บทที่ 1
บทนำ

เค้าโครงเรื่อง

1.1 ความสำคัญและลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์

1.1.1 ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์

1.1.2 ลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์

1.2 ปรัชญาของคณิตศาสตร์

1.2.1 กลุ่มคณิตศาสตร์สมบูรณ์

1.2.2 กลุ่มคณิตศาสตร์สัมพัทธ์

1.3 ปรัชญาของคณิตศาสตร์ศึกษา

1.3.1 แนวคิดที่เน้นความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์

1.3.2 แนวคิดที่เน้นการนำไปใช้

1.3.3 แนวคิดที่เน้นผู้เรียน

1.3.4 แนวคิดที่เน้นการเป็นกระบวนการทางสังคม

สาระสำคัญ

1. คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีความสำคัญอย่างมาก เป็นรากฐานความรู้ของศาสตร์อื่น ๆ เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันและสังคม เป็นความรู้พื้นฐานในการประกอบวิชาชีพสาขาต่าง ๆ และยังช่วยให้เข้าใจธรรมชาติและสิ่งแวดล้อมให้ดีขึ้น

2. คณิตศาสตร์มีโครงสร้างและมีขั้นตอน กระบวนการในการคิดและมีเหตุผล มีลักษณะเป็นภาษา เป็นศิลปะ เป็นเกม และนำมาเป็นนันทนาการได้ รวมถึงมีลักษณะเป็นการถ่ายทอดมรดกทางวัฒนธรรมด้วย

3. ความเชื่อเกี่ยวกับความจริงหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์ มีผู้ยึดถือเป็น 2 ด้าน กลุ่มหนึ่งเชื่อว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นความรู้ที่เป็นจริงแน่นอน สมบูรณ์และมีอยู่แล้ว อีกกลุ่มหนึ่งเชื่อว่าความจริงทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้นจากประสบการณ์ ยืนยันและพิสูจน์ได้ สามารถเปลี่ยนแปลงได้

4. ปรัชญาทางคณิตศาสตร์ศึกษามีรากฐานความเชื่อจากปรัชญาคณิตศาสตร์ การจัดหลักสูตร การเรียนการสอน บทบาทของครูและนักเรียนจึงเป็นไปตามแนวคิดนั้น ๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้

หลังจากศึกษาเนื้อหาจบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. สรุปความสำคัญและลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์ได้

2. เปรียบเทียบความแตกต่างของแนวคิดกลุ่มคณิตศาสตร์สัมบูรณ์ และกลุ่มคณิตศาสตร์สัมพัทธ์ได้

3. อธิบายลักษณะการเรียนการสอนที่สอดคล้องกับปรัชญาคณิตศาสตร์ศึกษาตามแนวคิดต่าง ๆ ได้

คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่ได้รับการบรรจุไว้เป็นวิชาบังคับในหลักสูตรของโรงเรียนตั้งแต่ระดับชั้นอนุบาลจนถึงระดับมหาวิทยาลัย นักเรียนทุกคนต้องเรียนคณิตศาสตร์อย่างน้อยต้องตามเกณฑ์ที่โรงเรียนกำหนด เพราะคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มีความจำเป็นและเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของมนุษย์ นับตั้งแต่ตื่นนอนจนกระทั่งเข้านอน คณิตศาสตร์ได้เข้ามาเกี่ยวข้องกับมนุษย์ถึงแม้ว่าเขาจะไม่เรียนคณิตศาสตร์อย่างเป็นทางการก็ตาม ทั้งทางด้านชีวิตความเป็นอยู่ประจำวัน การประกอบอาชีพ การดำเนินการงานต่าง ๆลฯ คณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานของวิทยาการความรู้ต่าง ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ ภูมิศาสตร์ คอมพิวเตอร์ ฯลฯ นอกจากนี้เรายังใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการบรรยาย การวิเคราะห์และทำนายความเป็นไปได้ของปรากฏการณ์ตามธรรมชาติ เป็นเครื่องมือสำหรับการแสดงออกซึ่งความคิด การคิดหาเหตุผล และการแก้ปัญหาต่าง ๆ

คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรม ไม่สามารถมองเห็นด้วยตาหรือจับต้องได้ ต้องใช้จินตนาการและความคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผล ทำให้คนส่วนใหญ่เข้าใจได้ยาก จนเกิดความชลาดกลัวและไม่ชอบคณิตศาสตร์ นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ชอบเรียนคณิตศาสตร์ เนื่องจากทำคะแนนสอบไม่ได้ดีและมองไม่เห็นความสำคัญและประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ ครูผู้สอนคณิตศาสตร์จะมีส่วนเกี่ยวข้องและแก้ปัญหาเหล่านี้ได้อย่างไร การที่จะตอบปัญหานี้ ผู้ตอบควรจะได้ศึกษาและทำความเข้าใจในพื้นฐานเบื้องต้นของคณิตศาสตร์เสียก่อน ดังนั้น ในบทนี้จะกล่าวถึงความสำคัญและลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์ ปรัชญาคณิตศาสตร์ และปรัชญาการสอนคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาเกี่ยวกับวิธีการสอนคณิตศาสตร์ต่อไป

1.1 ความสำคัญและลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์

หากมีผู้มาถามท่านว่า คณิตศาสตร์มีความสำคัญอย่างไร ทำไมเราจึงต้องเรียนคณิตศาสตร์ และคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นอย่างไร ท่านจะตอบคำถามต่าง ๆ เหล่านั้นอย่างไร

1.1.1 ความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์มีความสำคัญและเกี่ยวข้องกับชีวิตของมนุษย์เป็นอย่างมาก ซึ่งสามารถจะแยกกล่าวได้เป็นข้อ ๆ ดังนี้

