาย ทั้งยังเสียค่าใช้จ่ายมากในกระบวนการดังกล่าว และอีกประการหนึ่ง คือการพยากรณ์โดยวิธีเฉลี่ยเคลื่อนที่จะให้ความสำคัญของข้อมูลในอดีตและปัจจุบันเท่า ๆ กัน โดยทำการเฉลี่ยค่าข้อมูลที่จะพยากรณ์ N ชุดสุดท้าย ส่วนข้อมูลช่วงก่อนหน้านี้ในคาบที่ t - N จะไม่มีการให้น้ำหนัก หรือน้ำหนักของแต่ละข้อมูลใน N ชุดสุดท้ายจะเป็น 1/N และน้ำหนักเป็น 0 สำหรับข้อมูลก่อนหน้านี้ เหตุผลหนึ่งที่สามารถทำได้

คือข้อมูลที่ปัจจุบันที่สุดจะประกอบด้วยรายละเอียดที่จะเกิดขึ้นในอนาคตมาก เราจึงควรให้น้ำหนักที่มากกว่าน้ำหนักที่ให้กับค่าข้อมูลที่อดีตกว่า แนวทางนี้จึงเป็นวิธีการพยากรณ์แบบ Exponential Smoothing

3.2.1 Single Exponential Smoothing

จากสมการพยากรณ์ของวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่

$$F_{t+1} = (X_t + X_{t-1} + \ldots + X_{t-N+1})/N$$

$$F_{t+1} = (X_t/N) + [(X_{t-1} + X_{t-2} + \ldots + X_{t-N+1})/N]$$

และจาก $F_t = (X_{t-1} + X_{t-2} + \ldots + X_{t-N+1} + X_{t-N})/N$

$$F_{t+1} = (X_t/N) + F_t - (X_{t-N}/N) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

แต่เนื่องจากข้อมูล X_{t-N} ไม่สามารถหาค่าได้ และชุดข้อมูลอนุกรมเวลาเป็นแบบ stationary ไม่มีรูปแบบใดในข้อมูลจึงประมาณค่าข้อมูล X_{t-N} ด้วย F_t จากสมการ (1) จึงได้เป็น

$$F_{t+1} = (X_t/N) + F_t - (F_t/N)$$

$$F_{t+1} = (1/N)X_t + (1-(1/N))F_t$$

กำหนดค่าถ่วงน้ำหนักเท่ากับ $1/N$ สำหรับค่าข้อมูลที่ปัจจุบันที่สุด และค่าถ่วงน้ำหนัก $(1-(1/N))$ สำหรับค่าพยากรณ์ที่ปัจจุบันที่สุด โดยให้ $\alpha = 1/N$ และ $0 < \alpha < 1$ จะได้สมการการพยากรณ์ คือ $F_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)F_t$ ....(2)

สมการนี้เป็นรูปแบบพื้นฐานที่ใช้ในการคำนวณค่าพยากรณ์แบบวิธี simple exponential smoothing และจากสมการ (2) สามารถกระจายอยู่ในรูปของค่าข้อมูลในอดีตได้คือ

$$F_{t+1} = \alpha X_t + (1-\alpha)[\alpha X_{t-1} + (1-\alpha)F_{t-1}]$$

$$F_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + (1-\alpha)^2 F_{t-1}$$

$$F_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + (1-\alpha)^2[\alpha X_{t-2} + (1-\alpha)F_{t-2}]$$

$$F_{t+1} = \alpha X_t + \alpha(1-\alpha)X_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 X_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 X_{t-3} + \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

จากสมการ (2) สามารถกระจายได้เป็น

$F_{t+1} = \alpha X_t + F_t - \alpha F_t = F_t + \alpha(X_t - F_t)$ และ $e_t = X_t - F_t$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนในวาระ t (residual) ได้ $F_{t+1} = F_t + \alpha e_t$

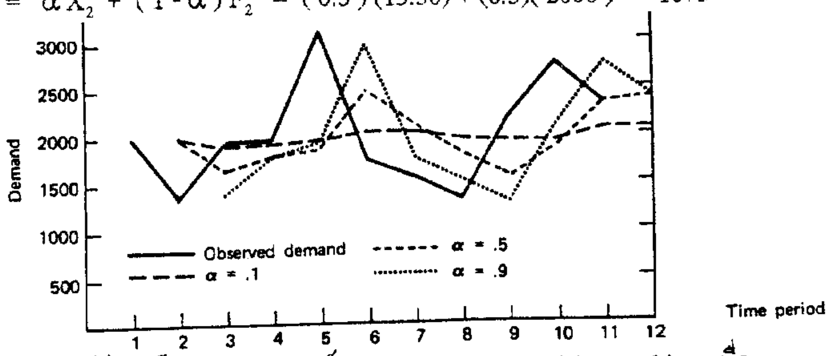
ตัวอย่างที่ 3.3 จากข้อมูลของตัวอย่างที่ 3.1 จงพยากรณ์ยอดขายของคาบเวลาที่ 12 โดยวิธี single exponential smoothing โดย $\alpha = 0.5$ และ $\alpha = 0.9$ ตามลำดับ