1.1.1.1 คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของมนุษย์ ไม่ว่าจะเป็นในเรื่องการดำรงชีวิตประจำวันหรือการประกอบอาชีพใด ๆ ก็ตาม เมื่อเราจะทำอะไรสักอย่างหนึ่งก็จะต้องใช้วิธีหาเหตุผลและปฏิบัติในแนวทางซึ่งแทบจะกล่าวได้ว่าเป็นอย่างเดียวกับที่ใช้อยู่ในคณิตศาสตร์

เช่น เราตื่นมาเวลา 6 นาฬิกา 30 นาที หุงข้าว และเดินทางไปทำงาน ออกแบบทำโต๊ะเขียนหนังสือ เอาเงินไปฝากธนาคาร ฯลฯ จะเห็นว่าสิ่งเหล่านี้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น จากตัวอย่างนี้จะเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เรื่อง ระบบ จำนวน เลขฐาน อัตราส่วน ระยะทางและเวลา อัตราเร็ว รูปทางเรขาคณิต หากเรามีความรู้ทางคณิตศาสตร์ สามารถนำมาใช้ในการหาเหตุผล ข้อเท็จจริง และนำมาใช้ช่วยในการตัดสินใจหรือแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นได้ การดำเนินชีวิตประจำวันและการประกอบอาชีพก็จะดำเนินไปได้อย่างราบรื่นและประสบผลสำเร็จ

1.1.1.2 คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือหรือรากฐานในการแสวงหาความรู้ของศาสตร์สาขาอื่น ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ ภูมิศาสตร์ ดาราศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ แพทยศาสตร์ ฯลฯ วิทยาการความรู้ต่าง ๆ เหล่านั้นจะไม่เจริญก้าวหน้า หากขาดความรู้พื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์

1.1.1.3 คณิตศาสตร์จะช่วยให้เข้าใจธรรมชาติและสิ่งแวดล้อมได้ดีขึ้น เพราะคณิตศาสตร์จะช่วยทำให้คนมีเหตุมีผล รู้จักวิเคราะห์และพิจารณาสิ่งต่าง ๆ ไม่เชื่อสิ่งใดง่าย ๆ หรืองมงาย เช่น สมัยก่อนคนเชื่อว่าสุริยุปราคาเกิดจากการที่ดวงอาทิตย์อมโลกเรา เมื่อเกิดขึ้นจะก่อให้เกิดปัญหาต่าง ๆ ในบ้านเมือง แต่จากการศึกษา การคิดหาเหตุผลและอาศัยหลักเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์เข้าช่วยในการคิดคำนวณ ทำให้ได้ข้อสรุปว่า จะมีอยู่ช่วงระยะเวลาหนึ่งที่โลกและดวงอาทิตย์จะโคจรมาอยู่ตรงกัน โลกจะบดบังแสงจากดวงอาทิตย์ ทำให้โลกมืดไปช่วงเวลาหนึ่ง ซึ่งเมื่อใช้คณิตศาสตร์คำนวณก็จะหาระยะเวลาที่โลกจะเคลื่อนผ่านดวงอาทิตย์ได้ เป็นต้น

1.1.1.4 การประกอบอาชีพต่าง ๆ ต้องอาศัยความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์เข้าช่วยทั้งสิ้น ไม่ว่าจะเป็นวิศวกร นักวิทยาศาสตร์ ทหาร ตำรวจ ทันตแพทย์ แพทย์ ครู นักบัญชี ผู้เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สถาปนิก คนสร้างหุ่นจำลอง ฯลฯ ซึ่งต้องอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์มากน้อยแตกต่างกันในการประกอบอาชีพของตน

1.1.2 <u>ลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์</u> คณิตศาสตร์เป็นกระบวนการทางจิตของมนุษย์ซึ่งเกี่ยวข้องกับการคิดและการหาเหตุผล ช่วยให้มนุษย์ได้พัฒนาความคิดและสติปัญญา นอกจากนั้นยังใช้เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันและในสังคมได้ด้วย พวกเราส่วนใหญ่มักจะมองเห็นความสำคัญและประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์ แต่หากจะถามว่าคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นอย่างไร แต่ละคนซึ่งเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ในลักษณะที่แตกต่างกัน จะบอกลักษณะของคณิตศาสตร์ที่ตนเกี่ยวข้องอยู่แตกต่างกัน

ซึ่งพอจะรวบรวมและสรุปลักษณะของคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

1.1.2.1 คณิตศาสตร์เป็นวิธีการของการคิด การดำเนินการ การวิเคราะห์ และการสังเคราะห์ข้อมูล

1.1.2.2 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นวิธีดำเนินการขององค์ความรู้ ซึ่งแต่ละองค์ประกอบจะต้องมีการพิสูจน์ที่เป็นไปตามลำดับทางตรรกศาสตร์หรือสมมุติฐาน (Assumtions) ลักษณะของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์จะประกอบด้วยอนิยาม (Undefined terms) สมมุติฐานและกฎเกณฑ์ทางตรรกศาสตร์

1.1.2.3 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นภาษาอย่างหนึ่ง ซึ่งสามารถจะสื่อความหมายได้เข้าใจถูกต้องตรงกัน ไม่ว่าจะเป็นชาติใดภาษาใด ภาษาคณิตศาสตร์หรือที่เรียกว่าสัญลักษณ์นั้นเป็นภาษาที่สั้นกระทัดรัดและรัดกุม เป็นภาษาสากลที่คนทุกชาติเข้าใจได้ตรงกัน เช่น "เจ็ดบวกห้ามีค่าเท่ากับสิบสอง" เขียนเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้เป็น 7+5 = 12 หรือ "สามเท่าของเลขจำนวนหนึ่งมากกว่าหก" เขียนเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้เป็น $3x > 6$ ซึ่งภาษาคณิตศาสตร์นี้อาจเป็นจริงหรือเป็นเท็จ หรือไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ เช่น

$7 + 5 = 12$ เป็นจริง

$2 + 8 = 11$ เป็นเท็จ

$3x > 6$ ไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ จะบอกได้ก็ต่อเมื่อทราบค่าของ x ถ้า x มีค่ามากกว่า 2 ประโยคนี้ก็จะเป็นจริง

1.1.2.4 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นศิลป์อย่างหนึ่งที่เกิดขึ้นในแง่ของความคิดสร้างสรรค์ การผสมกลมกลืนของความเป็นระเบียบ การเป็นไปที่คงที่ การรวบรวมข้อเท็จจริงที่เป็นไปอย่างมีระบบหลักเกณฑ์ การค้นหาความสัมพันธ์ และการค้นหารูปแบบที่ทำให้เกิดแนวคิดใหม่ ทำให้ผู้คิดค้นเกิดความสุขสนุก ตื่นเต้นในสิ่งที่ค้นพบ และเป็นการท้าทายความสามารถให้คิดติดตามและค้นคว้าต่อ ผู้ที่เข้าไปเกี่ยวข้องก็จะมีความสุขและพอใจกับผลงานของตนเอง เช่น

$$1^3 = 1 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$$

:

:

:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 \ldots + n)^2 \quad \text{หรือ}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}$$

1.1.2.5 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นเกมชนิดหนึ่งที่ผู้เล่นต้องอาศัยกฎ กติกา หรือข้อตกลงที่กำหนดไว้ในการเล่น ซึ่งในการเล่นนี้ถ้าผู้เล่นได้วิเคราะห์การเล่นและสามารถใช้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการคิดเขาก็สามารถที่จะค้นพบกลวิธี (strategy) ที่นำมาใช้ในการเล่นให้ได้ผลดีได้ เช่น เกมนิมหรือเกมหยิบ (the game of Nim) ซึ่งจำนวนผู้เล่น อุปกรณ์ และหลักเกณฑ์มี ดังนี้

ผู้เล่น : 2 คน

อุปกรณ์ : แท่งไม้หรือเศษวัสดุต่าง ๆ วางเรียงเป็น 3 กอง หรือมากกว่า (ที่นิยมเล่นจะวางเป็น 3 กอง กองที่หนึ่ง 3 ชิ้น กองที่สอง 4 ชิ้น และกองที่สาม 5 ชิ้น)

กองที่ 1 O O O

กองที่ 2 O O O O

กองที่ 3 O O O O O

กติกาการเล่น : ให้ผู้เล่นสลับกันหยิบเศษวัสดุจากกองใดกองหนึ่ง (ห้ามหยิบข้ามกอง) จะหยิบครั้งละกี่ชิ้นก็ได้ แต่ต้องไม้น้อยกว่า 1 ชิ้น สลับกันหยิบ จนกว่าจะหมดกอง ผู้ที่หยิบออกเป็นคนสุดท้ายจะเป็นผู้ชนะ

ในการเล่นเกมนี้ถ้าผู้เล่นมีความรู้เกี่ยวกับเลขฐานสองและวิเคราะห์การเล่นอย่างดี เขาก็สามารถที่จะค้นพบกลวิธีการเล่นและสามารถที่จะเป็นผู้ชนะได้ทุกครั้ง ท่านคิดว่ากลวิธีโดยอาศัยความรู้เลขฐานสองนั้นจะเป็นอย่างไร (เปรียบเทียบกลวิธีที่ท่านคิดได้จากแนวตอบกิจกรรมการเรียน 1.1.2)

1.1.2.6 คณิตศาสตร์สามารถนำมาใช้เป็นนันทนาการได้ คณิตศาสตร์บางประเภทสามารถนำมาเล่น มาคิด ในช่วงเวลาพักผ่อน ทำให้เกิดความสนุกสนานเพลิดเพลิน และฝึกทักษะในการคิดและการหาเหตุผล คณิตศาสตร์ประเภทนี้อาจอยู่ในรูปของอักษรไขว้ ภาพลวงตา ปัญหาเชาว์ การเล่นเกมหรือการแข่งขันต่าง ๆ (ตัวอย่างจะศึกษาได้จากบทที่ 10 หรือในหนังสืออื่น ๆ)

1.1.2.7 คณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นมรดกทางประวัติศาสตร์และทางวัฒนธรรม การศึกษาประวัติคณิตศาสตร์ที่ได้มีการจดบันทึกไว้ทำให้มองเห็นพัฒนาการของคณิตศาสตร์ เห็นแนวคิดของคนในรุ่นก่อน ๆ ซึ่งมีการพัฒนามาเป็นลำดับ และทำให้คนรุ่นหลังได้เข้าใจถึงวัฒนธรรม อารยธรรมและความเจริญในด้านต่าง ๆ ของยุคที่ผ่านมา เช่น การพัฒนาการของระบบตัวเลขของมนุษย์ในยุคหิน เป็นต้น

กิจกรรมการเรียนที่ 1.1

หลังจากศึกษาเนื้อหาหัวข้อ 1.1 แล้ว ให้ทำกิจกรรมดังนี้

1. จงสรุปความสำคัญและลักษณะของวิชาคณิตศาสตร์ตามความเข้าใจของท่าน

2. จงคิดหากลวิธีที่จะใช้ในการเล่นเกมนิมหรือเกมหยิบ โดยให้หยิบเป็นคนสุดท้าย ซึ่งจะได้เป็นผู้ชนะทุกครั้ง