คาบที่	ข้อมูล	F_t		e_t		เปอร์เซนต์ความคลาดเคลื่อน	
		$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$
1	2000						
2	1350	2000	2000	-650	-650	-48.15	- 48.15
3	1950	1675	1415	275	535	14.10	27.44
4	1975	1813	1897	163	78	8.25	3.95
5	3100	1894	1967	1206	1133	38.90	36.55
6	1750	2497	2987	-747	-1237	-42.69	-70.69
7	1550	2123	1874	-573	-324	-36.97	-20.90
8	1300	1837	1582	-537	-282	-41.31	-21.69
9	2200	1568	1328	632	872	28.73	39.64
10	2775	1884	2113	891	662	32.11	23.86
11	2350	2330	2709	20	-359	- 0.85	-15.28
12		2340	2386				
						MAPE 29.21	30.82

เปรียบเทียบค่า $\alpha = 0.5$ และ $\alpha = 0.9$ ว่าจะใช้ค่า α เท่าใดจึงจะเหมาะสมให้เปรียบเทียบค่า MAPE หรือโดยเปลี่ยนแปลงค่า α ตั้งแต่ 0.1 ถึง 0.9 แล้วใช้ค่า α ที่ให้ค่า MAPE ต่ำที่สุดไปใช้ในการพยากรณ์ยอดขายของโรงงานในคาบที่ 12 ในที่นี้ใช้ค่า $\alpha = 0.5$ ให้ค่า MAPE ต่ำกว่า โดยมี MAPE = 29.21 % ดังนั้นยอดขายในคาบที่ 12 เมื่อ $\alpha = 0.5$ ค่าพยากรณ์เป็น 2340 และเมื่อ $\alpha = 0.9$ ค่าพยากรณ์เป็น 2386

ในการพยากรณ์วิธี single exponential smoothing นี้ใช้ค่าข้อมูลในวาระที่ 1 เป็นค่าพยากรณ์ในวาระถัดไป คือ $F_2 = X_1$ และสามารถหาค่าพยากรณ์ในวาระที่ 3 คือ

$$F_3 = \alpha X_2 + (1-\alpha) F_2 = (0.5)(13.50) + (0.5)(2000) = 1675$$



รูปที่ 3.3 แสดงเปรียบเทียบการพยากรณ์แบบ single exponential smoothing เมื่อ $\alpha = 0.1$, 0.5 และ 0.9

3.2.2 Double Exponential Smoothing

จากข้อจำกัดของวิธีการพยากรณ์เฉลี่ยเคลื่อนที่ 2 ข้อที่ว่า เฉพาะข้อมูล N ชุดสุดท้ายเท่านั้นที่มีค่าและต้องเก็บรวบรวมไว้สำหรับการคำนวณ และการให้น้ำหนักสำหรับข้อมูลแต่ละตัวเท่ากัน และไม่ให้น้ำหนักสำหรับข้อมูลก่อนหน้านี้ในวาระที่ t - N จะให้น้ำหนักเป็นศูนย์ ซึ่งข้อจำกัดนี้สามารถประยุกต์โดยใช้การเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง เช่นเดียวกัน วิธีการ double exponential smoothing สามารถประยุกต์ได้เหมือนกับการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง แต่สามารถแก้ข้อจำกัดทั้งสองได้ ที่จริงแล้ววิธี double exponential smoothing ใช้ข้อมูลเพียง 3 ตัวในการเก็บรวบรวมไว้เพื่อการคำนวณค่าพยากรณ์เหตุผลข้อนี้ จึงเป็นข้อได้เปรียบกว่าวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง

ความคิดพื้นฐานของ double exponential smoothing คล้ายกับวิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่สองครั้ง ไม่เพียงแต่ต่างกันตรงการให้น้ำหนักของข้อมูลในอดีต และ ปัจจุบัน การประยุกต์ของวิธี exponential smoothing ของอนุกรมเวลาที่มีรูปแบบแนวโน้มให้ผลลัพธ์ที่เหมาะสมภายใต้แนวโน้มนั้น

ก. ใช้ค่าข้อมูลค่าแรกเป็นค่าเริ่มต้น

สมการของการพยากรณ์ คือ $F_{t+m} = a_t + b_t m$

เมื่อ $a_t = 2S_t - S_t''$ และ $b_t = [\alpha/(1-\alpha)][S_t - S_t'']$

โดย m เป็นจำนวนวาระที่ต้องการพยากรณ์ล่วงหน้า

α เป็นค่าน้ำหนักที่ใช้ถ่วง และ $0 < \alpha < 1$

S_t เป็นค่าจาก single exponential smoothing ณ วาระ t

S_t'' เป็นค่าจาก double exponential smoothing ณ วาระ t

เมื่อ $S_t'' = \alpha S_t + (1-\alpha) S_{t-1}''$

และ $S_t = \alpha X_t + (1-\alpha) S_{t-1}$

ตัวอย่างที่ 3.4 โรงงานต้องการพยากรณ์ยอดบัญชีของสินค้าชื่อ E15 โดยใช้วิธี double exponential smoothing แบบที่นำข้อมูลค่าแรกเป็นค่าเริ่มต้น เมื่อ $\alpha = 0.2$

คาบที่	ข้อมูล	S_t	S_t''	a_t	b_t	F_{t+m}	e_t	e_t^2
1	143	143	143					
2	152	144.800	143.360	146.24	0.360			
3	161	148.040	144.296	151.784	0.936	147	14	196
4	139	146.232	144.683	147.781	0.387	153	-14	196
5	137	144.386	144.624	144.147	0.006	148	-11	121