1.2 ปรัชญาของคณิตศาสตร์

ก่อนที่จะกล่าวถึงคณิตศาสตร์ศึกษาหรือการสอนคณิตศาสตร์ เราควรทำความเข้าใจเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์หรือปรัชญาทางคณิตศาสตร์เสียก่อน หากมีผู้ตั้งคำถามง่าย ๆ ว่าคณิตศาสตร์คืออะไร (What is mathematics?) ท่านคิดว่าคำตอบจะเป็นอย่างไร? คำตอบของคำถามดังกล่าวนี้นักปรัชญาคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงในอดีต ได้ให้ความหมายแตกต่างกันตามความเชื่อของตน เช่น เบอร์นาด รัสเซล (Russell, 1929 อ้างถึงใน Fremont 1969, 4) นักปรัชญาคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษได้ให้ความหมายว่า "... may be defined as the subject inwhich we never know what we are talking about, nor whether we are saying is ture." ซึ่งคำตอบนี้อาจจะให้ความหมายที่ไม่กระจ่างชัดนัก มาแชล สโตน (Marshall Stone) ซึ่งอ้างถึงในฟรีมองต์ (Fremont 1969, 5) ได้กล่าวว่า

> a modern mathematician would prefer the positive characterization of his subject as the study of general abstract systems, each one of which is an edifice built of specified abstract elements and structured by the presence of arbitrary but unambiguously specified relation among them.

จากคำกล่าวของสโตนนี้ชี้ให้เห็นว่า คณิตศาสตร์มีความเป็นนามธรรมอย่างแท้จริง สร้างขึ้นโดยมนุษย์และเป็นตัวอย่างของความสามารถอย่างสูงของความคิดของมนุษย์ที่คิดค้นขึ้นมา สิ่งนี้ห่างไกลจากการคิดคำนวณซึ่งเกี่ยวข้องกับคนโดยทั่ว ๆ ไป จากความหมายของคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้นนั้นไม่ได้กล่าวถึงเรื่องจำนวนปริภูมิ (Space) และรูปแบบเลย สิ่งเหล่านี้จะมีบทบาทในความหมายของคณิตศาสตร์หรือไม่ และการนำคณิตศาสตร์ไปใช้จะต้องนำมาร่วมพิจารณาหรือไม่

หากเราพิจารณาความคิดเห็นของ มอร์ริส ไคลน์ (Morris Kline, 1953) เกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ เขาให้ความเห็นว่า คณิตศาสตร์นั้นเป็นกระบวนการของความคิดที่สร้างขึ้น

มาจากปัญหาที่เป็นจริง กำหนดมโนมติ สร้างคำถาม ค้นหาข้อสรุปที่เป็นไปได้ โดยการพิสูจน์ข้อขัดแย้งต่าง ๆ โดยวิธีนิรนัย

นอกจากนี้ยังมีนักปรัชญาที่มีชื่อต่างก็ให้ความหมายของคณิตศาสตร์แตกต่างกัน หากจะแบ่งออกเป็นกลุ่มจะได้เป็น 2 กลุ่มใหญ่ คือ

1.2.1 <u>กลุ่มคณิตศาสตร์สมบูรณ์</u> กลุ่มนี้เชื่อว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นความรู้ที่แน่นอน เป็นความจริงโดยสมบูรณ์ เป็นการศึกษาระบบที่เป็นนามธรรม ซึ่งประกอบด้วยบทนิยาม และทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ตั้งอยู่บนรากฐานของสัจพจน์และการพิสูจน์ โดยใช้เหตุผลหรือตรรกศาสตร์แบบนิรนัย กลุ่มนี้เชื่อว่าคณิตศาสตร์เกิดขึ้นก่อนประสบการณ์ของมนุษย์ นักปรัชญาในกลุ่มนี้ก็ยังมีความเชื่อที่แตกต่างกันเป็น 3 แนวคิด คือ

แนวคิดเชิงตรรกศาสตร์นิยม (logiscism) นักปรัชญาที่สำคัญที่เชื่อในแนวคิดนี้ได้แก่ เฟรเก้ (Frege) ไวท์เฮด (Whitehead) และรัสเซล (Russell) ซึ่งให้แนวคิดว่า มโนมติทางคณิตศาสตร์สามารถที่จะจัดให้อยู่ในรูปของตรรกศาสตร์ได้โดยใช้สัญลักษณ์ตรรกศาสตร์ และความจริงทางตรรกศาสตร์ทุกข้อ สามารถพิสูจน์ได้โดยใช้สัจจพจน์และกฎทางคณิตศาสตร์ แนวคิดนี้อยู่ในงานเขียนของรัสเซลและไวท์เฮด ที่เรียกว่า Principia Mathematica (Russell and Whitehead 1910, 13)

อย่างไรก็ตาม รัสเซลและไวท์เฮดยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าความจริงทางคณิตศาสตร์ทุกข้อสามารถพิสูจน์โดยใช้สัจจพจน์และกฎทางคณิตศาสตร์ เพราะยังมีความจริงทางคณิตศาสตร์อีกหลายประการที่ต้องใช้สัจจพจน์ที่ไม่ใช่สัจจพจน์ทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์

แนวคิดแบบโครงสร้างหรือพิธีการนิยม (Formalism) นักปรัชญาที่เป็นผู้นำในแนวคิดนี้ได้แก่ เดวิด ฮิลเบอร์ท (David Hilbert อ้างถึงใน Fremont 1969, 9) เขาเชื่อว่าคณิตศาสตร์มีโครงสร้างที่แน่นอนโดยอาศัยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และเป็นอิสระต่อกัน "Mathematics is the formal structure of the symbalism and completely independent of any meaning that may be assigned to the symbals" ซึ่งประกอบด้วยบทนิยาม สัจจพจน์ และทฤษฎีต่าง ๆ ซึ่งไม่ขัดแย้งกัน และสามารถพิสูจน์ได้โดยการพิสูจน์เชิงนิรนัย นอกจากนี้เขายังมีความเชื่อว่าคณิตศาสตร์อาจจะคิดได้ในรูปของ "เกม" ที่แต้มหรือคะแนนไม่มีความหมาย (meaningless