คาบที่	ข้อมูล	S_t	S_t''	a_t	b_t	F_{t+m}	e_t	e_t^2
6	174	150.308	145.761	154.856	1.137	144	30	900
7	142	148.647	146.338	150.956	0.577	156	-14	196
8	141	147.117	146.494	147.741	0.156	151	-10	100
9	162	150.094	147.214	152.974	0.720	148	14	196
10	180	156.075	148.986	169.164	1.772	154	26	676
11	164	157.660	150.721	164.599	1.735	165	-1	1
12	171	160.328	152.642	168.014	1.921	166	5	25
13	206	169.462	156.006	182.919	3.364	170	36	1296
14	193	174.170	159.639	188.701	3.633	186	7	49
15	207	180.736	163.858	197.613	4.219	193	14	196
16	218	188.189	168.724	207.653	4.866	202	16	256
17	229	196.351	174.250	218.452	5.525	212	17	289
18	225	202.081	179.816	224.346	5.566	214	11	121
19	204	202.465	184.346	220.584	4.529	230	-26	676
20	227	207.372	188.951	225.792	4.605	225	2	4
21	223	210.497	193.260	227.735	4.309	231	-8	64
22	242	216.798	197.968	235.628	4.708	232	10	100
23	239	221.238	202.622	239.855	4.654	241	-2	4
24	266	230.191	208.136	252.246	5.514	245	21	441
25						258		

MSE = 6103/22 = 277.41

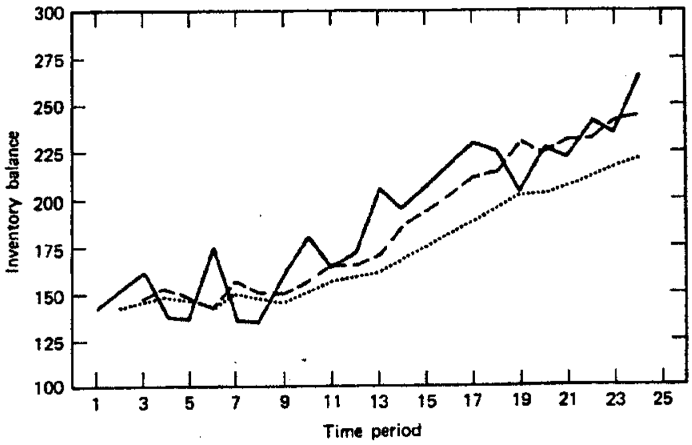
เมื่อ m = 1 การพยากรณ์ค่าข้อมูลในคาบที่ 25 ได้จาก

$F_{24+1} = a_{24} + b_{24}(1) = [\,2(230.191) - 208.136\,] + (0.2/0.8)(230.191 - 208.136)(1)$

$F_{25} = 257.8$

เมื่อ m = 5 ค่าพยากรณ์ได้เป็น

$F_{24+5} = 2(230.19) - 208.136 + (0.2/0.8)(230.191 - 208.136)(5) = 279.8$



Double Exponential Smoothing for Inventory Balance; Actual Inventory Balance = ——; Single Exponential Smoothing = ····; Value of A + BM when M = 1 (Forecast) = - - - -.

รูปที่ 3.4 แสดงกราฟเปรียบเทียบค่าจริง,ค่าพยากรณ์โดยวิธี single exponential และค่าพยากรณ์โดยวิธี double exponential smoothing

ข. ใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least square method)

โดยกำหนดค่า S_t และ S_t'' เมื่อ t เป็นวาระแรก จะได้

$$S_1 = a_1 - [(1-\alpha)/\alpha]\, b_1$$

$$S_1'' = a_1 - 2[(1-\alpha)/\alpha]\, b_1$$

โดยจะหาค่า a_1 และ b_1 โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด จะได้

$$b_1 = [\, n\sum tX_t - (\sum X_t)(\sum t)\,] / [\, n\sum t^2 - (\sum t)^2\,]$$

$$a_1 = \sum X_t / n - b_1(\sum t / n)$$

เมื่อ t เป็นคาบเวลาทั้งหมด

X_t เป็นค่าข้อมูล ณ วาระ t

$$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha) S_{t-1} \qquad t = 2,3,4,\ldots$$

$$S_t'' = \alpha S_t + (1-\alpha) S''_{t-1}$$

ตัวอย่างที่ 3.5 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 3.4 จงหาค่าพยากรณ์ในคาบที่ 25 โดยวิธี double exponential smoothing แบบใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด เมื่อ $\alpha = 0.2$

$n = 24 \quad \sum t = 300 \quad \sum X_t = 4545 \quad \sum t^2 = 4900 \quad \sum tX_t = 62{,}671$

$b_1 = [\,24(62{,}671) - (4{,}545)(300)\,] / [\,24(4{,}900) - (300)^2\,] = 140{,}604 / 27{,}600 = 5.09$

$a_1 = 4{,}545 / 24 - (5.09)(300/24) = 125.75$

$S_1 = 125.75 - (0.8/0.2)(5.09) = 105.39$

$S_1'' = 125.75 - 2(0.8/0.2)(5.09) = 85.03$

t	X_t	t^2	tX_t	t	X_t	t^2	tX_t	t	X_t	t^2	tX_t
1	143	1	143	9	162	81	1458	17	229	289	3893
2	152	4	304	10	180	100	1800	18	225	324	4050
3	161	9	483	11	164	121	1804	19	204	361	3876
4	139	16	556	12	171	144	2052	20	227	400	4540
5	137	25	685	13	206	169	2678	21	223	441	4683
6	174	36	1044	14	193	196	2702	22	242	484	5324
7	142	49	994	15	207	225	3105	23	239	529	5497
8	141	64	1128	16	218	256	3488	24	266	576	6384

$S_2 = (0.2)(152) + (0.8)(105.39) = 114.712$

$S_2'' = (0.2)(114.712) + (0.8)(85.03) = 90.966$

$a_2 = 2S_2 - S_2'' = 2(114.712) - 90.966$

$b_2 = [(0.2) / (0.8)] \{ 114.712 - 90.966 \}$

$F_3 = 138.458 + 5.937 = 144.395$

คาบที่	X_t	S_t	S_t''	a_t	b_t	F_{t+m}	e_t	e_t^2
1	143	105.39	85.03					
2	152	114.712	90.966	138.458	5.937			
3	161	123.969	97.567	150.371	6.601	144	17	289
4	139	126.975	103.449	150.501	5.882	157	-18	324
5	137	128.980	108.555	149.405	5.106	156	-19	361
6	174	137.984	114.441	161.527	5.886	155	19	361
7	142	138.787	119.310	158.264	4.869	167	-25	625
8	141	139.230	123.294	155.166	3.984	163	-22	484
9	162	143.784	127.392	160.176	4.098	159	3	9
10	180	151.027	132.119	169.935	4.727	164	16	256
11	164	153.622	136.420	170.824	4.301	175	-11	121
12	171	157.098	140.556	173.640	4.136	175	-4	16
13	206	166.878	145.820	187.936	5.264	178	28	784

คาบที่	X_t	S_t	S_t''	a_t	b_t	F_{t+m}	e_t	e_t^2
14	193	172.102	151.076	193.128	5.257	193	0	0
15	207	179.082	156.677	201.487	5.601	198	9	81
16	218	186.866	162.715	211.017	6.038	207	11	121
17	229	195.293	169.231	221.355	6.516	217	12	144
18	225	201.234	175.632	226.836	6.401	228	-3	9
19	204	201.787	180.863	222.711	5.231	233	-29	841
20	227	206.830	186.056	227.604	5.194	228	-1	1
21	223	210.064	190.858	229.270	4.802	233	-10	100
22	242	216.451	195.977	236.925	5.119	234	8	64
23	239	220.961	200.974	240.948	4.997	242	-3	9
24	266	229.969	206.773	253.165	5.799	246	20	400
25						259		

MSE = 5400/22 = 245.45

เมื่อเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (MSE) จะเห็นว่า การใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดให้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำกว่า ถึงแม้ว่าการคำนวณค่า a_t , b_t , S_t และ S_t'' จะมีความยุ่งยากกว่า ค่าพยากรณ์ในคาบเวลาที่ 25 = 259 ในการพยากรณ์วิธี double exponential smoothing บางครั้งจะใช้ชื่อว่า Brown's one parameter linear exponential smoothing หรือ EXPO 2

3.2.3 Holt 's Two Parameter Linear Exponential Smoothing (EXPOH)

วิธีการพยากรณ์นี้ใช้พารามิเตอร์ 2 ตัว คือ α และ β เมื่อ α เป็นตัวถ่วงน้ำหนักของค่าข้อมูล X ในอดีตที่นำมาร่วมพยากรณ์ค่า X ในอนาคต แต่ β เป็นตัวปรับค่าแนวโน้มและกำจัดปัจจัยสุ่มออกจากข้อมูลอนุกรมเวลาให้เรียบขึ้น สมการ 3 สมการที่ใช้ในตัวแบบของ Holt คือ

$$F_{t+m} = S_t + T_t m \quad \text{.................................(4)}$$

เมื่อ $$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \quad \text{..................(5)}$$

$$T_t = \beta(S_t - S_{t-1}) + (1-\beta) T_{t-1} \quad \text{..................(6)}$$

สมการ (5) คล้ายกับสมการของ single exponential smoothing ยกเว้นเทอมของแนวโน้ม T_{t-1} ที่บวกเข้าไป โดยเทอม T_{t-1} นี้สามารถคำนวณได้จากสมการ (6) จากค่าที่แตกต่างกันระหว่าง S_t กับ S_{t-1} ใช้ในการพยากรณ์ค่าปัจจัยแนวโน้มและกำจัดค่าปัจจัยสุ่มที่มีอยู่ในข้อมูล โดยสมการ (4) เป็นสมการของการพยากรณ์

เมื่อ α และ β เป็นพารามิเตอร์ โดยที่ $0 \le \alpha \le 1$ และ $0 \le \beta \le 1$

เรียก T_t ว่าเป็น smoothed trend และ S_t เป็น smoothed data

การกำหนดค่า S_1 และ T_1 โดย $S_1 = X_1$ และ $T_1 = [(X_2 - X_1) + (X_4 - X_3)]/2$

ตัวอย่างที่ 3.6 จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงคำนวณค่าพยากรณ์ในคาบเวลาที่ 13 โดยวิธี EXPOH เมื่อ $\alpha = 0.2$ และ $\beta = 0.3$

คาบที่	X_t	S_t	T_t	F_{t+1}
1	143	143	-6.5	
2	152	139.6	-5.57	137
3	161	139.42	-3.95	134
4	139	136.18	-3.74	135
5	137	133.35	-3.47	132
6	174	138.70	-0.82	130
7	142	138.70	-0.57	138
8	141	138.70	-0.40	138
9	162	143.04	1.02	138
10	180	151.25	3.18	144
11	164	156.34	3.75	154
12	171	162.27	4.40	160
13				167