marks) ความสำคัญของเกมอยู่ที่การพบความสัมพันธ์ของแต้มหรือคะแนนเหล่านั้นที่มีต่อกัน สำหรับนักปรัชญาแนวโครงสร้างนี้ คิดว่าคณิตศาสตร์ไม่จำเป็นต้องอาศัยความจริงหรือความหมายในระบบสัญลักษณ์ จะมีแต่ระบบที่แน่นอนตายตัว (consistent) ทางตรรกศาสตร์ของสัญลักษณ์เท่านั้น ซึ่งระบบนี้ได้นำปัญหามาสู่นักปรัชญาในกลุ่มนี้ที่จะพิสูจน์ว่า ระบบความแน่นอนตายตัวนี้จะสร้างขึ้นมาได้อย่างไร ในการพิสูจน์ความแน่นอนตายตัวของระบบใด ๆ จำต้องอาศัยระบบที่ใหญ่กว่าที่มีอยู่ในโลกนี้ ซึ่งเดวิด ฮิลเบอร์ท ยังไม่สามารถพิสูจน์สิ่งนี้ได้

แนวคิดแบบสหัชญาณนิยม (Intuitionism) นักปรัชญาที่เป็นผู้นำในแนวคิดนี้ได้แก่ แอล. อี. เจ บรูเวอร์ (L.E. J. Brouwer) ที่เน้นแนวคิดที่ว่า ข้อกล่าวทางคณิตศาสตร์ทุกข้อนั้นจะต้องมีความหมายที่ชัดเจนที่เกิดจากจิตมนุษย์ที่หยั่งรู้ได้ การรับรู้ของจิตมนุษย์มีบทบาทสำคัญในการค้นพบความรู้ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีหลักการที่สำคัญ 3 ประการ คือ

1. ระบบคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นจากการรับรู้ของจิตมนุษย์นั้น อาจจะยังไม่ใช้ระบบคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ที่แท้จริง เพราะความจริงทางคณิตศาสตร์อาจจะยังไม่ถูกค้นพบทั้งหมด

2. สัจจพจน์หรือทฤษฎีบททางคณิตศาสตร์ที่ค้นพบหรือยึดถืออยู่แล้วนั้น อาจมีการเปลี่ยนแปลง หากมีการค้นพบสิ่งใหม่ ๆ ที่สามารถหักล้างความเชื่อเดิมได้

3. ยอมรับบทบาทของนักคณิตศาสตร์ในการสร้างทฤษฎีใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์

จากหลักการดังกล่าวนี้ จะเห็นว่านักปรัชญาแนวสหัชฌาณนิยมพิจารณาว่า คณิตศาสตร์นั้นเป็นกระบวนการที่เจริญเติบโตได้เรื่อย ๆ และไม่สามารถที่จะทำให้สมบูรณ์โดยใช้สัญลักษณ์ อย่างไรก็ตาม แนวคิดนี้ยังมีประเด็นที่ได้รับการวิพากษ์วิจารณ์ว่า ความรู้คณิตศาสตร์ที่เกิดจากการหยั่งรู้และสัมพันธ์กันเป็นระบบ โดยอาศัยหลักการพิสูจน์แบบนิรนัยนั้น ถือว่าเป็นความรู้แบบอัตวิสัย (Subjective knowledge) ทำให้ไม่แน่ใจว่า ความรู้นี้จะใกล้เคียงกับระบบความจริงของคณิตศาสตร์ที่บริสุทธิ์มากน้อยเพียงไร

1.2.2 <u>กลุ่มคณิตศาสตร์สัมพัทธ์</u> กลุ่มนี้มีความเชื่อว่า ความจริงทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น สามารถเปลี่ยนแปลงได้ และความจริงทางคณิตศาสตร์ต้องอาศัยประสบการณ์เป็นเครื่องยืนยันหรือพิสูจน์ ความเชื่อนี้สามารถแบ่งได้เป็น 3 แนวคิด คือ

แนวคิดแบบประสบการณ์นิยม (Empiricism) นักปรัชญาในกลุ่มนี้ส่วนใหญ่เป็นนักปรัชญาชาวอังกฤษและสหรัฐอเมริกา ซึ่งมีความเชื่อว่าความจริงหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นได้มาจากข้อสรุปที่เกิดจากประสบการณ์ของมนุษย์ และสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ประสบการณ์เช่นเดียวกัน

แนวคิดแบบกึ่งประสบการณ์นิยม (Quasi-empiricism) นักปรัชญาในแนวคิดนี้เชื่อว่าความจริงหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์มีกำเนิดมาจากประสบการณ์ของมนุษย์ เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้นย่อมไม่สมบูรณ์ จึงสามารถที่จะเปลี่ยนแปลงได้ ความจริงทางคณิตศาสตร์บางประการไม่สามารถพิสูจน์หรือยืนยันโดยใช้ประสบการณ์ได้ การพิสูจน์นั้นอาจต้องอาศัยหลักตรรกศาสตร์หรือเหตุผลอื่นประกอบ

จากความเชื่อที่ว่ามนุษย์เป็นผู้สร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์นี้ จึงมองคณิตศาสตร์ในรูปของกิจกรรม กิจกรรมหรือผลงานของนักคณิตศาสตร์คนใด หากได้นำเสนอและเป็นที่ยอมรับของสังคมแล้วก็จะถือว่าเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นทางการจนกว่าจะมีข้อพิสูจน์มาชัดแย้ง หากยังไม่ได้นำเสนอและยอมรับจากสังคมจะถือว่าเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างไม่เป็นทางการ