$S_1 = X_1 = 143 \quad T_1 = [(X_2 - X_1) + (X_4 - X_3)]/2 = (9 - 22)/2 = -6.5$

$F_{12+1} = S_{12} + X_{12}(1) = 162.27 + 4.40 = 166.67 \quad F_{13} = 167$

วิธี EXPOH มีข้อเสียเปรียบตรงที่ต้องพิจารณาค่า α และ β ที่ optimal ที่สุด เพื่อให้ได้ค่า MSE หรือ MAPE ต่ำที่สุด แต่มีโอกาสที่จะประยุกต์ค่าถ่วงน้ำหนักที่แตกต่างกัน สำหรับปัจจัยสุ่ม และปัจจัยแนวโน้มซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของข้อมูลโดยเฉพาะ ในทางปฏิบัตินิยมใช้วิธี EXPO 2 มากกว่า EXPOH เพราะใช้พารามิเตอร์เพียงตัวเดียว

3.2.4 Brown 's Quadratric Exponential Smoothing or Triple Exponential Smoothing (EXPOQ)

วิธีการพยากรณ์นี้ขยายจากวิธี linear exponential smoothing ซึ่งลักษณะแนวโน้มของข้อมูลเป็นแบบ quadratric มากกว่า linear ซึ่งมีสมการที่เกี่ยวข้องในการพยากรณ์ คือ

$S_t = \alpha X_t + (1-\alpha) S_{t-1}$ $\qquad S_t'' = \alpha S_t + (1-\alpha) S''_{t-1}$

$S_t''' = \alpha S_t'' + (1-\alpha) S'''_{t-1}$ $\qquad a_t = 3S_t - 3S_t'' + S_t'''$

$b_t = [\alpha / 2(1-\alpha)^2][(6-5\alpha) S_t - (10-8\alpha) S_t'' + (4-3\alpha) S_t''']$

$c_t = [\alpha^2/(1-\alpha)^2][S_t - 2S_t'' + S_t''']$

$F_{t+m} = a_t + b_t m + (1/2) c_t m^2$

เมื่อ $S_1''' = S_1'' = S_1 = X_1$ และสามารถคำนวณหาค่าต่อไปนี้ได้ คือ

$S_2 = \alpha X_2 + (1-\alpha) X_1 = \alpha(X_2 - X_1) + X_1$

$S_2'' = \alpha S_2 + (1-\alpha) S_1'' = \alpha^2(X_2 - X_1) + X_1$

$S_2''' = \alpha S_2'' + (1-\alpha) S_1''' = \alpha^3(X_2 - X_1) + X_1$

ตัวอย่างที่ 3.7 เมื่อ $\alpha = 0.2$ จงพยากรณ์ค่าข้อมูลที่กำหนดให้โดยวิธี Brown 's Quadratic Exponential Smoothing

คาบที่	X_t	S_t	S_t''	S_t'''	a_t	b_t	c_t	F_{t+1}
1	143	143	143	143				
2	152	144.8	143.36	143.07	147.39	0.97	0.0718	
3	161	148.04	144.30	143.32	154.54	2.40	0.1725	148
4	139	146.23	144.69	143.59	148.21	0.62	0.0275	157
5	137	144.38	144.63	143.80	143.05	-0.64	-0.0675	149
6	174	150.30	145.76	144.19	157.81	2.71	0.1856	142
7	142	148.64	146.34	144.62	151.52	0.88	0.0036	161
8	141	147.11	146.49	144.99	146.85	-0.31	-0.0550	152
9	162	150.09	147.21	145.43	154.07	1.30	0.0688	147
10	180	156.07	148.98	146.14	167.41	4.03	0.2656	155
11	164	157.66	150.72	147.06	167.88	3.48	0.2050	172
12	171	160.33	152.64	148.18	171.25	3.64	0.2018	171
13								175

$a_2 = 3(144.8 - 143.36) + 143.07 = 147.39$

$b_2 = [0.2/2(0.8)^2][(6-1) S_2 - (10-1.6) S_2'' + (4-0.6) S_2''']$

$b_2 = [0.2/2(0.8)^2][5(144.8) - (8.4)(143.36) + (3.4)(143.07)] = 0.97$

$c_2 = [(0.2)^2/(0.8)^2][S_2 - 2S_2'' + S_2'''] = (0.0625)[144.8 - 2(143.36) + 143.07] = 0.0718$

$F_3 = F_{2+1} = a_2 + b_2(1) + (1/2)\ c_2(1)^2$

$F_3 = 147.37 + 0.97 + (0.5)(0.0718) = 148$

และ $F_{13} = a_{12} + b_{12}(1) + (1/2)\ c_{12}(1)^2 = 171.25 + 3.64 + (0.5)(0.2018)$

$F_{13} = 175$

เมื่อ $S_2 = (0.2)X_2 + (0.8)S_1 = (0.2)(152) + (0.8)(143) = 144.8$

$S_2'' = (0.2)S_2 + (0.8)S_1'' = (0.2)(144.8) + (0.8)(143) = 143.36$

$S_2''' = (0.2)S_2'' + (0.8)S_1''' = (0.2)(143.36) + (0.8)(143) = 143.07$

3.2.5 Winters' Linear and Seasonal Exponential Smoothing (EXPOW)

การพยากรณ์วิธีนี้ดำเนินการคล้ายวิธีการของ double exponential smoothing แต่มีข้อได้เปรียบพิเศษของการรวมปัจจัยฤดูกาลที่ปรับแล้วพอ ๆ กับปัจจัยแนวโน้มที่ปรับแล้ว วิธีนี้สามารถพยากรณ์ข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีปัจจัยฤดูกาลและปัจจัยแนวโน้มได้มีสมการที่เกี่ยวข้องดังนี้

$S_t = \alpha[X_t/I_{t-L}] + (1-\alpha)(S_{t-1} + b_{t-1})$

$b_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)b_{t-1}$

$I_t = \beta(X_t - S_t) + (1-\beta)I_{t-L}$

และสมการพยากรณ์ คือ $F_{t+m} = (S_t + b_t m)\ I_{t-L+m}$

โดยที่ $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$ และ $0 \le \gamma \le 1$

เมื่อ L เป็นความยาวของฤดูกาล

I เป็นปัจจัยฤดูกาลที่ปรับแล้ว (seasonal adjustment factor)

ตัวอย่างที่ 3.8 จงพยากรณ์ค่าข้อมูลโดยวิธี EXPOW เมื่อ $L = 4$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.05$, $\gamma = 0.1$

เมื่อ α ใช้สำหรับปรับค่า randomness , β ใช้สำหรับปรับค่า seasonal

และ γ ใช้สำหรับปรับค่า trend

ในการกำหนดค่าเริ่มต้นของ S_t , b_t และ I_t กำหนดขึ้นตามความเหมาะสม

คาบที่	X_t	S_t	I_t	b_t	F_{t+1}
1	362		0.95	เป็นค่าเริ่มต้น	
2	385		1.01		
3	432		1.14		
4	341		0.90		
5	382	382.00	0.95	9.17	
6	409	393.93	1.01	9.45	395.08
7	498	410.07	1.14	10.12	459.85

คาบที่	X_t	S_t	I_t	b_t	F_{t+1}
8	387	422.15	0.90	10.32	378.17
9	473	445.55	0.95	11.63	410.85
10	513	467.33	1.01	12.65	461.75
11	582	486.09	1.14	13.26	547.18
12	474	504.81	0.90	13.81	449.42
13					492.69

เมื่อ $S_5 = S_{L+1} = X_{L+1} = X_{4+1} = X_5 = 382$

$I_1 = X_1 / \bar{X}$, $I_2 = X_2 / \bar{X}$, $I_3 = X_3 / \bar{X}$, $I_4 = X_4 / \bar{X}$ . . .

$I_L = X_L / \bar{X}$ เมื่อ $\bar{X} = \sum_{i=1}^{L+1} X_i / (L+1)$

จากตัวอย่างได้ $\bar{X} = (362+385+432+341+382)/5 = 380.4$

$I_1 = 362/380.4 = 0.95$, $I_2 = 385/380.4 = 1.01$, $I_3 = 432/380.4 = 1.14$

$I_4 = 341/380.4 = 0.90$ และ

$b_{L+1} = [(X_{L+1} - X_1) + (X_{L+2} - X_2) + (X_{L+3} - X_3)] / 3L$

$b_5 = [(382 - 362) + (409 - 385) + (498 - 432)] / 12 = 110/12 = 9.17$

$I_5 = (0.05)(382/382) + (0.95)(0.95) = 0.95$

$S_6 = (0.2)(409/1.01) + (0.8)(382 + 9.17) = 393.93$

$b_6 = (0.1)(393.93 - 382) + (0.9)(9.17) = 9.45$

$I_6 = (0.05)(409/393.93) + (0.95)(1.01) = 1.01$

ค่าพยากรณ์ล่วงหน้า 1 วาระ คือ วาระที่ 13 ได้คือ

$F_{13} = F_{12+1} = [S_{12} + b_{12}(1)] I_{12-4+1}$

$F_{13} = (504.81 + 13.81)(0.95) = 492.69$

และถ้าต้องการพยากรณ์ล่วงหน้า 2,3,4 วาระ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$F_{14} = F_{12+2} = [S_{12} + b_{12}(2)] I_{12-4+2}$