แนวคิดแบบการสร้างของสังคม (Social construction) แนวคิดนี้มีความเชื่อต่อเนื่องจากแนวคิดแบบกึ่งประสบการณ์นิยม กล่าวคือ มนุษย์ได้รับความรู้แบบอัตวิสัย โดยอาศัยประสบการณ์และกระบวนการทางสังคม รวมทั้งกระบวนการคิดของแต่ละคน เมื่อเขาพัฒนาความรู้นั้นแล้วนำเสนอและเป็นที่ยอมรับของสังคม ก็จะเป็นความรู้ที่เรียกว่าความรู้แบบวัตถุวิสัย (Objective knowledge) จากการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์เข้าสู่การพิจารณา อภิปราย และถกเถียงกันในหมู่ของสมาชิกในสังคมนั้น ความรู้หรือข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ที่ได้นี้จึงถือว่าเป็น<u>การสร้างของสังคม</u> ทำให้เกิดความรู้ทางคณิตศาสตร์แบบวัตถุวิสัยเพิ่มเติมขึ้น และความรู้ทางวัตถุวิสัยนี้จะถ่ายทอดมาสู่มนุษย์โดยผ่านกระบวนการทางสังคม เมื่อบุคคลรับความรู้นั้นก็จะกลายเป็นส่วนหนึ่งของความรู้แบบอัตวินัยของบุคคลนั้น

แนวคิดต่าง ๆ ทางปรัชญาคณิตศาสตร์ที่กล่าวข้างต้น แต่ละแนวอาจจะมีจุดอ่อน มีข้อที่ยังถกเถียงหรือการไม่ยอมรับของบุคคลในวงการเดียวกันอยู่เกือบทุกแนวคิด ซึ่งยังหาข้อยุติที่แน่นอนไม่ได้ อย่างไรก็ตาม แนวคิดปรัชญาคณิตศาสตร์นี้ได้ถูกนำไปใช้เป็นพื้นฐานในการกำหนดแนวปรัชญาคณิตศาสตร์ที่จะเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในห้องเรียน

กิจกรรมการเรียนที่ 1.2

หลังจากศึกษาเนื้อหาหัวข้อ 1.2 แล้ว ให้นักศึกษาทำกิจกรรมดังต่อไปนี้

จงเปรียบเทียบแนวคิดของกลุ่มคณิตศาสตร์สัมบูรณ์และกลุ่มคณิตศาสตร์สัมพัทธ์ว่าเหมือนกันหรือแตกต่างกันอย่างไร

1.3 ปรัชญาของคณิตศาสตร์ศึกษา

ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนให้ได้ผลดี ครูควรมีความรู้พื้นฐานปรัชญาคณิตศาสตร์และปรัชญาคณิตศาสตร์ศึกษา

คณิตศาสตร์ศึกษาเป็นการศึกษาเรื่องที่เกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ทั้งในส่วนที่เกี่ยวกับครู เช่น พฤติกรรมการสอนของครู วิธีการสอนของครู และในส่วนที่เกี่ยวกับนักเรียน ได้แก่พฤติกรรมของนักเรียน รวมทั้งจิตวิทยาเกี่ยวกับการเรียนรู้และพัฒนาการของผู้เรียน หลักสูตรและกระบวนการจัดการเรียนการสอน

ปรัชญาคณิตศาสตร์ศึกษาเป็นแนวคิดในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ว่าจะมุ่งไปในทางใด มีเป้าประสงค์และมีการดำเนินการสอนอย่างไร ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะแนวคิดที่สำคัญ 4 แนวคิด คือ

1.3.1 แนวคิดที่เน้นความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์

1.3.2 แนวคิดที่เน้นการนำไปใช้

1.3.4 แนวคิดที่เน้นผู้เรียน

1.3.5 แนวคิดที่เน้นการเป็นกระบวนการทางสังคม

1.3.1 **แนวคิดที่เน้นความเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์** แนวคิดนี้เชื่อว่าการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ควรให้นักเรียนได้รับความรู้ทางคณิตศาสตร์ให้มากที่สุด เน้นความรู้ด้านโครงสร้าง มโนมติ และการพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์อย่างชัดเจนและรัดกุม และการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเป็นการฝึกให้นักเรียนเป็นนักคณิตศาสตร์ที่ดี และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้น เนื้อหาในหลักสูตรจึงเป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ ที่มีโครงสร้างและการเรียงลำดับเป็นอย่างดี เนื้อหามี

ความเป็นนามธรรมและมีความบริสุทธิ์เพิ่มขึ้นตามลำดับ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในระดับมหาวิทยาลัย เพื่อเตรียมนักเรียนให้เป็นนักคณิตศาสตร์ในอนาคต แนวคิดนี้ไม่คำนึงถึงการสอนคณิตศาสตร์เพื่อนำไปใช้ในด้านความคิดเห็นเกี่ยวกับนักเรียน เชื่อว่านักเรียนแต่ละคนมีความสามารถทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันตั้งแต่กำเนิด ดังนั้นการสอนคณิตศาสตร์จึงควรส่งเสริมนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ให้มากที่สุดตามที่นักเรียนจะรับได้ การสอนคณิตศาสตร์เน้นที่บทบาทของครูในฐานะผู้ถ่ายทอดเนื้อหา มโนมติ หลักการและทฤษฎีบทให้นักเรียนได้เข้าใจ เมื่อนักเรียนเข้าใจแล้วก็จะสามารถนำความรู้นั้นไปใช้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ วิธีการสอนอาจใช้วิธีบรรยาย ยกตัวอย่างประกอบ และหาแบบฝึกหัดต่าง ๆ แปลก ๆ มาให้นักเรียนได้ฝึกปฏิบัติ การใช้อุปกรณ์การสอนควรใช้เพื่อให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาให้มากขึ้นเท่านั้น การใช้เครื่องช่วยคิดคำนวณต่าง ๆ เช่น เครื่องคิดเลข จะนำมาใช้ต่อเมื่อนักเรียนได้เรียนรู้หลักการพื้นฐานมาแล้ว สำหรับการประเมินผลการเรียนควรมีการประเมินผลระหว่างเรียนเพื่อประโยชน์ในการปรับปรุงการเรียนการสอน และมีการประเมินผลปลายภาคเรียน ซึ่งเป็นการประเมินผลรวมทั้งหมด แบบทดสอบที่ใช้ควรยากพอสมควร เพื่อพัฒนาและท้าทายความสามารถของนักเรียน