$F_{14} = (504.81 + (13.81)(2))(1.01) = 537.75$

$F_{15} = F_{12+3} = [S_{12} + b_{12}(3)] I_{12-4+3}$

$F_{15} = (504.81 + (13.81)(3))(1.14) = 622.71$

$$F_{16} = F_{12+4} = [\, S_{12} + b_{12}(4) \,]\, I_{12-4+4}$$

$$F_{16} = (\, 504.81 + (13.81)(4) \,)(\, 0.90 \,) = 504.05$$

แบบฝึกหัด

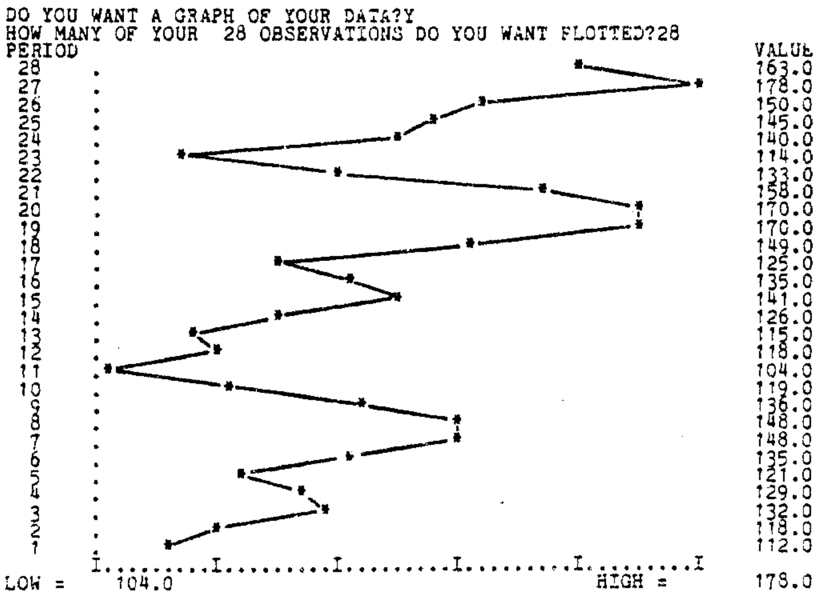
1. ข้อมูลที่ต้องการพยากรณ์นี้ จงพยากรณ์ค่าข้อมูลในคาบเวลาที่ 29 โดยวิธี

   1.1 single moving average 5 MA

   1.2 centered moving average (centered 6 MA)

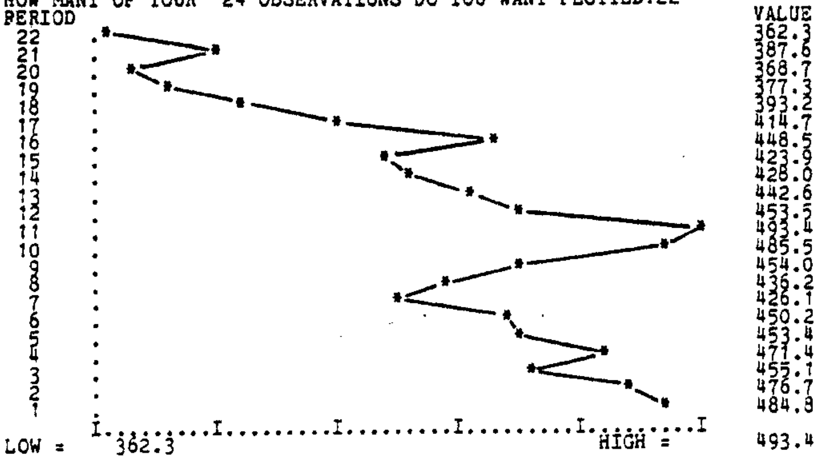
   1.3 double single moving average 3 MA

จงพิจารณาเปรียบเทียบว่าวิธีการพยากรณ์ใดเหมาะสม สำหรับข้อมูลอนุกรมเวลาชุดนี้



2. กระบวนการผลิตสินค้า E14 เก็บรวบรวมข้อมูล 22 period จงพยากรณ์ยอดผลิตของสินค้า E14 สำหรับ period ที่ 21 - 24 โดยพิจารณาค่า α ว่ามีค่าเท่าใดจึงจะให้ค่า MSE ต่ำที่สุด โดยวิธี single exponential smoothing

```
DO YOU WANT A GRAPH OF YOUR DATA?Y
HOW MANY OF YOUR  24 OBSERVATIONS DO YOU WANT PLOTTED?22
```

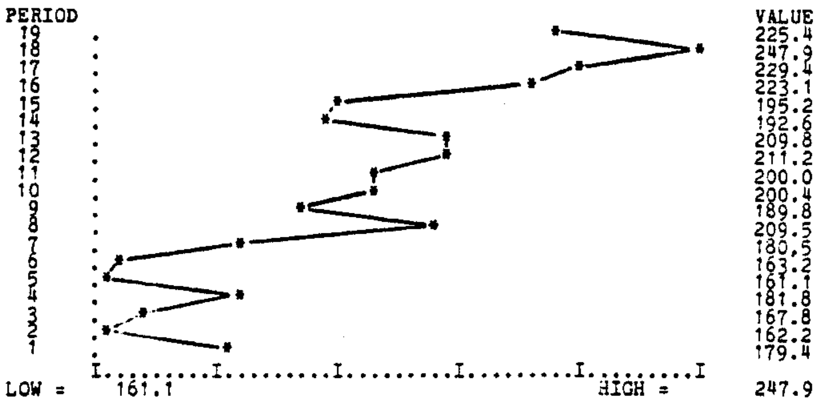


3. ข้อมูลต่อไปนี้แสดงยอดขายรายสัปดาห์ (หน่วย 1,000 ยูนิต) ของทรานซิสเตอร์ จงพยากรณ์ยอดขายสำหรับสัปดาห์ต่อไป 4 สัปดาห์ คือสัปดาห์ที่ 26 - 29

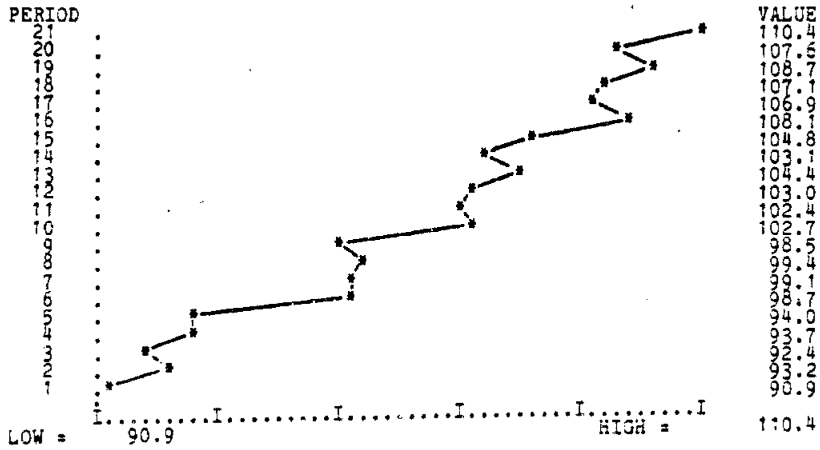
3.1 วิธี Double exponential smoothing (EXPO 2) เมื่อ $\alpha = 0.2$