1.3.2 <u>แนวคิดที่เน้นการนำไปใช้</u> แนวคิดนี้มีความเชื่อในปรัชญาคณิตศาสตร์ในกลุ่มที่ 1 ที่เชื่อว่าธรรมชาติและความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นความรู้ที่สมบูรณ์แน่นอน และไม่เปลี่ยนแปลง แต่ควรเน้นที่การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในด้านต่าง ๆ ทั้งทางด้านเทคโนโลยี อุตสาหกรรม วิทยาศาสตร์ ฯลฯ การสอนคณิตศาสตร์จึงเป็นการเตรียมให้นักเรียนมีความรู้อย่างเพียงพอสำหรับการดำรงชีวิต การเป็นพลเมืองดีของประเทศ และสามารถนำไปใช้ในการประกอบอาชีพในอนาคต ดังนั้นหลักสูตรคณิตศาสตร์ในโรงเรียนจึงควรประกอบด้วยคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ ที่นักเรียนจำเป็นต้องเรียนรู้ให้เข้าใจเพื่อเป็นพื้นฐานที่จะนำไปใช้ และส่วนที่สำคัญคือ การประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในด้านต่าง ๆ ที่สอดคล้องกับความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยีและสังคมที่กำลังเปลี่ยนแปลงไป การให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียนในโรงเรียนไม่จำเป็นต้องเท่ากัน ควรคำนึงถึงระดับความสามารถของผู้เรียนซึ่งมีติดตัวมาแต่กำเนิด (แต่บางคนก็อาจจะพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ในภายหลังได้) ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์เบื้องต้น ควรจัดให้กับกลุ่มนักเรียนที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์ค่อนข้างต่ำให้เขามีความรู้เพียงพอที่จะเข้าสู่ตลาดแรงงานอุตสาหกรรมระดับล่างได้ สำหรับกลุ่มที่มีความสามารถปานกลาง

ซึ่งอาจจะไปทำหน้าที่ในด้านการบริหารงาน หรือการกำหนดนโยบายต่าง ๆ ในวงงานอุตสาหกรรม นอกจากจะต้องเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐานเบื้องต้นแล้ว ยังต้องให้เรียนคณิตศาสตร์ประยุกต์ด้วย เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ ส่วนกลุ่มที่มีความสามารถทางคณิตศาสตร์มากนั้นควรให้เรียนคณิตศาสตร์บริสุทธิ์

การจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดนี้มุ่งเน้นการปฏิบัติของนักเรียนให้ได้ลงมือปฏิบัติการใช้อุปกรณ์จริง เช่น การใช้เครื่องคิดเลข เครื่องคอมพิวเตอร์ แต่ก่อนที่จะใช้อุปกรณ์เหล่านี้ ครูจะต้องสอนหลักการพื้นฐานก่อนให้ลงมือปฏิบัติจริง การฝึกปฏิบัติทั้งการคิดคำนวณและการใช้เครื่องมือนั้น ควรให้สัมพันธ์กับสภาพในชีวิตประจำวัน

1.3.3 <u>แนวคิดที่เน้นผู้เรียน</u> แนวคิดนี้ยึดปรัชญาคณิตศาสตร์ในกลุ่มที่ 2 ที่ว่า ความจริงหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นต้องอาศัยประสบการณ์เป็นเครื่องยืนยันหรือพิสูจน์ ความรู้นี้เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น จึงสามารถเปลี่ยนแปลงได้ ดังนั้น การสอนคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องจัดประสบการณ์ต่าง ๆ ในโรงเรียน เพื่อช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถและศักยภาพของตนเองให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ และจัดให้สอดคล้องกับประสบการณ์เดิมของนักเรียน และให้สัมพันธ์กับวิชาอื่น ๆ ในลักษณะที่ใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่จะช่วยให้นักเรียนได้มีการพัฒนาในด้านต่าง ๆ และสามารถนำมาใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้

ในการจัดการเรียนการสอนนั้น ยึดถือนักเรียนเป็นจุดศูนย์กลางของการเรียนการสอน นักเรียนจะต้องเป็นผู้ลงมือปฏิบัติและสืบเสาะหาความรู้โดยครูเป็นผู้ช่วยเหลือ จัดหาอุปกรณ์ กิจกรรมการร่วมมือ และจัดสถานการณ์ให้เอื้ออำนวยต่อการเรียนรู้ และเนื่องจากเชื่อว่านักเรียนมีความแตกต่างระหว่างบุคคลในด้านความสามารถ ประสบการณ์และเจตคติ การพัฒนาการและการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคนจึงเป็นไปในลักษณะที่แตกต่างกัน และไม่ควรนำมาเปรียบเทียบกัน

การประเมินผลควรใช้การประเมินผลอย่างไม่เป็นทางการแบบอิงเกณฑ์ เพื่อตรวจสอบดูว่านักเรียนมีการพัฒนาหรือก้าวหน้าเพิ่มขึ้นมากน้อยเพียงไร และไม่นำผลของการประเมินไปเปรียบเทียบกับผู้อื่น

1.3.4 <u>แนวคิดที่เน้นการเป็นกระบวนการทางสังคม</u> แนวคิดนี้ตั้งอยู่บนความเชื่อว่าคณิตศาสตร์เป็นผลิตกรรมของสังคม หากสังคมยอมรับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มนุษย์คิดค้นขึ้น จึงจะกล่าวได้ว่าความรู้

นั้นเชื่อถือได้ จนกว่าจะมีข้อพิสูจน์อื่นที่ยอมรับหรือเชื่อถือได้มาลบล้าง หลักสูตรคณิตศาสตร์ในโรงเรียนจึงพยายามจัดให้เกี่ยวข้องกับปัญหาในสังคม และให้สัมพันธ์กับวิชาอื่นโดยให้นักเรียนสามารถนำเอาความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการดำเนินการต่าง ๆ ในการดำรงชีวิตในสังคม การจัดการเรียนการสอนยึดเอานักเรียนเป็นจุดศูนย์กลางของการเรียน นอกจากจะเรียนรู้จากครูแล้ว นักเรียนควรจะเรียนรู้โดยการกระทำจริง ฝึกวิเคราะห์และแก้ปัญหาต่าง ๆ โดยใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการกลุ่ม นอกจากจะจัดให้มีการเรียนตามปกติแล้ว ควรให้มีการจัดทำโครงการที่เกี่ยวข้องกับสภาพและปัญหาทางสังคม และจะต้องนำความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือหรือเป็นส่วนหนึ่งในการดำเนินงานด้วย ทั้งนี้ครูจะต้องเป็นผู้ให้ความรู้ แนะแหล่งวิทยาการและวิทยากร จัดเตรียมหาสื่อและอุปกรณ์การสอนและจัดสถานการณ์ต่าง ๆ ให้กับผู้เรียน สำหรับการประเมินผลนั้นควรใช้วิธีการหลาย ๆ อย่างทั้งในและนอกห้องเรียน โดยเน้นทักษะทางคณิตศาสตร์และปัญหาทางสังคม

ปรัชญาคณิตศาสตร์ศึกษาที่กล่าวมานี้ ยังไม่สามารถสรุปได้ว่า แนวคิดหรือความเชื่อใดถูกต้องและใช้ได้ผลดีที่สุด เพราะแต่ละแนวคิดก็ยังมีข้อถกเถียง ขัดแย้งและวิพากษ์วิจารณ์ในประเด็นต่าง ๆ อยู่ ซึ่งผู้ที่เกี่ยวข้องในการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์จะต้องใช้วิจารณญาณของตนเอง ศึกษาสังเกตนำไปทดลองใช้ ปรับเปลี่ยน ผสมผสานให้สอดคล้องกับสภาพที่เป็นจริงของนักเรียนและสภาพแวดล้อมของการเรียนการสอนของตนเอง

กิจกรรมการเรียนที่ 1.3

หลังจากศึกษาเนื้อหาในหัวข้อ 1.3 จนเข้าใจดีแล้ว ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

1. จงอธิบายลักษณะการจัดการเรียนการสอนในระดับมัธยมศึกษาที่ท่านได้ประสบมาและพิจารณาดูว่าสอดคล้องกับปรัชญาคณิตศาสตร์ศึกษาที่เน้นในด้านใด

2. ถ้าท่านจะเป็นครูสอนคณิตศาสตร์ ท่านคิดว่าปรัชญาคณิตศาสตร์ศึกษาแนวคิดใดที่ใช้ได้เหมาะสมกับสภาพแวดล้อมของสังคมไทย จงให้เหตุผล

สรุป

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่สำคัญซึ่งถือว่าเป็นรากฐานความรู้ของศาสตร์สาขาอื่น ๆ เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน การประกอบอาชีพและการแก้ปัญหาในสังคม ดังนั้น คณิตศาสตร์จึงได้รับการบรรจุให้อยู่ในหลักสูตรทุกระดับ ตั้งแต่ระดับอนุบาลศึกษาจนถึงระดับอุดมศึกษา การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนนั้น มีการปรับเปลี่ยนไปตามแนวความเชื่อของปรัชญาคณิตศาสตร์ และปรัชญาคณิตศาสตร์ศึกษา ที่นักการศึกษาในแต่ละยุคแต่ละสมัยยึดถืออยู่ และยังไม่สามารถหาข้อสรุปได้ว่าการสอนคณิตศาสตร์โดยยึดถือปรัชญาคณิตศาสตร์ด้านใดจะเกิดผลดีมากที่สุด

บรรณานุกรม

1. ประพนธ์ เจียรกูล. "แนวคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ศึกษา" ประมวลสาระชุดวิชาสารัตถะและวิทยวิธีทางวิชาคณิตศาสตร์. มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช, บัณฑิตศึกษา สาขาศึกษาศาสตร์ 2537. (หน้า 26-142).

2. รัตนา รัตวิวัฒนาพงศ์. พฤติกรรมการสอนคณิตศาสตร์ 1. กรุงเทพมหานคร : คุณพินอักษรกิจ, 2527.

3. Aichele, Douglas B. and Robert E. Reys. Reading in Secondary School Mathematics. Massachusetts: Prindle, Wever and Schmidt, 1977.

4. Barker, Stephen E. Philosophy of Mathematics. New Jersey : Prentice - Hall , 1964.

5. Ernest, P. The Philosophy of Mathematics Education. Basingtoke : Falmer Press, 1991.

6. Eves, Haward. In Introduction to the History of Mathematics. New York : Holt Rinehart and Winston, 1964.

7. Fremont, Herbert. How to Teach Mathematics in Secondary Schools. Philadelphia : W.B. Sounders Company, 1969.

8. Hersh, R. "Some Proposals for reviewing the philosophy of mathematics," Advance in Mathematics. 31 : 31-50, 1979.

9. Kidd, Kenneth P. and others. The Loboratory Approach to Mathematics. Chicago : Science Research Associates, Inc., 1970.

10. Kline, Morris. Mathematics in Western Culture. Oxford : Oxford University Press, 1959.

11. Polya, G. How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Method. New Jersey : Princeton University Press, 1085.