3.2 วิธี Brown's one parameter quadratic exponential smoothing (EXPOQ) เมื่อ $\alpha = 0.2$

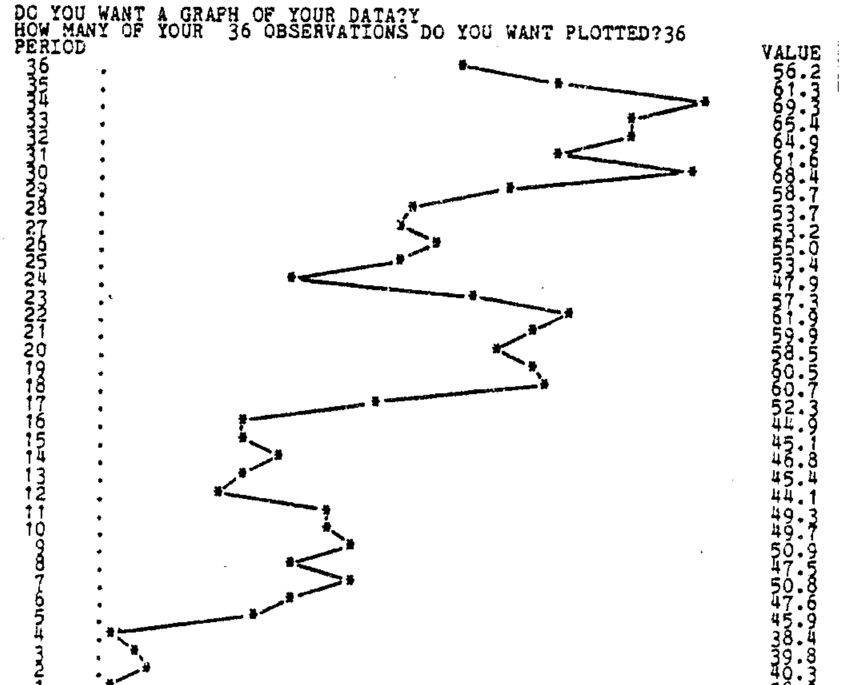
3.3 จงพิจารณาว่าข้อมูลอนุกรมเวลาดังกล่าวควรใช้วิธีการพยากรณ์แบบใดจึงจะเหมาะสม



4. ข้อมูลต่อไปนี้เป็นยอดขายเครื่องคำนวณในห้างสรรพสินค้าขนาดใหญ่แห่งหนึ่ง จงพยากรณ์ยอดขายสำหรับ 4 สัปดาห์ถัดไป โดยใช้ α และ β ตั้งแต่ 0.1 ถึง 0.9 จงหาค่า α และ β ที่เหมาะสม โดยมี MSE ต่ำที่สุดในการพยากรณ์ เมื่อใช้วิธีของ Holt's two parameter linear exponential smoothing (EXPOH)



5. ข้อมูลต่อไปนี้จงพยากรณ์ค่าข้อมูลในคาบที่ 37 - 40 โดยวิธี Winter's Linear and seasonal exponential Smoothing (EXPOW) เมื่อ $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$ และ $L = 4$



ตัวอย่างพิเศษ เปรียบเทียบค่าพยากรณ์ เมื่อเปลี่ยนค่า α , β และ γ ที่แตกต่างกัน มี

1. **ใช้วิธี** Winter's linear exponential smoothing เมื่อ $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$

Period	Actual	Forecast	Error	P .C. T. Error
14	46.76			
15	45.09			
16	44.89			
17	52.32			
18	60.73			
19	60.46			
20	58.52			
21	59.94			
22	61.86			
23	57.34			
24	47.90			
25	53.36			
26	55.02			
27	53.24			
28	53.65			
29	58.73			
30	68.40			
31	61.58			
32	64.95			
33	65.44			
34	69.27			
35	61.26			
36	56.21			

2. **ใช้วิธี** Winter's linear exponential smoothing เมื่อ $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$, $\gamma = 0.1$

Period	Actual	Forecast	Error	P .C. T. Error
14	46.76			
15	45.09			
16	44.89			
17	52.32			
18	60.73			
19	60.46			
20	58.52			
21	59.94			
22	61.86			
23	57.34			
24	47.90			
25	53.36			
26	55.02			
27	53.24			
28	53.65			
29	58.73			
30	68.40			
31	61.58			
32	64.95			
33	65.44			
34	69.27			
35	61.26			
36	56.21			

3. ใช้วิธี Winter's linear exponential smoothing เมื่อ $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.5$

Period	Actual	Forecast	Error	P .C. T. Error
14	46.76			
15	45.09			
16	44.89			
17	52.32			
18	60.73			
19	60.46			
20	58.52			
21	59.94			
22	61.86			
23	57.34			
24	47.90			
25	53.36			
26	55.02			
27	53.24			
28	53.65			
29	58.73			
30	68.40			
31	61.58			
32	64.95			
33	65.44			
34	69.27			
35	61.26			
36	56.21			